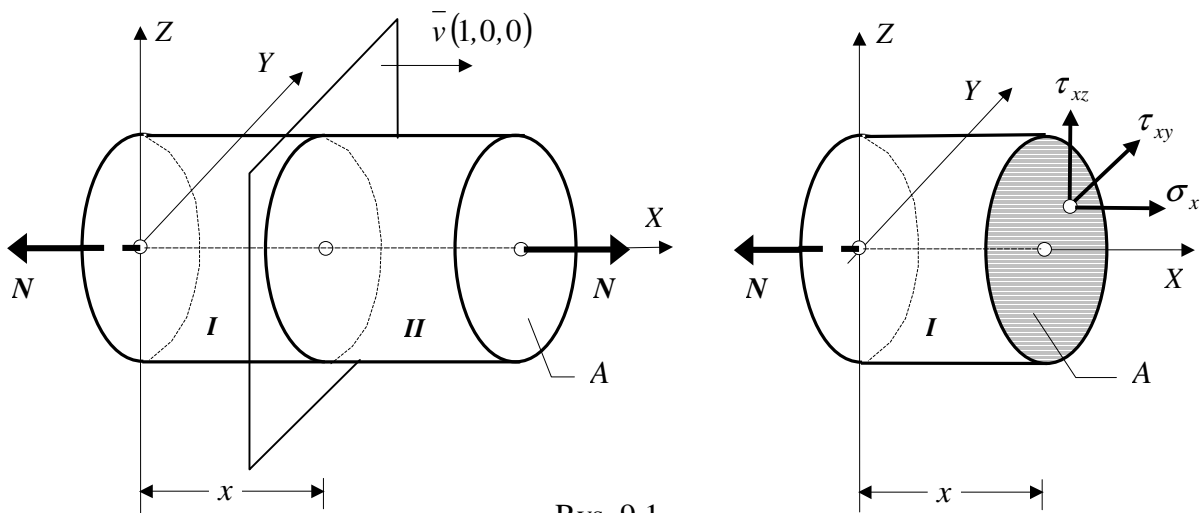


9. OSIOWE ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE

9.1. Naprężenia i odkształcenia

Osiowe rozciąganie pręta pryzmatycznego występuje wówczas, gdy układ sił zewnętrznych po jednej stronie przekroju poprzecznego pręta redukuje się do wypadkowej prostopadłej do przekroju, zaczepionej w jego środku ciężkości i skierowanej zgodnie z normalną zewnętrzną. Wypadkową tę \bar{N} nazywamy siłą osiową lub podłużną i w przypadku gdy jej zwrot jest zgodny ze zwrotem normalnej zewnętrznej nazywamy siłą rozciągającą a jej współrzędną N przypisujemy znak dodatni. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie elementów macierzy naprężeń i odkształceń w dowolnym punkcie pręta, bo te wielkości określają w nim stan naprężenia i odkształcenia oraz współrzędnych wektora przemieszczenia.

Rozważmy więc, pokazany na rys. 9.1 pręt pryzmatyczny o polu przekroju poprzecznego A , określony w układzie osi (X, Y, Z) , w którym oś X jest osią pręta, a osie (Y, Z) są osiami centralnymi jego przekroju poprzecznego. Pręt wykonany jest z izotropowego, jednorodnego, liniowo sprężystego materiału o stałych materiałowych E oraz ν .



Rys. 9.1

Dokonajmy myślowego przekroju pręta na dwie części, odrzućmy część II a do części I przyłożmy układ sił wewnętrznych, który symbolicznie zaznaczymy przez jego miary tzn. naprężenia $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ zaczepione w dowolnie wybranym punkcie przekroju poprzecznego.

Z twierdzenie o równoważności odpowiednich układów sił wewnętrznych i zewnętrznych wynika, że:

$$\begin{cases} S_x \{W_I\} = S_x \{Z_{II}\}, & S_y \{W_I\} = S_y \{Z_{II}\}, & S_z \{W_I\} = S_z \{Z_{II}\}, \\ M_{0x} \{W_I\} = M_{0x} \{Z_{II}\}, & M_{0y} \{W_I\} = M_{0y} \{Z_{II}\}, & M_{0z} \{W_I\} = M_{0z} \{Z_{II}\}, \end{cases} \quad (9.1)$$

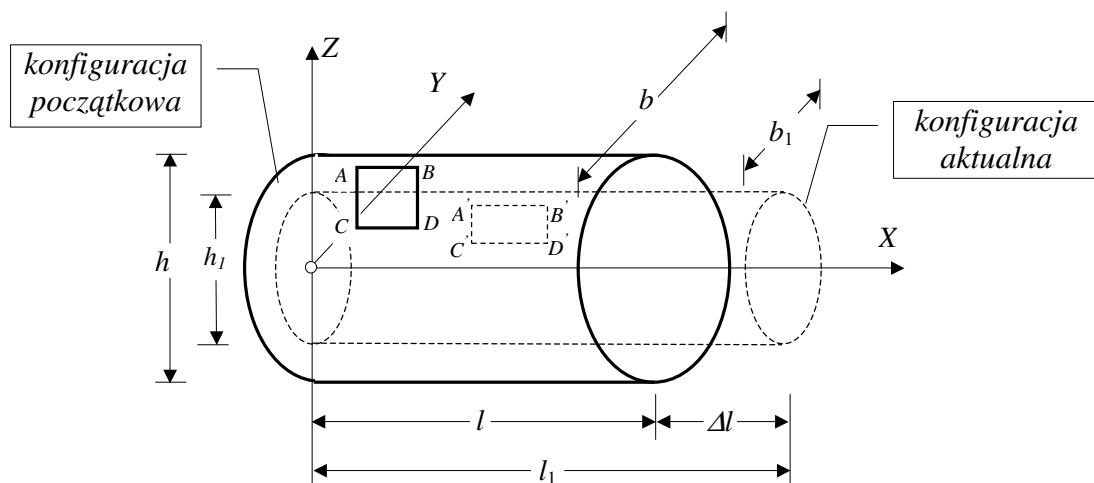
rzuty sum i momentów zredukowanego układu sił wewnętrznych przyłożonych do części I oraz układu sił zewnętrznych przyłożonych do części II, są sobie równe.

Zgodnie z powyższym możemy w rozważanym przypadku napisać poniższe związki:

$$\begin{cases} \iint_A \sigma_x dA = N, & \iint_A \tau_{xy} dA = 0, & \iint_A \tau_{xz} dA = 0, \\ \iint_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA = 0, & \iint_A \sigma_x z dA = 0, & \iint_A -\sigma_x y dA = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

Równania (9.2) możemy nazwać równaniami równowagi, gdyż wynikają z twierdzenia o równoważności układów sił wewnętrznych i zewnętrznych udowodnionego na podstawie warunków równowagi układu sił działających na ciało.

Z równań (9.2) nie można wyznaczyć $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, gdyż to funkcje trzech zmiennych i aby je określić, zajmiemy się analizą deformacji bryły po przyłożeniu obciążeń. W oparciu o przyjęte założenia odnośnie materiału, jak i hipotezę płaskich przekrojów Bernoulliego przyjmujemy, że obraz deformacji pręta po przyłożeniu obciążeń jest taki jak to pokazuje rys. 9.2.



Rys. 9.2

Analizując ten obraz deformacji pręta po przyłożeniu obciążeń przyjmujemy, że:

- pole przemieszczeń jest w nim jednorodne,
- odkształcenia kątowe włókien równoległych do osi układu odniesienia są równe zero,
- odkształcenia liniowe związane są zależnością: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$.

Powyższe obserwacje pozwalają napisać następujące zależności:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_1 - b}{b}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} = \frac{h_1 - h}{h},$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0.$$

Nazwiemy je równaniami geometrycznymi gdyż są wynikiem analizy geometrii pręta po deformacji.

Mając odkształcenia możemy, korzystając z równań fizycznych Hooke'a, wyznaczyć elementy macierzy naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_x = E \varepsilon_x,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \rightarrow \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \rightarrow \tau_{zx} = 0.$$

Należy teraz wrócić do równań równowagi (9.2) w celu sprawdzenia czy otrzymane w oparciu o przypuszczone pole przemieszczeń naprężenia spełniają te obiektywne zależności i aby wyrazić siły wewnętrzne poprzez siły zewnętrzne.

Zerowanie się naprężeń stycznych powoduje, że równania drugie, trzecie i czwarte są spełnione. Z równania pierwszego otrzymamy

$$\iint_A \sigma_x dA = N \rightarrow \iint_A E \varepsilon_x dA = N, \text{ a ponieważ pole odkształceń jest jednorodne, to}$$

odkształcenia liniowe są równe:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}, \quad (9.3)$$

i naprężenia normalne wynoszą:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (9.4)$$

Wstawiając powyższe do dwóch ostatnich równań równowagi otrzymujemy:

$$\iint_A \sigma_x z dA = 0 \rightarrow \frac{N}{A} \iint_A z dA = 0$$

$$\iint_A -\sigma_x y dA = 0 \rightarrow \frac{N}{A} \iint_A y dA = 0$$

bo osie (Y, Z) są osiami centralnymi i momenty statyczne przekroju poprzecznego liczone względem nich są równe zero. Tak więc ostatecznie macierze naprężeń i odkształceń przy osiowym rozciąganiu mają postać:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} N/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} N/EA & 0 & 0 \\ 0 & -\nu N/EA & 0 \\ 0 & 0 & -\nu N/EA \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

W praktyce inżynierskiej bardzo ważne jest określenie wydłużenia pręta, czyli przemieszczenie jego końca Δl . Jeśli pole przemieszczeń w pręcie jest jednorodne to łatwo wyznaczmy zmianę jego długości bez potrzeby całkowania odkształceń:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} \rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (9.6)$$

Podobnie możemy wyznaczyć zmiany wymiarów (zmniejszenie) przekroju poprzecznego pręta:

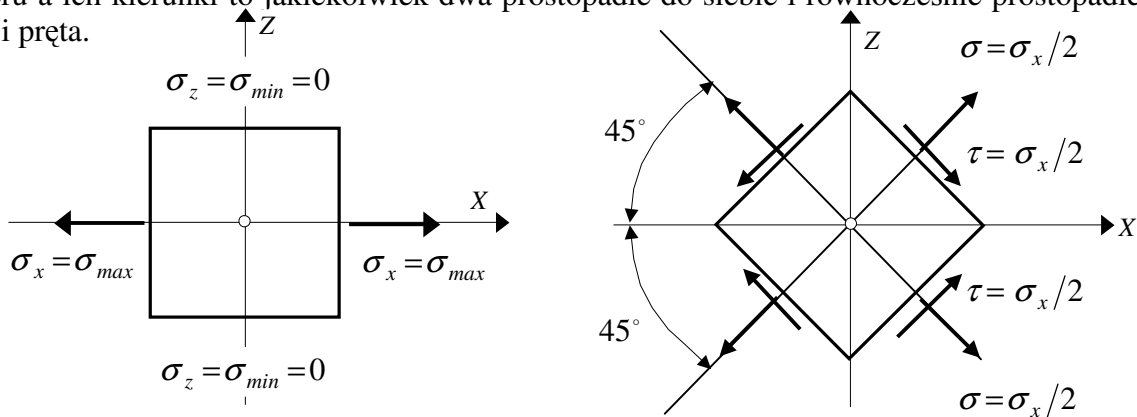
$$\Delta b = -\nu \frac{N b}{E A} \quad \text{oraz} \quad \Delta h = -\nu \frac{N h}{E A}.$$

Na końcu tej części naszych rozważań należy powiedzieć, że wyprowadzone zależności mogą być stosowane, w tej formie, zarówno dla przypadku rozciągania jak i ściskania osiowego.

W tym drugim przypadku wypadkowa \bar{N} ma zwrot przeciwny do normalnej zewnętrznej, a jej współrzędnej N przypisujemy znak ujemny. Przy czym w przypadku ściskania, tj. gdy $N < 0$ konieczne jest dodatkowe sprawdzenie czy pręt jest w stanie równowagi statecznej.

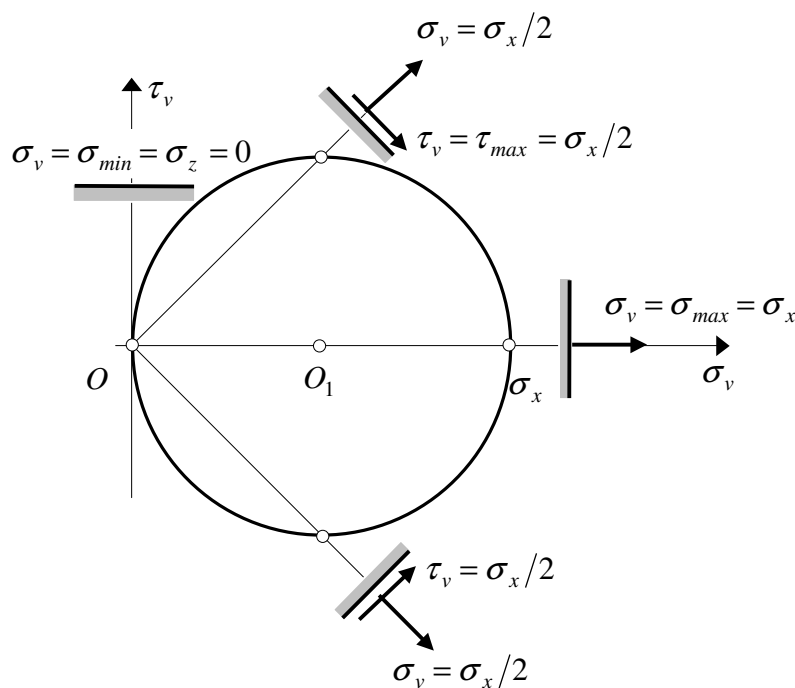
9.2. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia

W analizowanym przypadku występuje jednoosiowy i jednorodny stan naprężenia scharakteryzowany jednym tylko naprężeniem normalnym w przekroju poprzecznym pręta, które jest równocześnie maksymalnym naprężeniem głównym w przypadku rozciągania (rys.9.3) i minimalnym w przypadku ściskania. Pozostałe dwa naprężenia główne są równe zero a ich kierunki to jakiegokolwiek dwa prostopadłe do siebie i równocześnie prostopadłe do osi pręta.



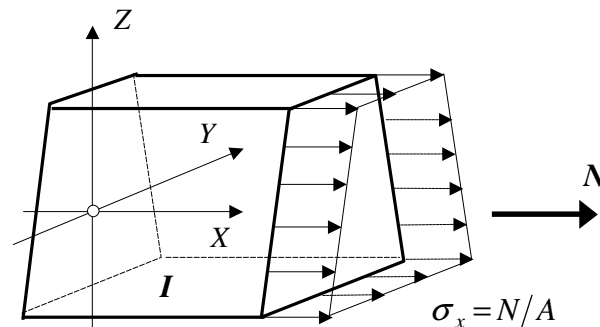
Rys. 9.3

Ekstremalne naprężenia styczne występują w przekrojach nachylonych pod kątem 45° do osi pręta (rys. 9.3) i równają się połowie naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym. Koło Mohra dla rozważanego przypadku pokazane jest na rys. 9.4.



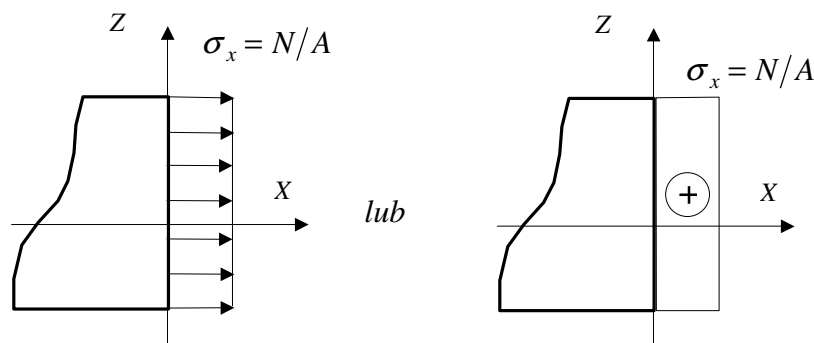
Rys. 9.4

Układ (rozkład) sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym pręta pokazuje rys. 9.5.



Rys. 9.5

Wartości naprężeń normalnych w tym przypadku nie zależą o współrzędnych y oraz z więc można ich rozkład, nie tracąc czytelności, rysować płasko, jak to zostało pokazane na rys. 9.6.



Rys. 9.6

Stan odkształcenia jest też jednorodny ale trójosiowy. Odkształcenia liniowe w kierunku równoległym do osi pręta są maksymalne w przypadku rozciągania i minimalne w przypadku ściskania. Pozostałe dwa odkształcenia główne są sobie równe, a ich kierunki to jakiegokolwiek dwa prostopadłe do siebie i równocześnie prostopadłe do osi pręta.

9.3. Energia sprężysta pręta rozciąganego lub ściskanego osiowo

Znajomość elementów macierze naprężeń i odkształceń pozwala na wyznaczenie gęstości energii sprężystej i energii sprężystej dla rozważanego przypadku obciążenia pręta. Podstawienie zależności (9.5) do (8.18) daje:

$$\Phi = \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2, \text{ i stąd energia sprężysta pręta o długości } l \text{ i polu przekroju poprzecznego } A$$

rozciąganego (ściskanego) osiowo stałą siłą o wartości N wynosi:

$$U = \iiint_V \Phi dV = \iiint_V \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 dV = \int_0^l dx \iint_A \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 dA = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx = \frac{N^2 l}{2EA}.$$

W przypadku konstrukcji złożonej z wielu prętów o różnych długościach oraz przekrojach poprzecznych obciążonych osiowo siłami podłużnymi jej energia sprężysta wynosi:

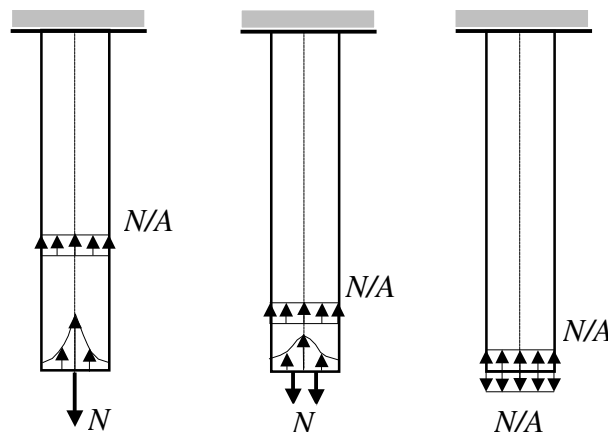
$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{2EA_i} dx, \quad (9.7)$$

gdzie sumowanie należy wykonać po wszystkich przedziałach charakterystycznych.

9.4. Zasada de Saint-Venanta

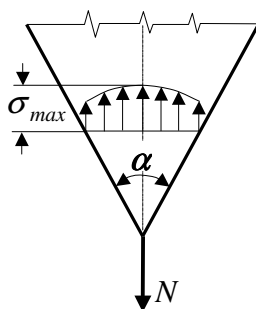
Wnioski mówiące o jednorodności rozkładu naprężeń czy odkształceń w pręcie rozciągającym osiowo mogą budzić pewne zastrzeżenia, jeśli popatrzymy na różne, występujące w praktyce inżynierskiej, przypadki obciążeń, które redukują się do siły rozciągającej N zaczepionej w środku ciężkości przekroju poprzecznego. Można przypuszczać, że sposób przyłożenia obciążenia będzie miał wpływ na rozkład naprężeń i odkształceń. I tak istotnie jest, ale tylko w bliskim sąsiedztwie obszaru przyłożenia obciążenia. Mówi o tym zasada de Saint-Venanta, która jest jednym z naszych podstawowych założeń i którą potwierdzają badania doświadczalne (szczególnie wyraźnie badania elastooptyczne). Zasadę tę można sformułować następująco:

jeżeli na pewien niewielki obszar ciała w równowadze działają rozmaicie rozmieszczone, ale statycznie równoważne obciążenia, to w odległości znacznie przekraczającej wymiary tego obszaru wywołują one praktycznie jednakowe stany naprężenia i odkształcenia (rys. 9.7).



9.5. Spiętrzenie naprężeń

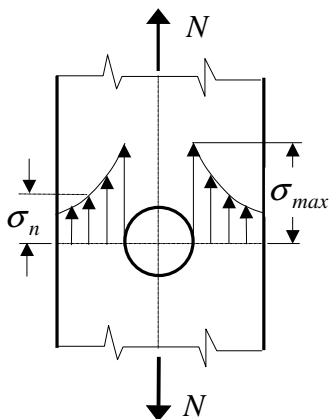
Rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym rozciąganego pręta pryzmatycznego jest równomierny. W przypadku rozciąganych prętów o zmiennym przekroju poprzecznym naprężenia normalne nie mają stałych wartości.



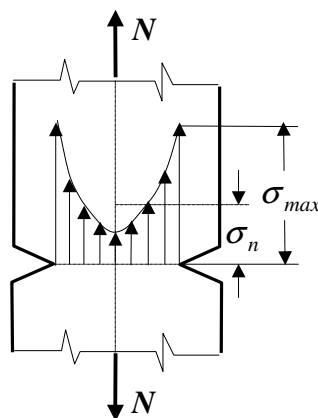
Rys. 9.8

Rozwiązanie metodami teorii sprężystości zagadnienie rozciąganego pręta w kształcie klina (rys. 9.8) pokazuje zmienność naprężeń normalnych i dodatkowo występowanie naprężeń stycznych. Wartość naprężenia maksymalnego σ_{max} w stosunku do wartości naprężenia nominalnego $\sigma_n = N/A$ wzrasta wraz z kątem α . Przy $\alpha=10^\circ$ naprężenie maksymalne jest o 1.3 % większe od nominalnego, a przy $\alpha=30^\circ$ jest już większe o 13 % co dowodzi, że gdy przekrój zmienia się łagodnie, to z dostateczną dokładnością w obliczeniach można stosować wzory jak dla prętów pryzmatycznych.

W przypadku gwałtownej zmiany kształtu lokalny wzrost naprężenia może być znaczny. W pokazanym na rys. 9.9 rozciągającym płaskowniku z otworem w jego pobliżu występuje duży wzrost naprężeń, nazywany spiętrzeniem lub koncentracją naprężeń. Szczególnie duża koncentracja naprężeń występuje w przypadku ostrych nacięć (rys. 9.10) i wówczas mówimy o efekcie karbu, który może prowadzić do powstania pęknięcia, a następnie do zniszczenia elementu. Analizą propagacji szczelin zajmuje się *mechanika pękania*, która obecnie ze względu na ważność i złożoność problemów, z którymi ma do czynienia stanowi autonomiczny przedmiot mechaniki.



Rys. 9.9



Rys. 9.10

9.6. Podstawowe dane doświadczalne. Statyczna próba rozciągania

W dotychczasowych naszych rozważaniach zetknęliśmy się już z takimi wielkościami, jak moduł Younga i współczynnik Poissona. Są one charakterystyczne dla danego materiału i nazwaliśmy je ogólnie stałymi materiałowymi. Wspomnieliśmy również, że dla każdego materiału istnieją pewne charakteryzujące go wielkości sił między cząsteczkowych, po przekroczeniu których traci on swoją spójność (niszczy się). Te jak i inne jeszcze wielkości określające własności mechaniczne materiału, mogą być wyznaczone jedynie na drodze doświadczalnej. Sposób i warunki przeprowadzania odpowiednich badań laboratoryjnych są określone bardzo precyzyjnymi przepisami, podanymi w Polskich Normach.

Jednym z podstawowych badań jest statyczna próba rozciągania, gdyż, jak w żadnym innym doświadczeniu, statyczne i kinematyczne warunki brzegowe jakim podlega badana próbka są najbliższe tym, które zakładane są w modelu teoretycznym.

Realizowane w próbce stany naprężenia i odkształcenia reprezentowane są przez dwie wielkości: naprężenia normalne σ w przekroju poprzecznym badanej próbki oraz odkształcenia liniowe ε w kierunku jej osi. Obie te wielkości można wyznaczyć z prostych pomiarów podczas badania i, co więcej, związek między nimi $\sigma = E\varepsilon$ zawiera stałą materiałową jaką jest moduł Younga E .

Dalej przedstawimy najważniejsze wyniki próby rozciągania stali, wykonanej w sposób określony normą PN-76/H-04310. Dla innych materiałów powszechnie stosowanych w konstrukcjach budowlanych (beton czy drewno) obowiązują inne normy ale z uwagi na przyjęte założenia o własnościach analizowanych przez nas konstrukcji stal jest modelowym materiałem i dlatego nią się przede wszystkim zajmiemy.

Wykonane zgodnie z podaną normą próbki (zwykle o przekroju kołowym) stali rozciągane są osiowo w maszynach wytrzymałościowych najczęściej aż do zniszczenia próbki. Podczas próby rejestrowane są zmiany wielkości siły rozciągającej i wymiarów próbki, dzięki czemu

można sporządzić tzw. wykres rozciągania w układzie $\sigma - \varepsilon$. Wykres rozciągania stali miękkiej pokazuje rys.9.11.

Na osi odciętych mamy odkształcenie liniowe włókien równoległych do osi pręta, wyznaczone ze wzoru

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0} \quad \text{gdzie: } L_0 - \text{pierwotna długość}$$

odcinka próbki (długość pomiarowa), którego wydłużenia Δl są rejestrowane.

Na osi rzędnych występują naprężenia normalne w przekroju poprzecznym pręta, wyznaczone ze wzoru:

$$\sigma = \frac{N}{A_0}, \quad \text{gdzie: } N - \text{siła rozciągająca próbkę,}$$

rejestrowaną podczas badania, A_0 - pole pierwotnego przekroju poprzecznego próbki..

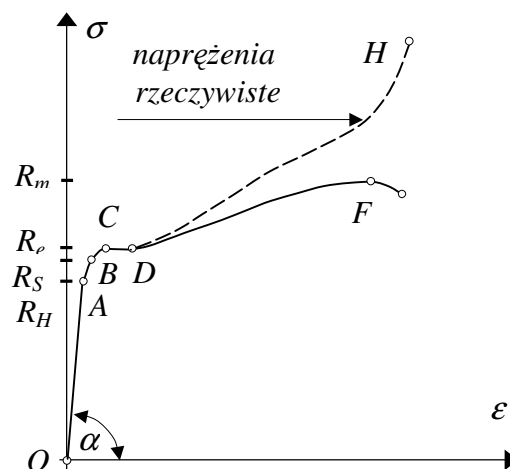
Ponieważ podczas wykonywania próby pole przekroju poprzecznego próbki maleje, to te naprężenia są wielkościami umownymi.

Omówimy krótko poszczególne charakterystyczne części wykresu rozciągania. Na prostoliniowym odcinku OA odkształcenia są liniowo zależne od naprężeń i znikają po zdjęciu obciążenia. Tak więc własności materiału są liniowo sprężyste i największe naprężenie, przy którym te własności jeszcze występują R_H , nazywamy granicą proporcjonalności albo granicą stosowania prawa Hooke'a. Na krzywoliniowym odcinku AB , kończącym się naprężeniem R_S , materiał jest jeszcze sprężysty ale zależność między naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowa. R_S nazywamy granicą sprężystości, po jej przekroczeniu w materiale zaczynają występować trwałe (plastyczne) odkształcenia. W punkcie C wykresu, któremu odpowiadają naprężenia R_e , w próbce narastają znaczne odkształcenia: 10 do 15 razy większe niż przy granicy sprężystości, przy stałych a nawet malejących naprężeniach. Zjawisko to nazywamy płynięciem materiału (część CD określana jest jako platforma płynięcia), a naprężenie R_e - wyraźną granicą plastyczności. Płynięcie materiału kończy się w punkcie D , w którym zmienia się charakter wykresu. Przyrost odkształceń wymaga przyrostu naprężeń, materiał się wzmocnił i sytuacja taka trwa aż do punktu F , któremu odpowiada największa siła uzyskana w czasie próby. Naprężenia odpowiadające temu punktowi R_m , nazywamy wytrzymałością na rozciąganie. W momencie badania, któremu odpowiada na wykresie rozciągania punkt F , w próbce tworzy się przewężenie, tzw. szyjka i prawie natychmiast próbka w tym miejscu ulega zerwaniu.

Podczas próby rozciągania prócz wyznaczenia wyżej opisanych granicznych wartości naprężeń możemy wyznaczyć moduł Younga i liczbę Poissona. Moduł Younga to nic innego jak tangens kąta nachylenia liniowej części wykresu rozciągania:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{tg } \alpha .$$

Rejestrując zmianę średnicy próbki Δd podczas próby możemy wyznaczyć odkształcenia liniowe w kierunku poprzecznym do osi pręta :



Rys. 9.11

$\varepsilon_{pop} = \frac{\Delta d}{d_0}$, gdzie: d_0 - pierwotna średnica próbki.

Liczbę Poissona otrzymujemy dzieląc odkształceń liniowe w kierunku poprzecznym przez odkształcenia liniowe w kierunku równoległym do osi próbki:

$$\nu = \frac{|\varepsilon_{pop}|}{\varepsilon}$$

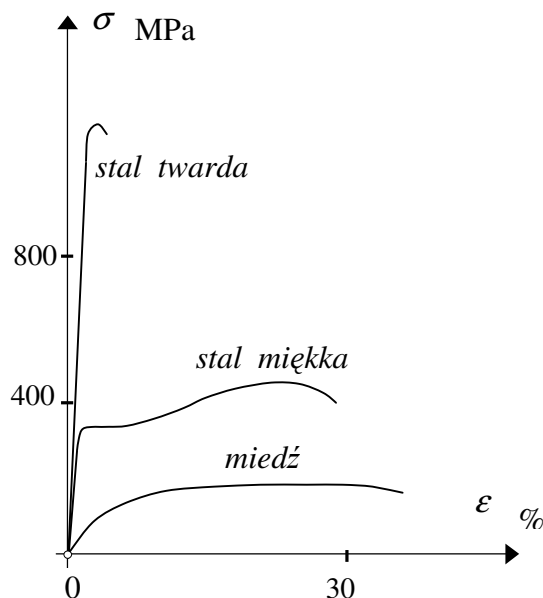
Wyżej wspomniano, że naprężenia na wykresie rozciągania są naprężeniami umownymi, gdyż otrzymane zostały przez podzielenie siły rozciągającej przez początkowe pole przekroju poprzecznego. Naprężeniami rzeczywistymi nazywać będziemy iloraz siły przez aktualne pole powierzchni przekroju. W początkowym stadium próby rozciągania między tymi dwoma naprężeniami nie ma istotnych różnic, pojawiają się one dopiero pod koniec platformy płynięcia. Przebieg zmian naprężeń rzeczywistych na rys.9.11 pokazany został linią przerywaną.

Wykres rozciągania na rys. 9.11 pokazuje cechy i zachowanie się stali miękkiej nazywanej też stalą niskowęglową bo zawartość węgla w jej składzie nie przekracza 0.30 %. Stal o takiej charakterystyce jest powszechnie stosowana w budowlanych konstrukcjach stalowych.

Na rys. 9.12 naszkicowane zostały wykresy rozciągania innych metali.

Widoczny jest brak w pewnych materiałach wyraźnej granicy plastyczności R_e . W takich przypadkach posługujemy się umowną granicą plastyczności oznaczaną przez $R_{0.2}$ i definiowaną jako naprężenie, przy którym trwałe odkształcenia liniowe wynoszą 0.2 %.

W przypadku statycznej próby ściskania (sposób jej wykonania w przypadku metali można znaleźć w normie PN-57/H-04320) w zakresie naprężeń poniżej granicy plastyczności charakter wykresu ściskania w układzie $\sigma-\varepsilon$ nie odbiega od wykresu rozciągania. Stal miękka, aluminium czy miedź mają granicę proporcjonalności, sprężystości i plastyczności niemal identyczną jak przy rozciąganiu. Przy większych naprężeniach charakter wykresu się zmienia i jest to powodowane wpływem aktualnej geometrii badanej próbki - zwiększa się pole jej przekroju poprzecznego.



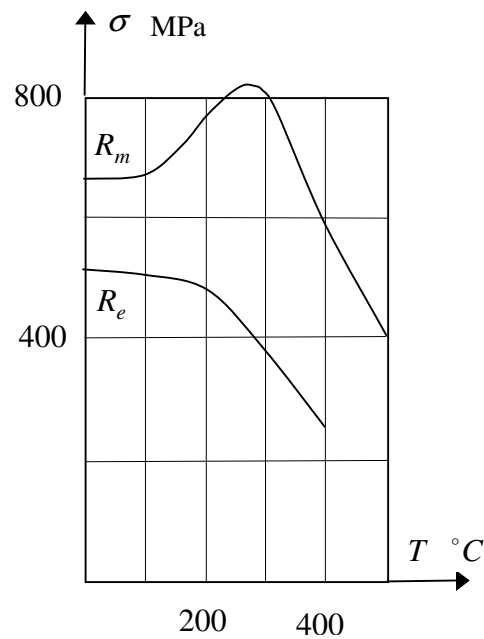
Rys. 9.12

Na wielkości mechaniczne materiałów niewątpliwie wpływ mają różne czynniki zewnętrzne, przykładowo można wymienić temperaturę, wilgotność czy czas. To, jak znaczną zmianę wielkości mechanicznych będą one powodować zależy między innymi od rodzaju materiału.

Niżej bardzo pobieżnie, omówione zostaną niektóre aspekty wpływu temperatury i czasu na zachowanie się stali.

Wpływ temperatury na granicę plastyczności R_e i wytrzymałość na rozciąganie R_m pokazuje rys. 9.13.

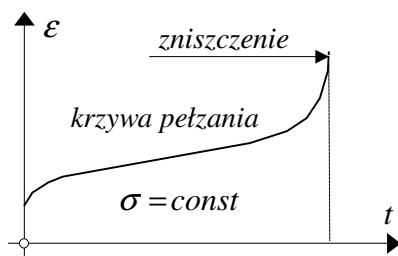
Podwyższona temperatura aktywizuje własności reologiczne stali polegające, najprościej mówiąc, na zmianie deformacji w czasie przy stałych obciążeniach. Wśród zjawisk (procesów) reologicznych ciał stałych zwykle rozróżnia się zjawisko pełzania określane jako wzrost odkształceń w czasie przy stałych naprężeniach i zjawisko relaksacji definiowane jako spadek naprężeń w czasie przy stałych odkształceniach.



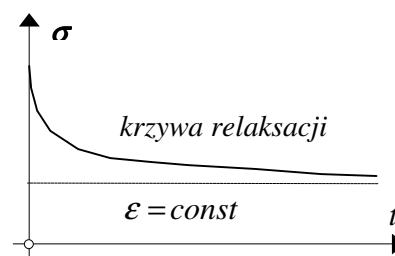
Rys. 9.13

Długotrwała próba rozciągania stali w podwyższonej temperaturze tj. próba pełzania (warunki i sposób jej wykonania podany jest w normie PN-57/H-04330) pokaże przebieg zmian odkształceń w czasie przy stałym naprężeniu, których wykres, tzw. krzywą pełzania przedstawia rys. 9.14.

Wynikiem próby relaksacji byłaby krzywa relaksacji pokazująca zmianę naprężeń w czasie przy stałych odkształceniach naszkicowana na rys. 9.15.



Rys .9.14



Rys .9.15

W metalach procesy reologiczne wyraźnie się zaznaczają przy temperaturach powyżej 0.3 – 0.4 ich temperatury topnienia.

Zjawiska reologiczne, zwłaszcza zjawisko relaksacji ma negatywny wpływ za zachowanie się konstrukcji. Ono jest przyczyną spadku sił sprężających w konstrukcjach sprężonych czy rozluźniania się połączeń śrubowych i nitowanych.

W tablicy poniżej, podane są wartości charakterystyk mechanicznych i stałych materiałowych dla niektórych materiałów. Ponieważ wielkości te bardzo zależą od składu chemicznego, obróbki cieplnej, obróbki plastycznej jak i innych czynników (np. wilgotności w przypadku drewna) podane wartości należy traktować orientacyjnie, skupiając uwagę na

tym z jakim rzędem wielkości mamy do czynienia. W nawiasach podana jest wytrzymałość przy ściskaniu.

Materiał	Wytrzymałość na rozciąganie R_m MPa	Granica plastyczności R_e MPa	Wytrzymałość obliczeniowa R_r MPa	Moduł Younga E GPa	Liczba Poissona ν	Gęstość masy ρ kg/m ³
Stal konstrukcyjna St3SX, St3SY	375	225	205	205	0.30	7850
Aluminium	100	50		70	0.32-0.36	2070
Miedź	210-240	70		110	0.30-0.34	8960
Żeliwo szare	200-400			95-110	0.23-0.27	7100
Ołów	15			18	0.42	11340
Brąz	300			113	0.32-0.35	8860
Dural	270	150		67-74	0.32-0.35	2640
Beton B350	2.31 (36)		1.54 (27.7)	38.6	1/6	2500
Szkło	40-100			56	0.25	2400-2600
Drewno- sosna (wzdłuż włókien)	14-26		65-12.5	6		400-500

9.7. Podstawowe zasady i warunki projektowania

Mając wyznaczone stany naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia dla przypadku osiowego rozciągania prętów przyrównanych mamy podstawy do projektowania takich elementów konstrukcji inżynierskich. Na tym przykładzie tego przypadku omówione zostaną podstawowe pojęcia i procedury związane z projektowaniem przy bardziej złożonych przypadkach obciążenia czy elementach konstrukcji. Będzie to w większym stopniu omówienie zasad *wymiarowania* niż *projektowania*, gdyż przy projektowaniu oprócz zasad wymiarowania niezbędna jest znajomość przepisów zwanych normami budowlanymi, które będą szczegółowo omawiane w przedmiotach konstrukcyjnych jak konstrukcje stalowe, betonowe, żelbetowe czy drewniane.

Będzie to raczej omówienie zasad *wymiarowania* niż *projektowania*, gdyż przy projektowaniu oprócz zasad wymiarowania niezbędna jest znajomość przepisów zwanych normami budowlanymi, które będą szczegółowo omawiane w przedmiotach konstrukcyjnych jak konstrukcje stalowe, betonowe, żelbetowe czy drewniane.

Zobaczymy później, w trakcie studiowania wymienionych przedmiotów konstrukcyjnych, że w wielu przypadkach, formuły czy zależności podane w normach, które są obowiązujące w procesie projektowania będą dość odległe od zasad wymiarowania podanych w tym jak i innych podręcznikach *wytrzymałości materiałów*. Przyczynę tego stanu można przede wszystkim upatrywać w tym, że *wytrzymałość materiałów* posługuje się w swych rozważaniach idealnym teoretycznym modelem materiału, konstrukcji, jak i schematach jej zniszczenia, normy zaś starają się ująć w globalny i uproszczony sposób najbardziej istotne mechaniczne aspekty zachowania się elementów konstrukcji. Stąd np. *wytrzymałość materiałów* zazwyczaj określa warunki dla naprężeń w punkcie a normy formułują warunki nośności dla przekroju. Niemniej jednak nie ma sprzeczności w tych dwóch podejściach i co więcej znajomość zasad wymiarowania jest niezbędna do zrozumienia i racjonalnego stosowania normowych zasad projektowania.

Jak już wcześniej powiedzieliśmy materiał, kształt i wymiary konstrukcji muszą być dobrane w taki sposób, aby była ona odpowiednio wytrzymała, sztywna i stateczna. Jeżeli konstrukcja

lub jej część przestaje przenosić obciążenie, do przeniesienia którego została przeznaczona lub też gdy nie odpowiada założonym warunkom użytkowania, mówimy, że znajduje się w stanie granicznym. Możemy wyróżnić dwa stany graniczne:

- stan graniczny nośności i
- stan graniczny użytkowania.

Stan graniczny nośności związany jest z wystąpieniem zniszczenia ciągłości materiału w punkcie lub obszarze, zmiany konstrukcji w mechanizm, uszkodzeniem spowodowanym zmęczeniem materiału, utratą stateczności przez część lub całą konstrukcję.

Stan graniczny użytkowania natomiast związany jest z wystąpieniem nadmiernych przemieszczeń, uszkodzeń związanych z korozją, nadmiernych drgań itp.

Warunki, które konstrukcja musi spełnić, wynikające z obu stanów granicznych formułowane będą w postaci nierówności, w których w stanie granicznym nośności będzie występować pewna graniczna wartość naprężeń, a w stanie granicznym użytkowania graniczna wartość przemieszczeń związana z warunkami użytkowania.

Te graniczne wartości naprężeń, wyznaczane na podstawie doświadczeń (np. próby rozciągania czy ściskania) i analizy probabilistycznej otrzymanych z nich wyników, gwarantują bezpieczny stan materiału w danym punkcie i nazywane są jego wytrzymałością charakterystyczną.

Ponieważ w procesie projektowania konstrukcji mogące wystąpić liczne czynniki przypadkowe, związane np. z niedokładnością danych o geometrii konstrukcji, jej obciążeniach czy błędach wykonania, do obliczeń przyjmowana jest wytrzymałość obliczeniowa, będąca ilorzem wytrzymałości charakterystycznej i współczynników materiałowych spełniających rolę współczynników bezpieczeństwa. W praktyce projektowej dowiemy się, że wytrzymałość obliczeniowa jest związana nie tylko z samym materiałem ale również z rodzajem konstrukcji. Polska Norma do obliczania i projektowania ogólnobudowlanych konstrukcji stalowych PN-90/B-03200 wyróżnia tylko jedną wytrzymałość obliczeniową stali oznaczaną przez f_d (modyfikowaną współczynnikami liczbowymi dla innych przypadków obciążenia), podczas gdy norma obowiązująca przy projektowaniu mostów PN-82/S-100052 wyróżnia wytrzymałość obliczeniową stali elementów konstrukcji mostowych pracujących na rozciąganie i ściskanie osiowe, rozciąganie przy zginaniu R , na ścinanie R_t , na docisk powierzchni przylegających R_d , na docisk powierzchni stycznych R_{dH} . W normach związanych z konstrukcjami betonowymi, żelbetowymi, drewnianymi i murowymi występują jeszcze inne wielkości.

Dlatego też w toku naszych dalszych rozważań, nie umniejszając zasadniczo ich ogólności, będziemy się posługiwać jedynie pojęciami wytrzymałości obliczeniowej przy ścisaniu R_c , przy rozciąganiu R_r i przy ścinaniu R_t . W przypadku materiału izonomicznego (np. stal) i naprężeń normalnych, używać będziemy jednej wytrzymałości obliczeniowej R .

W związku z powyższym warunki wymiarowania prętów osiowo rozciąganych będą miały postać:

- ze względu na stan graniczny nośności

$$\max \sigma_x = \max \frac{N}{A} \leq R_r$$

- ze względu na stan graniczny użytkowania

$$\max \Delta l = \max \frac{Nl}{EA} \leq \Delta l_{dop}.$$

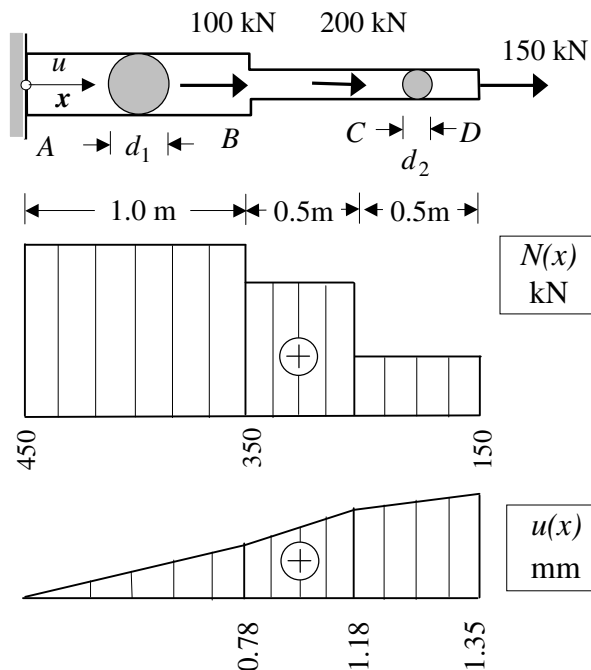
W przypadku prętów osiowo ścisanych w miejsce wytrzymałości obliczeniowej przy rozciąganiu R_t należy wstawić wytrzymałość obliczeniową przy ścisaniu R_c , przy czym musimy pamiętać, że pręt musi być w stanie równowagi statecznej i warunki jej zapewnienia będą sformułowane w toku dalszych wykładów.

9.8. Przykłady

Przykład 9.8.1. Wyznaczyć średnice kołowego stalowego pręta o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym obciążonym jak na rysunku jeśli wytrzymałość obliczeniowa stali $R = 165 \text{ MPa}$. Po określeniu wymiarów przekroju poprzecznego obliczyć przemieszczenia wzdłuż osi pręta $u(x)$ i zmianę średnicy w przekroju największej siły podłużnej, jeśli moduł Younga $E = 205 \text{ GPa}$, a liczba Poissona $\nu = 0.3$.

Rozwiązanie

Średnice wyznaczmy z warunku nośności i w pierw należy wyznaczyć siły osiowe w przecie. Jest to proste zadanie w analizowanym przykładzie i ich rozkład pokazany jest na rysunku.



Średnica na odcinku AB:

$$\frac{N_{AB}}{A_{AB}} \leq R \rightarrow A_{AB} \geq \frac{N_{AB}}{R}$$

$$\frac{\pi d_1^2}{4} \geq \frac{450 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6} \rightarrow d_1 \geq 5.89 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjęto do wykonania $d_1 = 6.0 \text{ cm}$.

Średnica na odcinku BD:

$$\max \frac{N_{BD}}{A_{BD}} \leq R \rightarrow A_{BD} \geq \frac{\max N_{BD}}{R}$$

$$\frac{\pi d_2^2}{4} \geq \frac{350 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6} \rightarrow d_2 \geq 5.20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjęto do wykonania $d_2 = 5.2 \text{ cm}$.

Przemieszczenia wzdłuż osi pręta (wydłużenia) $u(x)$:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx} \rightarrow du(x) = \varepsilon_x(x) dx \rightarrow u(x) = \int_0^x \varepsilon_x(x) dx \rightarrow u(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{EA} dx$$

gdy $N(x)$ jest stałe to $u(x) = \frac{N}{EA} x$ i wydłużenie jest liniową funkcją współrzędnej x .

Stąd w rozważanym przykładzie:

$$0 < x < 1.0 \text{ m}$$

$$u(x) = \frac{450 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \left(\frac{\pi 6^2}{4} \right) \cdot 10^{-4}} x = 0.78 \cdot 10^{-3} x$$

$$u(1) = \Delta l_{AB} = 0.78 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.78 \text{ mm} .$$

$$1.0 < x < 1.5 \text{ m}$$

$$u(x) = \Delta l_{AB} + \frac{350 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \left(\pi 5.2^2 / 4 \right) \cdot 10^{-4}} (x-1) = \Delta l_{AB} + 0.80 \cdot 10^{-3} (x-1)$$

$$u(1.5) = \Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = (0.78 + 0.40) \cdot 10^{-3} = 1.18 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.18 \text{ mm}$$

$$1.5 < x < 2.0 \text{ m}$$

$$u(x) = \Delta l_{AC} + \frac{150 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \left(\pi 5.2^2 / 4 \right) \cdot 10^{-4}} (x-1.5) = \Delta l_{AC} + 0.34 \cdot 10^{-3} (x-1.5)$$

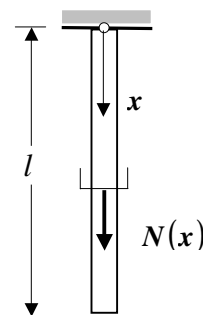
$$u(2.0) = \Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = (0.78 + 0.40 + 0.17) \cdot 10^{-3} = 1.35 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.35 \text{ mm} .$$

Zmiana wymiarów średnicy w miejscu największej siły podłużnej wynosi:

$$\Delta d_1 = -\nu \frac{N_{AB}}{E A_{AB}} d_1 = -0.3 \frac{450 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \left(\pi 6^2 / 4 \right) \cdot 10^{-4}} 6 \cdot 10^{-2} = -0.014 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -0.014 \text{ mm} .$$

Warto zwrócić uwagę jak małe są wielkości przemieszczeń i zmiany wymiarów w stosunku do początkowych wymiarów konstrukcji. Potwierdza to zasadność przyjęcia założenia zasady zeszytnienia jak i późniejsze założenia o małych odkształceniach.

Przykład 9.8.2. Pręt pryzmatyczny, jak na rysunku, obciążony jest tylko ciężarem własnym. Wyznaczyć $N(x)$, $\sigma_x(x)$ i $u(x)$ jeśli znane są jego: pole przekroju A , ciężar objętościowy γ , długość l oraz moduł sprężystości podłużnej E . Obliczyć długość zerwania jeśli wytrzymałość na rozciąganie wynosi R_m .



Rozwiązanie

Wyznaczenie sił podłużnych: $N(x) = A(l-x)\gamma$; $\max N(x) = N(0) = Al\gamma$

Siły podłużne zmieniają liniowo wzdłuż osi pręta i osiągają maksymalną wartość w utwierdzeniu.

Naprężenia normalne: $\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = (l-x)\gamma$; $\max \sigma_x = \sigma_x(0) = l\gamma$

Wartości naprężeń też zmieniają się liniowo wzdłuż osi pręta, osiągają maksymalną wartość w utwierdzeniu i ta maksymalna wartość nie zależy od pola przekroju poprzecznego pręta.

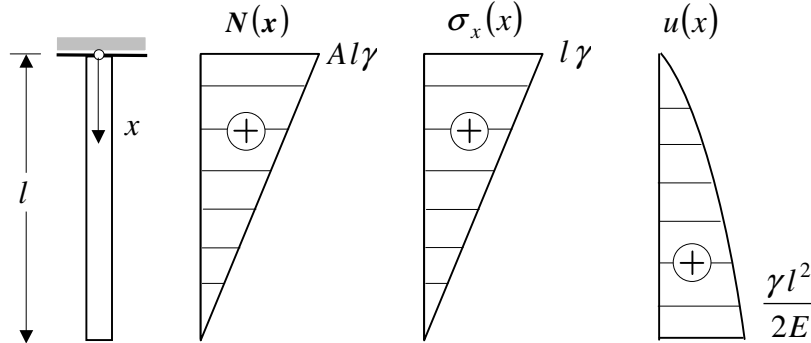
Przemieszczenia wzdłuż osi pręta (wydłużenia) $u(x)$:

$$\epsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx} \rightarrow du(x) = \epsilon_x(x)dx \rightarrow u(x) = \int_0^x \epsilon_x(x)dx$$

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sigma_x(x)}{E} dx = \int_0^x \frac{\gamma}{E} (l-x) dx = -\frac{\gamma}{2E} [(l-x)^2 - l^2] = \frac{\gamma}{2E} (2lx - x^2)$$

$$\max u = u(l) = \Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Przemieszczenia są kwadratową funkcją współrzędnej x i osiągają swą największą wartość na końcu pręta, przy czym wartość ta nie zależy od pola przekroju poprzecznego pręta. Wykresy poszukiwanych funkcji pokazują rysunek poniżej.



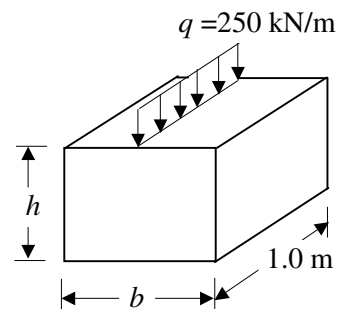
Długość zerwania l_R to długość pręta, obciążonego jedynie ciężarem własnym, przy której największe w nim naprężenia normalne będą równe wytrzymałości na rozciąganie (można powiedzieć: długość przy której zerwie się pod ciężarem własnym).

Zatem:

$$\max \sigma_x = R_m = l_R \gamma \rightarrow l_R = \frac{R_m}{\gamma}$$

Jak widać długość zerwania l_R jest stałą materiałową. Przykładowe wielkości długości zerwania: drewno sosnowe 13.5 km, stal niskowęglowa 4.8 km, stal wysokowęglowa 9.1 km, duraluminium 16.9 km.

Przykład 9.8.3. Na 1 m długości ławy fundamentowej o przekroju prostokątnym $b \times h$ wykonanej z betonu o ciężarze objętościowym $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$ przekazuje się równomiernie rozłożone obciążenie ze ściany $q = 250 \text{ kN/m}$. Wyznaczyć potrzebną szerokość fundamentu b jeśli jej wysokość $h = 1.5 \text{ m}$, a wytrzymałość obliczeniowa gruntu na ściskanie, na którym jest on posadowiony wynosi $R_{c,g} = 0.2 \text{ MPa}$



Rozwiązanie

Siła przekazywana z fundamentu na grunt wynosi:

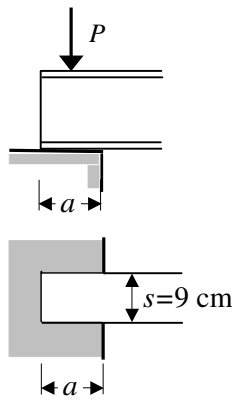
$$N = q * 1 + \gamma * h * b * 1$$

Z warunku nośności wynika:

$$\frac{N}{b * 1} \leq R_{c,g} \rightarrow \frac{q * 1 + \gamma * h * b * 1}{b * 1} \leq R_{c,g}$$

$$\frac{250 * 10^3 + 22 * 10^3 * 1.5 * b}{b} \leq 0.2 * 10^6 \rightarrow b \geq 1.5 \text{ m.}$$

Przykład 9.8.4. Nadproże wykonane z belki dwuteowej I 200 przekazuje na mur obciążenie w postaci siły $P = 60 \text{ kN}$. Obliczyć potrzebną długość oparcia belki przyjmując, że naprężenie obliczeniowe muru na ściskanie $R_{c,m} = 2.0 \text{ MPa}$.



Rozwiązanie

Z warunku nośności wynika:

$$\frac{P}{s * a} \leq R_{c,m} \rightarrow a \geq \frac{P}{s * R_{c,m}} \rightarrow a \geq \frac{60 * 10^3}{9 * 10^{-2} * 2 * 10^6} \rightarrow a \geq 33.3 * 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjęto do wykonania $a = 35 \text{ cm}$.

W dwóch ostatnich powyższych przykładach warto zauważyć jak schemat obliczeniowy (pręt pryzmatyczny osiowo obciążony) daleko odbiega od rzeczywistej konstrukcji.

Przykład 9.8.5. Wyznaczyć nacisk N na 1 m długości przyczółka mostu jaki wywiera płyta żelbetowa o grubości $h = 42 \text{ cm}$ przy wzroście temperatury $\Delta T = 25^\circ \text{ C}$ jeśli moduł sprężystości podłużnej betonu $E = 38.6 \text{ GPa}$ a współczynnik rozszerzalności liniowej

$\alpha_T = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. Płyta przylega ściśle do obu przyczółków.

Rozwiązanie

Wydłużenie rozpiętości płyty l w przypadku jej swobodnego podparcia byłoby równe $\Delta l = \alpha_T \Delta T l$.

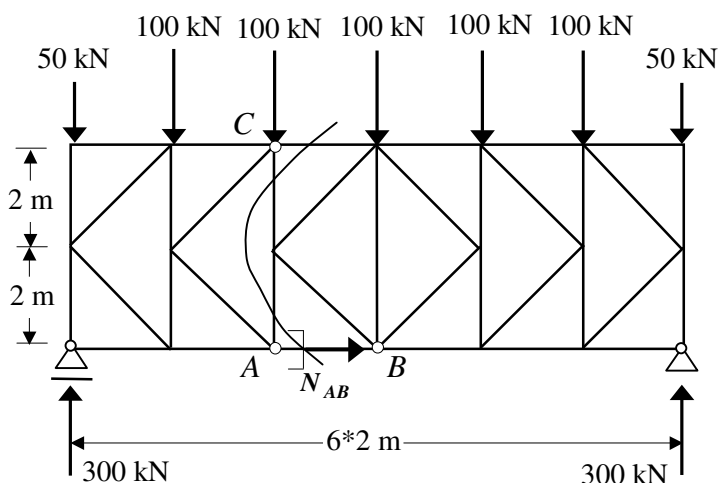
Skrócenie jej rozpiętości na skutek przyłożenia ściskającej siły wynosi $\Delta l = Nl/EA$.

Porównanie obu tych wielkości daje równość:

$$\alpha_T \Delta T l = \frac{Nl}{E * h * 1} \rightarrow N = \alpha_T \Delta T E h = 10^{-5} * 25 * 38.6 * 10^9 * 0.42 = 4.053 * 10^3 \text{ kN}$$

Widać z powyższego, że ta siła (a jest ona bardzo duża) nie zależy od rozpiętości płyty mostowej. Oczywiście szerokość potrzebnej szczeliny dylatacyjnej będzie od niej zależała.

Przykład 9.8.6. Dobrać potrzebny przekrój pręta AB w pasie dolnym podanej stalowej kratownicy, jeśli wytrzymałość obliczeniowa stali $R = 215 \text{ MPa}$. Przekrój pręta ma być złożony z dwóch kątowników równoramiennych. Po wyznaczeniu przekroju obliczyć nośność tego pręta.



Rozwiązanie

Siłę w pręcie AB wyznaczmy metodą Rittera. Warunek równowagi odciętej lewej części kratownicy daje:

$$\Sigma M_C^L = 0$$

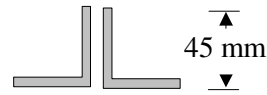
$$300 * 4 - 50 * 4 - 100 * 2 - N_{AB} * 4 = 0$$

$$N_{AB} = 200 \text{ kN (pręt jest rozciągany)}$$

Potrzebne pole przekroju poprzecznego wyznaczamy z warunku granicznego nośności:

$$\frac{N_{AB}}{A} \leq R \rightarrow A \geq \frac{N_{AB}}{R} \rightarrow A \geq \frac{200 \cdot 10^3}{215 \cdot 10^6} = 9.302 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 9.302 \text{ cm}^2.$$

Przyjęto z tablic profili walcowanych 2 L 45/45/6, których pole przekroju poprzecznego $A=10.2 \text{ cm}^2$ (najbliższe w tablicach ale większe od obliczonego).

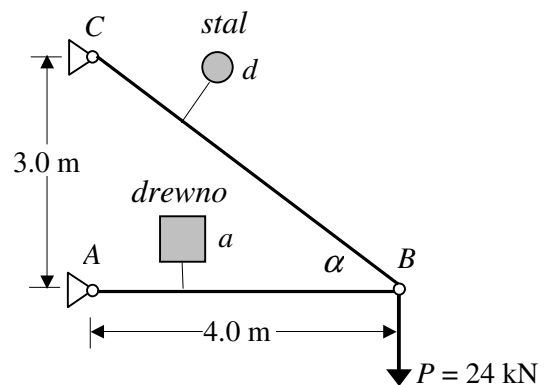


Przez nośność pręta rozumiemy największą siłę podłużną którą może przenieść bez utraty ciągłości.

Z warunku nośności otrzymujemy nośność pręta AB:

$$\frac{\max N_{AB}}{A} \leq R \rightarrow \max N_{AB} \leq A R \rightarrow \max N_{AB} \leq 10.2 \cdot 215 \cdot 10^2 = 219.3 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Przykład 9.8.7. Wyznaczyć potrzebne wymiary przekrojów poprzecznych prętów danego układu przegubowo-prętowego jeśli: wytrzymałość obliczeniowa stali $R = 165 \text{ MPa}$ i wytrzymałość obliczeniowa drewna przy ścisnieniu $R_{c,d} = 10 \text{ MPa}$. Po wyznaczeniu wymiarów określić położenie punktu B po deformacji, jeśli moduły sprężystości podłużnej stali i drewna wynoszą: $E_s = 205 \text{ GPa}$ i $E_d = 9 \text{ GPa}$.



Rozwiązanie

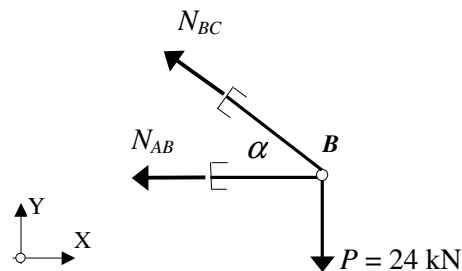
Siły w prętach wyznaczmy z warunków równowagi sił działających na węzeł B.

$$\sum X = 0; \quad -N_{BC} \cos \alpha - N_{AB} = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{BC} \sin \alpha - P = 0$$

$$N_{AB} = -32.0 \text{ kN (pręt ścisnany)}$$

$$N_{BC} = 40.0 \text{ kN (pręt rozciągany)}$$



Wymiary przekrojów poprzecznych prętów wyznaczmy z warunku granicznego nośności.

Pręt AB – drewniany; ścisnany:

$$\frac{|N_{AB}|}{A_{AB}} \leq R_{c,d} \rightarrow A_{AB} \geq \frac{|N_{AB}|}{R_{c,d}} \rightarrow a^2 \geq \frac{32 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}$$

$$a \geq 5.66 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjęto do wykonania $a = 6.0 \text{ cm}$.

Skrócenie pręta AB

Pręt BC – stalowy; rozciągany:

$$\frac{N_{BC}}{A_{BC}} \leq R_s \rightarrow A_{BC} \geq \frac{N_{BC}}{R_s} \rightarrow \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{40 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6}$$

$$d \geq 1.76 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjęto do wykonania $d = 1.8 \text{ cm}$.

Wydłużenie pręta BC

$$\Delta l_{AB} = \frac{|N_{AB}| l_{AB}}{E_d A_{AB}} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 4}{9 \cdot 10^9 \cdot 36 \cdot 10^{-4}} = 0.395 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

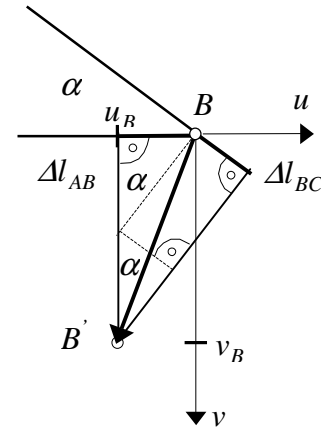
$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{E_s A_{BC}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5}{205 \cdot 10^9 \cdot (\pi \cdot 1.8^2 / 4) \cdot 10^{-4}} = 0.383 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Ze względu na bardzo małe skrócenie i wydłużenie prętów, położenia punktu B po deformacji poszukiwać będziemy na prostych prostopadłych do pierwotnych kierunków prętów, tak jak to jest pokazane na rysunku obok, nazywanym planem przemieszczeń. W przyjętym układzie odniesienia współrzędne wektora przemieszczenia $\overline{BB'}$ (u_B, v_B) mają wartości:

$$u_B = -\Delta l_{AB} = -0.395 \text{ cm}$$

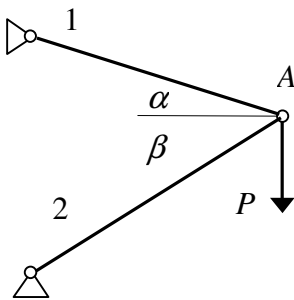
$$v_B = \Delta l_{AB} \operatorname{ctg} \alpha + \Delta l_{BC} / \sin \alpha = 0.395 \frac{4}{3} + 0.383 / 0.6 = 1.165 \text{ cm}$$

Przerywane linie na planie przemieszczeń wyjaśniają, w jaki sposób wyliczono v_B .



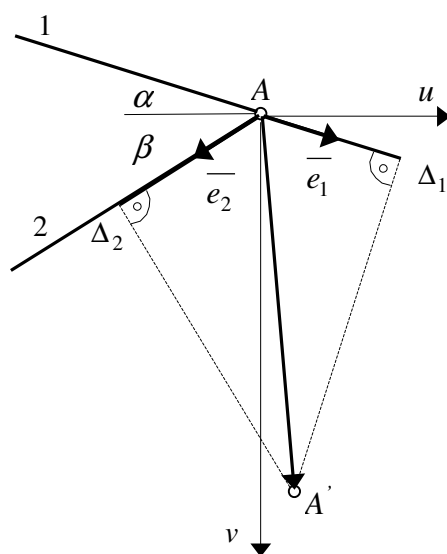
Przykład 9.8.8.

Wyznaczyć współrzędne wektora przemieszczenia punktu przyłożenia siły podanego układu przegubowo-prętowego.



Rozwiązanie

Przyjmijmy, że znane są wartości siły, wielkości określające geometrię układu i moduł Younga co pozwala wyliczyć siły w prętach układu i wielkości wydłużenia i skrócenia odpowiednich prętów Δ_1 i Δ_2 . Przy dowolnej geometrii układu kłopotliwe jest po narysowaniu planu przemieszczeń wyznaczenie współrzędnych wektora przemieszczenia punktu przyłożenia siły $\overline{AA'}$ (u_A, v_A). Łatwo można to zrobić postępując w pokazany niżej sposób.



W rozważanym punkcie przyjmijmy układ odniesienia (u, v) w którym chcemy wyznaczyć współrzędne wektora przemieszczenia. Współrzędne wersorów kierunkowych prętów w przyjętym układzie wynoszą odpowiednio: $\overline{e_1}$ ($\cos \alpha, \sin \alpha$) oraz $\overline{e_2}$ ($-\cos \beta, \sin \beta$) i ich wyznaczenie jest proste przy znanej geometrii układu.

Korzystając z własności iloczynu skalarnego wektorów możemy napisać układ równań:

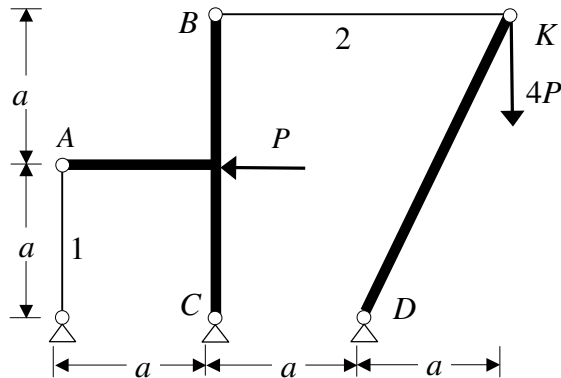
$$\begin{cases} \overline{AA'} \cdot \overline{e_1} = \Delta_1 \\ \overline{AA'} \cdot \overline{e_2} = \Delta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_A \cos \alpha + v_A \sin \alpha = \Delta_1 \\ u_A (-\cos \beta) + v_A \sin \beta = \Delta_2 \end{cases}$$

z którego nie jest trudno wyliczyć obie poszukiwane współrzędne u_A oraz v_A .

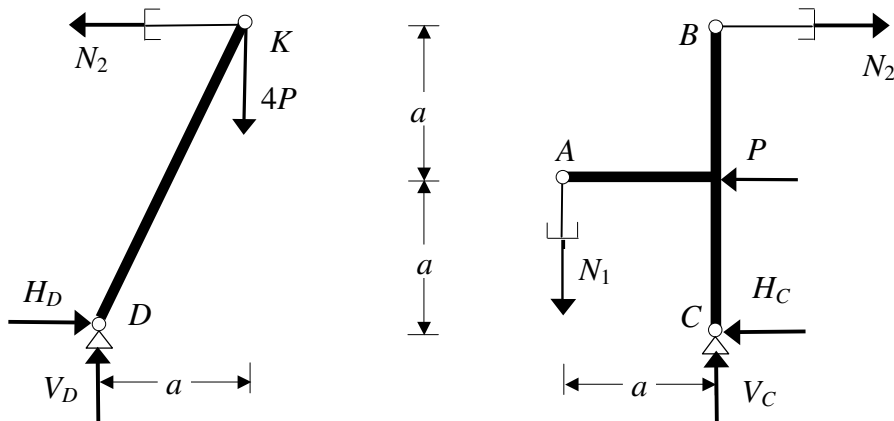
W omawianym przykładzie przyjmują one wartości:

$$u_A = \frac{\Delta_1 \sin \beta - \Delta_2 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}; \quad v_A = \frac{\Delta_1 \cos \beta + \Delta_2 \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}.$$

Przykład 9.8.9. Wyznaczyć siły w odkształcalnych prętach układu statycznie wyznaczalnego i współrzędne wektora przemieszczenia punktu K . Dane są wartości obciążeń, moduły sprężystości i wymiary układu. Nieodkształcalne pręty układu narysowane zostały grubymi liniami.



W celu wyznaczenia sił w odkształcalnych prętach dokonujemy podziału konstrukcji, a następnie rozpatrujemy warunki równowagi odciętych części.



$$\Sigma M_D = 0 \rightarrow N_2 * 2a - 4P * a = 0$$

$$N_2 = 2P$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow N_1 * a - N_2 * 2a + P * a = 0$$

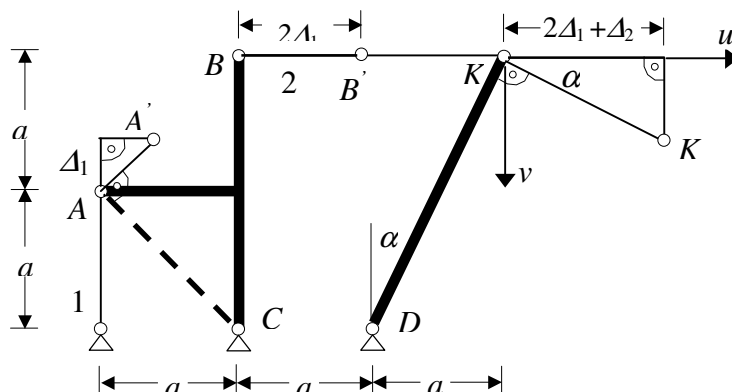
$$N_1 = 3P$$

Znajomość sił w prętach 1 oraz 2 pozwala wyznaczyć ich wydłużenia:

$$\Delta_1 = \frac{3Pa}{E_1 A_1} \quad \text{oraz} \quad \Delta_2 = \frac{4Pa}{E_2 A_2}.$$

Przemieszczenie punktu K będzie zależało od przemieszczenia punktu B spowodowanego wydłużeniem pręta 1 oraz wydłużenia pręta 2.

Plan przemieszczeń pokazuje rysunek niżej.



Położenia punktu A po deformacji poszukujemy na prostopadłej do pierwotnego kierunku pręta 1 i prostopadłej do kierunku odcinka AC , który jest nieodkształcalny. Podobnie postępujemy w punkcie K .

Współrzędne przemieszczenia wektora punktu K wynoszą:

$$u_K = 2\Delta_1 + \Delta_2 \quad \text{i} \quad v_K = (2\Delta_1 + \Delta_2) \operatorname{tg} \alpha$$

gdzie: $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$.

Przykład 9.8.10. Pręt BC (na odcinku $B1$ – drewniany na odcinku IC – stalowy), potrzymuje sztywną ramę AD konstrukcji prętowej o geometrii i obciążeniu jak na rys. Wyznaczyć wymiar a pręta BC z warunku nośności, jeśli: wytrzymałość obliczeniowa na rozciąganie stali

$R_s = 215 \text{ MPa}$, drewna $R_d = 8 \text{ MPa}$, i

warunku użytkowania żądającym aby pionowe przemieszczenie punktu D - v_D nie przekraczało 1 cm . Moduł sprężystości wynoszą: stali $E_s = 205 \text{ GPa}$, drewna

$E_d = 9 \text{ GPa}$.

Rozwiązanie

Obliczenie sił osiowych w pręcie BC .

Siłę na odcinku $B1$ wyznaczmy z warunku zerowania się momentów względem punktu A wszystkich sił działających na odciętej części konstrukcji (rys. obok)

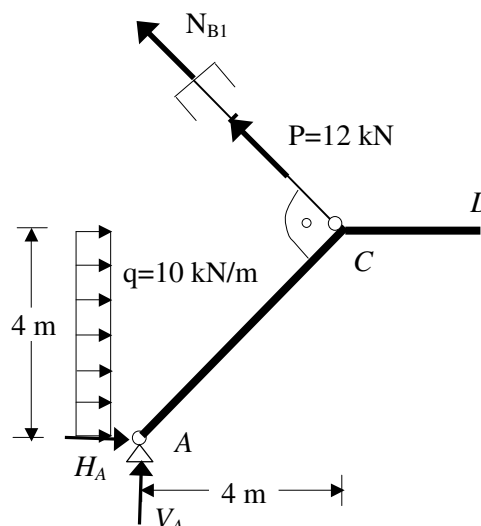
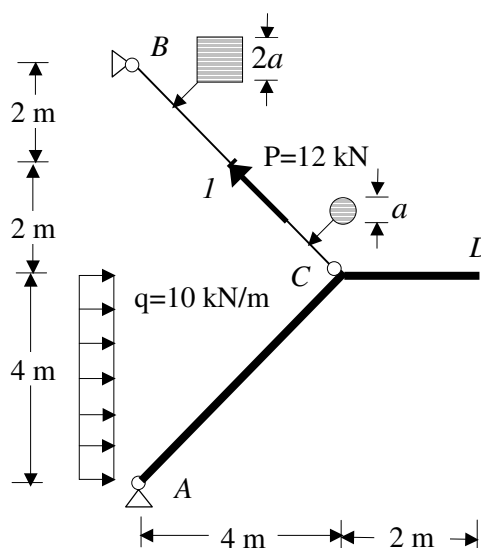
$$\sum M_A = 0,$$

$$N_{B1} * 4\sqrt{2} + 12 * 4\sqrt{2} - 10 * 4 * 2 = 0,$$

$$N_{B1} = 2.142 \text{ kN}.$$

Siła na odcinku IC jest równa:

$$N_{IC} = N_{B1} + P = 2.142 + 12.00 = 14.142 \text{ kN}.$$



Wyznaczenie wymiaru a z warunku nośności:

pręt stalowy:

$$\frac{N_{1C}}{\pi a^2/4} \leq R_s \rightarrow \frac{\pi a^2}{4} \geq \frac{14.142 \cdot 10^3}{215 \cdot 10^6} \rightarrow a \geq 0.915 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

pręt drewniany:

$$\frac{N_{B1}}{4a^2} \leq R_d \rightarrow 4a^2 \geq \frac{2.142 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} \rightarrow a \geq 0.818 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Wyznaczenie wymiaru a przekroju pręta z warunku użytkowania.

Pionowe przemieszczenie punktu D , które wynosi (patrz rys. obok)

$$v_D = DD' \cos \beta$$

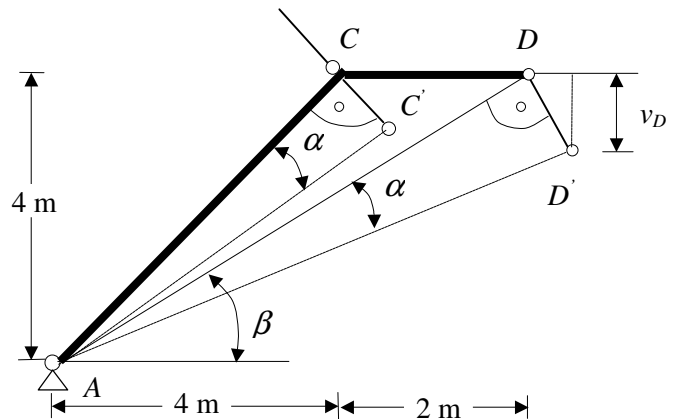
potrzebujemy wyrazić poprzez wydłużenie pręta BC .

Z planu przemieszczeń pokazanego obok odczytujemy,

$$\cos \beta = 6 / \sqrt{4^2 + 6^2} = 0.832,$$

$$DD' = \sqrt{4^2 + 6^2} \operatorname{tg} \alpha = 7.211 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 4\sqrt{2} CC'$$



Wydłużenie pręta BC :

$$\begin{aligned} \Delta l_{BC} = CC' &= \Delta l_{B1} + \Delta l_{1C} = \frac{N_{B1} l_{B1}}{E_d \cdot A_{B1}} + \frac{N_{1C} l_{1C}}{E_s \cdot A_{1C}} = \frac{2.142 \cdot 2\sqrt{2}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4a^2} + \frac{14.142 \cdot 2\sqrt{2}}{205 \cdot 10^9 \cdot \pi a^2/4} = \\ &= 0.417 \cdot 10^{-9} a^{-2} \end{aligned}$$

Pionowe przemieszczenie punktu D :

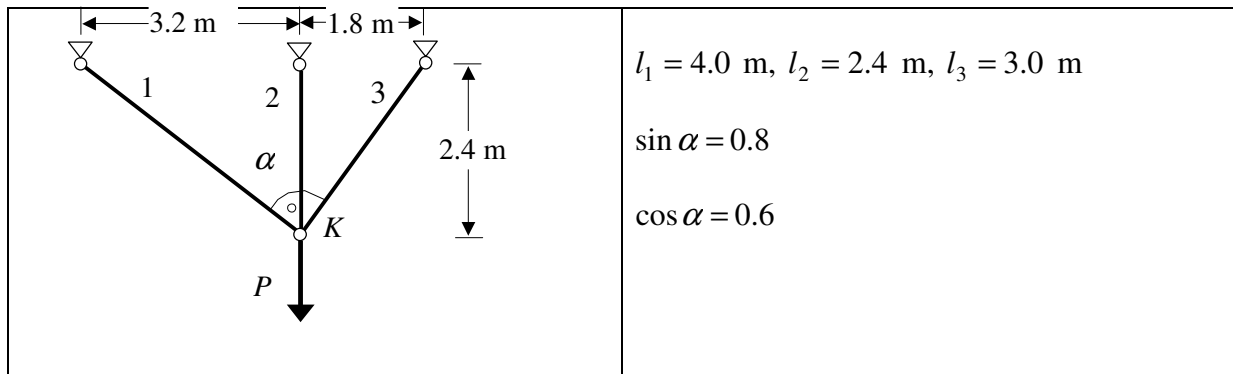
$$v_D = DD' \cos \beta = 33.938 \cdot CC' = 14.152 \cdot 10^{-9} a^{-2},$$

stąd warunek użytkowania daje:

$$14.152 \cdot 10^{-9} a^{-2} \leq 1 \cdot 10^{-2} \rightarrow a \geq 1.189 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Jak widać z obliczeń o wielkości a decyduje w tym przypadku stan graniczny użytkowania i ostatecznie przyjęto do wykonania $a = 1.20 \text{ cm}$.

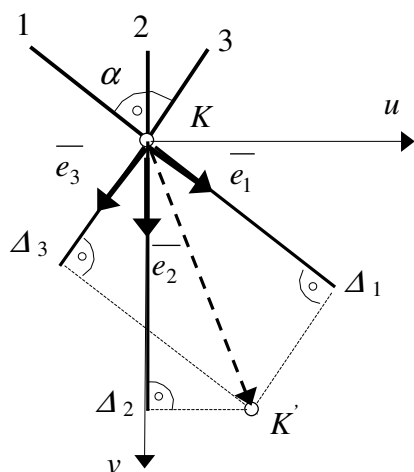
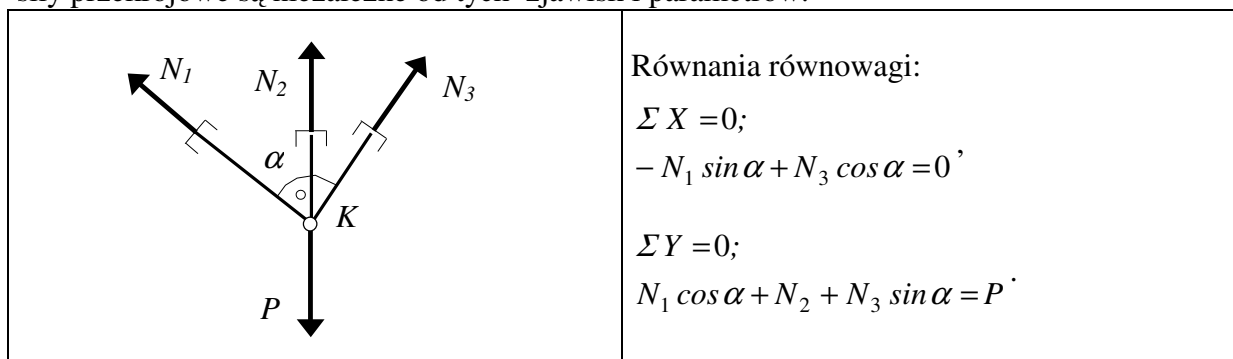
Przykład 9.8.11. Wyznaczyć siły w prętach układu pokazanego na rysunku, obciążonego siłą $P = 48 \text{ kN}$ jeśli przekroje wszystkich prętów są jednakowe o polu $A = 2 \text{ cm}^2$. Określić położenie punktu przyłożenia siły po deformacji jeśli moduł Younga materiału prętów $E = 205 \text{ GPa}$.



Rozwiązanie

Konstrukcja jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Widać to wyraźnie po wycięciu węzła K , na który, oprócz siły zewnętrznej P , oddziałują trzy niewiadome siły osiowe z prętów, a ponieważ tworzą one układ sił zbieżnych, to istnieją jedynie dwa niezależne warunki równowagi. W przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, aby wyznaczyć siły przekrojowe lub reakcje oprócz równań równowagi musimy sformułować równania geometryczne wynikające z kinematycznych warunków brzegowych (sposobu podparcia lub wzajemnych połączeń elementów konstrukcji). Liczba niezależnych równań geometrycznych jest równa „krotności” statycznej niewyznaczalności układu. Tak więc komplet równań, który pozwala na wyznaczenie sił przekrojowych, składa się z równań równowagi i równań geometrycznych.

W tym miejscu należy powiedzieć jeszcze o innej ważnej różnicy między układami statycznie niewyznaczalnymi i wyznaczalnymi. Rzecz w tym, że na wielkości sił przekrojowych w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych mają wpływ: zmiany temperatury, błędy montażowe, osiadanie podpór, charakterystyki geometryczne przekrojów (pole przekroju, momenty bezwładności) jak i stałe materiałowe. W konstrukcjach statycznie wyznaczalnych siły przekrojowe są niezależne od tych zjawisk i parametrów.



Warunek geometryczny w rozważanym układzie wynika z połączenia trzech prętów w węzle K . Wydłużenia prętów muszą być takie, aby po deformacji końce prętów schodziły się w jednym punkcie. Narysowany obok plan przemieszczeń stanowi podstawę do sformułowania równania geometrycznego, a dokładniej mówiąc równania nierozdzielności przemieszczeń. Przy wyznaczeniu tego równania zastosujemy wcześniej opisaną metodę, wykorzystując iloczyny skalarne wektora przemieszczenia $\vec{K K'}$ (u_K, v_K) i wersorów

kierunkowych prętów układu $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

I tak, współrzędne wektorów w przyjętym układzie osi (u, v) są: $\overline{e_1}(\sin \alpha, \cos \alpha)$, $\overline{e_2}(0, 1)$, $\overline{e_3}(-\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Układ równań, z którego dla dowolnej geometrii układu łatwo możemy wyznaczyć równanie nierozdzielności przemieszczeń ma postać:

$$\begin{cases} \overline{K K'} \cdot \overline{e_1} = \Delta_1 \\ \overline{K K'} \cdot \overline{e_2} = \Delta_2 \\ \overline{K K'} \cdot \overline{e_3} = \Delta_3 \end{cases}$$

Z takiego układu zawsze można uzyskać równanie wiążące wydłużenia prętów.

Podstawienie danych z rozważanego przykładu daje układ:

$$\begin{cases} u_K \sin \alpha + v_K \cos \alpha = \Delta_1 \\ v_K = \Delta_2 \\ -u_K \cos \alpha + v_K \sin \alpha = \Delta_3 \end{cases}$$

z którego otrzymujemy równanie geometryczne w postaci:

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha + \Delta_3 \sin \alpha.$$

Ostatecznie komplet równań do wyznaczenia sił przekrojowych przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} -N_1 \sin \alpha + N_3 \cos \alpha = 0 \\ N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \sin \alpha = P \\ \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{N_1 l_1}{EA} \cos \alpha + \frac{N_3 l_3}{EA} \sin \alpha \end{cases}$$

W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy: $N_1 = 12.0$ kN, $N_2 = 28.0$ kN, $N_3 = 16.0$ kN.

Wydłużenia prętów wynoszą:

$$\Delta_1 = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 4}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 1.171 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \Delta_2 = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 2.4}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 1.639 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$\Delta_3 = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 3}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 1.171 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

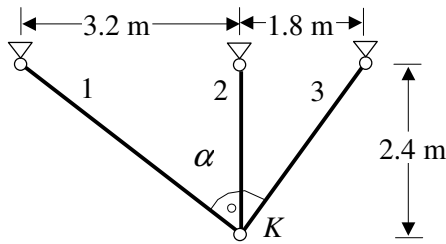
Współrzędne wektora przemieszczenia punktu K , wyznaczone z układu równań:

$$\begin{cases} u_K \sin \alpha + v_K \cos \alpha = \Delta_1 \\ v_K = \Delta_2 \end{cases},$$

są równe: $u_K = 0.234$ mm, $v_K = 1.639$ mm.

Przykład 9.8.12. Wyznaczyć siły w prętach podanego układu przy wzroście temperatury $\Delta T = 30^\circ$ C, jeśli: moduł sprężystości podłużnej stali $E = 205$ GPa a współczynnik

rozszerzalności liniowej $\varepsilon_T = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, przekroje poprzeczne wszystkich prętów są jednakowe o polu $A = 2 \text{ cm}^2$.



$$l_1 = 4.0 \text{ m}, \quad l_2 = 2.4 \text{ m}, \quad l_3 = 3.0 \text{ m},$$

$$\sin \alpha = 0.8$$

$$\cos \alpha = 0.6$$

Rozwiązanie

Konstrukcja jest statycznie niewyznaczalna. więc zmiana warunków jej pracy w postaci zmiany temperatury czy przemieszczania się podpór skutkuje powstawaniem w niej sił przekrojowych, w tym przypadku będą to siły podłużne.

W równaniach równowagi nie wystąpią zewnętrzne siły obciążające, we wzorach na wydłużenia prętów dojdą człony związane ze wzrostem temperatury.

	<p>Równania równowagi:</p> $\sum X = 0$ $-N_1 \sin \alpha + N_3 \cos \alpha = 0$ $\sum Y = 0$ $N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \sin \alpha = 0$
--	---

Warunek geometryczny jest taki sam jak w przykładzie 9.8.11 bo geometria układu jest identyczna.

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha + \Delta_3 \sin \alpha,$$

ale zmieniają się wzory określające zmianę długości prętów, gdyż pojawią się człony związane ze zmianą temperatury:

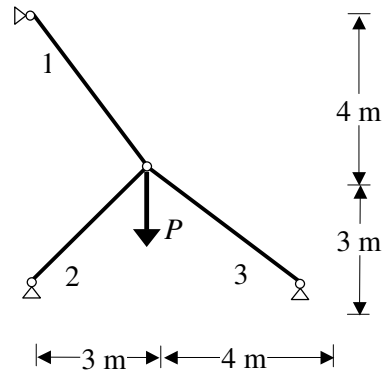
$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} + \varepsilon_T \Delta T l_1, \quad \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} + \varepsilon_T \Delta T l_2, \quad \Delta_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} + \varepsilon_T \Delta T l_3,$$

i komplet równań do wyznaczenia sił osiowych w prętach ma postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} -N_1 \sin \alpha + N_3 \cos \alpha = 0 \\ N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \sin \alpha = 0 \\ \frac{N_2 l_2}{EA} + \varepsilon_T \Delta T l_2 = \left(\frac{N_1 l_1}{EA} + \varepsilon_T \Delta T l_1 \right) \cos \alpha + \left(\frac{N_3 l_3}{EA} + \varepsilon_T \Delta T l_3 \right) \sin \alpha \end{array} \right.$$

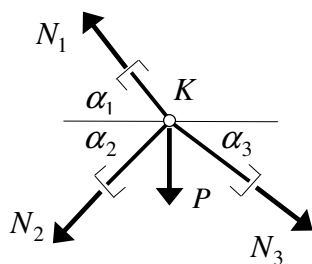
W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy: $N_1 = -7.38 \text{ kN}$, $N_2 = 12.30 \text{ kN}$, $N_3 = -9.84 \text{ kN}$.

Przykład 9.8.13. Wyznaczyć siły w prętach układu pokazanego na rysunku, obciążonego siłą $P = 60 \text{ kN}$ jeśli wszystkie pręty mają jednakowe przekroje poprzeczne i jednakowe są ich moduły Younga.



Rozwiązanie

Konstrukcja jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna.



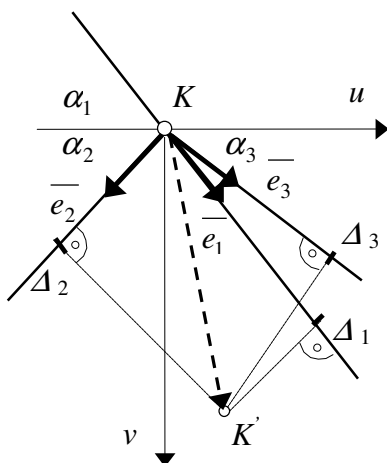
Równania równowagi:

$$\Sigma X = 0;$$

$$-N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 = 0'$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 - N_3 \sin \alpha_3 = P'$$



Równanie nierozdzielności przemieszczeń napiszemy na podstawie przyjętego (narysowanego obok) planu przemieszczeń. Wektor przemieszczenia liniowego węzła w którym przyłożona jest siła, w przyjętym układzie odniesienia (u, v) , ma współrzędne $\overline{K K'}$ (u_K, v_K) . Wersory kierunkowe osi prętów mają współrzędne: $\overline{e_1}(\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$, $\overline{e_2}(-\cos \alpha_2, \sin \alpha_2)$, $\overline{e_3}(\cos \alpha_3, \sin \alpha_3)$.

Z geometrii konstrukcji bez trudu wyznaczamy:

$$\cos \alpha_1 = 0.600, \sin \alpha_1 = 0.800, \cos \alpha_2 = \sin \alpha_2 = 0.707, \cos \alpha_3 = 0.800, \sin \alpha_3 = 0.600.$$

Układ równań, z którego możemy wyznaczyć równanie nierozdzielności przemieszczeń ma postać:

$$\begin{cases} \overline{K K'} \cdot \overline{e_1} = |\Delta_1| \\ \overline{K K'} \cdot \overline{e_2} = |\Delta_2| \\ \overline{K K'} \cdot \overline{e_3} = |\Delta_3| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha_1 * u_K + \sin \alpha_1 * v_K = |\Delta_1| \\ -\cos \alpha_2 * u_K + \sin \alpha_2 * v_K = |\Delta_2| \\ \cos \alpha_3 * u_K + \sin \alpha_3 * v_K = |\Delta_3| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0.600 * u_K + 0.800 * v_K = |\Delta_1| \\ -0.707 * u_K + 0.707 * v_K = |\Delta_2| \\ 0.800 * u_K + 0.600 * v_K = |\Delta_3| \end{cases}$$

W równaniach występują bezwzględne wartości zmian długości prętów, bo plan przemieszczeń zakłada również skrócenie niektórych prętów.

Z tego układu wyznaczamy poszukiwane równanie geometryczne:

$5.000 * |\Delta_1| - 5.000 * |\Delta_3| = 1.414 * |\Delta_2|$, ale plan przemieszczeń zakłada wydłużenie pręta 1 i skrócenie prętów 2 i 3, więc $\Delta_2 < 0$ oraz $\Delta_3 < 0$, zatem $|\Delta_2| = -\Delta_2$ i $|\Delta_3| = -\Delta_3$, i ostatecznie równanie geometryczne ma postać:

$$5.000 * \Delta_1 + 5.000 * \Delta_3 = -1.414 * \Delta_2.$$

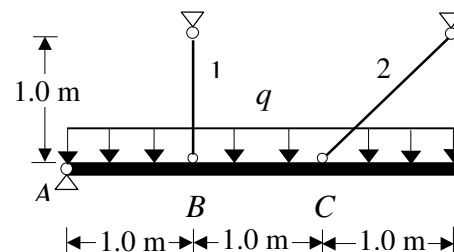
Uwzględniając, że sztywność na rozciąganie EA wszystkich prętów jest jednakowa, komplet równań do wyznaczenia sił w prętach podanego układu jest następujący:

$$\begin{cases} -0.600N_1 - 0.707N_2 + 0.800N_3 = 0 \\ 0.800N_1 - 0.707N_2 - 0.600N_3 = 60 \\ 5.000N_1 * 5 + 5.000N_2 * 5 = -1.414N_2 * \sqrt{2} * 3 \end{cases}$$

W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy:

$$N_1 = 26.353 \text{ kN}, N_2 = -41.034 \text{ kN}, N_3 = -16.505 \text{ kN}.$$

Przykład 9.8.14. Wyznaczyć potrzebną średnicę stalowych odkształcalnych prętów układu obciążonego jak na rys., jeśli: $q=50 \text{ kN/m}$, $A_1 = 2A_2$, $E_1 = E_2 = E$, $R = 165 \text{ MPa}$. Narysowany pogrubioną linią pręt ABC jest nieodkształcalny.



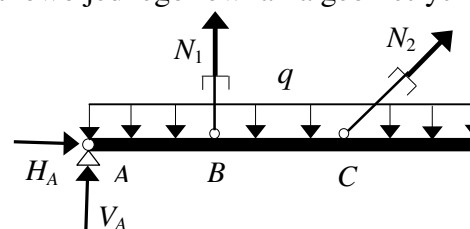
Rozwiązanie

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Aby wyznaczyć siły przekrojowe oprócz jednego równania równowagi potrzebujemy dodatkowo jednego równania geometrycznego.

Równanie równowagi:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$N_1 * 1 + N_2 * \frac{2}{\sqrt{2}} - q * 3 * 1.5 = 0$$



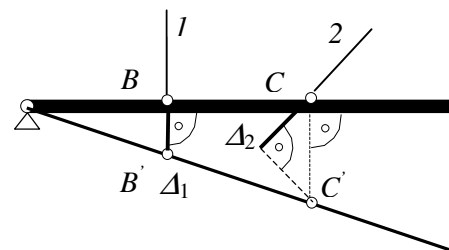
Poziomy pręt jest nieodkształcalny, i może się obracać tylko względem punktu A.

Pamiętając o tym, że położenia punktów po deformacji poszukiwać będziemy na prostopadłych do pierwotnych kierunków prętów, możemy napisać poniższe równanie geometryczne:

$$\frac{BB'}{1} = \frac{CC'}{2}, \text{ ale } BB' = \Delta_1; CC' = \sqrt{2} \Delta_2$$

stąd:

$$2\Delta_1 = \sqrt{2} \Delta_2$$



Podstawiając za $\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E A_1}$ oraz $\Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E A_2}$ wraz z zależnościami między długościami prętów ich przekrojami i modułami Younga do równania geometrycznego otrzymujemy:

$$N_1 = 2N_2.$$

Komplet równań z którego możemy wyznaczyć siły w prętach ma postać:

$$\begin{cases} N_1 + \frac{2}{\sqrt{2}} N_2 = 4.5q \\ N_1 = 2N_2 \end{cases} \text{ a jego rozwiązanie daje: } N_1 = 131.80 \text{ kN, } N_2 = 65.90 \text{ kN.}$$

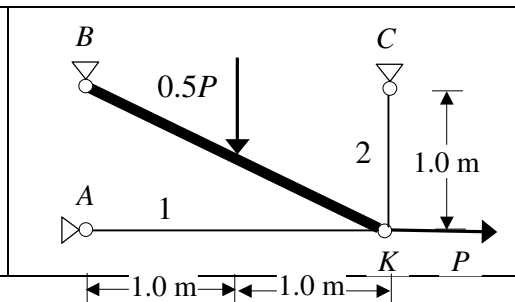
Potrzebne średnice prętów wyznaczmy z warunku nośności:

$$\text{Pręt 1: } \frac{N_1}{A_1} \leq R \rightarrow \frac{\pi d_1^2}{4} \geq \frac{131.80 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6} \rightarrow d_1 \geq 3.189 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\text{Pręt 2: } \frac{N_2}{A_2} \leq R \rightarrow \frac{\pi d_2^2}{4} \geq \frac{65.90 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6} \rightarrow d_2 \geq 2.255 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Ponieważ siły w prętach zostały wyznaczone przy założonych proporcjach $A_1 = 2A_2$ więc średnice prętów związane są zależnością $d_1 = \sqrt{2} d_2$ i do wykonania przyjęto $d_1 = 3.20 \text{ cm}$ a $d_2 = 2.26 \text{ cm}$.]

Przykład 9.8.15. Wyznaczyć naprężenia i zmiany długości odkształcalnych prętów układu prętowego obciążonego jak na rysunku, jeśli siła $P = 100 \text{ kN}$, pola przekrojów poprzecznych prętów $A_1 = 4 \text{ cm}^2$, $A_2 = 2 \text{ cm}^2$, moduł sprężystości podłużnej $E_1 = E_2 = 205 \text{ GPa}$.



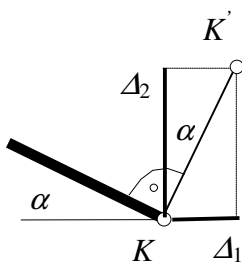
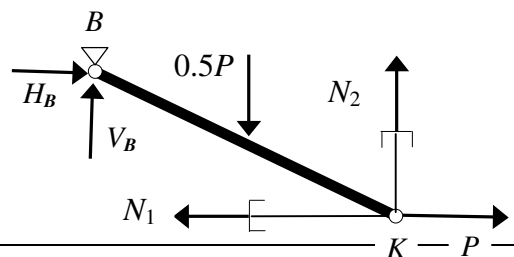
Rozwiązanie

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Równanie równowagi:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$N_1 \cdot 1 - N_2 \cdot 2 - P \cdot 1 + \frac{P}{2} \cdot 1 = 0$$



Na podstawie założonego planu przemieszczeń możemy napisać równanie geometryczne, dokładniej równanie nierozdzielności przemieszczeń. W tym przypadku ma ono postać:

$$|\Delta_1| = |\Delta_2| \tan \alpha$$

Plan przemieszczeń zakłada wydłużenie pręta 1 i skrócenie pręta 2, zatem $\Delta_1 > 0$, a $\Delta_2 < 0$ stąd $|\Delta_1| = \Delta_1$ i $|\Delta_2| = -\Delta_2$, a ponieważ $\tan \alpha = 0.5$ równanie geometryczne przyjmuje formę:

$$2\Delta_1 = -\Delta_2$$

Zmiany długości prętów wynoszą:

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}.$$

Komplet równań do wyznaczenia sił osiowych w odkształcalnych prętach układu:

$$\begin{cases} N_1 - 2N_2 = 50 \cdot 10^3 \\ \frac{4N_1}{205 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -\frac{N_2}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \end{cases} \rightarrow N_1 = 10.0 \text{ kN}; \quad N_2 = -20.0 \text{ kN}.$$

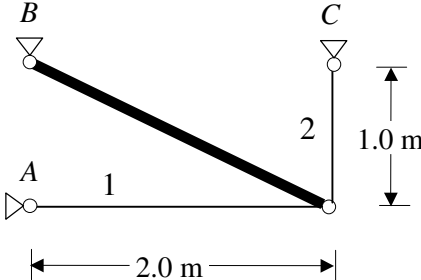
Naprężenie normalne w przekroju poprzecznym prętów i zmiany ich długości wynoszą:

w pręcie 1- rozciągany; $\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 25.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 25.0 \text{ MPa}$

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2}{205 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0.244 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.244 \text{ mm}.$$

w pręcie 2- ścispany; $\sigma = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -100.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -100.0 \text{ MPa}$

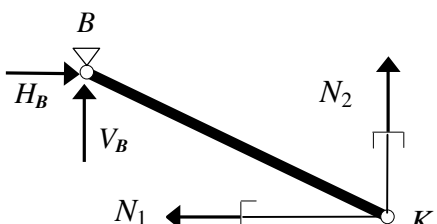
$$\Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{-20 \cdot 10^3 \cdot 1}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -0.488 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -0.488 \text{ mm}.$$

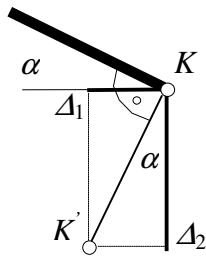
<p>Przykład 9.8.16. Wyznaczyć siły w odkształcalnych prętach układu jak na rysunku, spowodowane wzrostem temperatury $\Delta T = 45^\circ\text{C}$, jeśli współczynnik rozszerzalności cieplnej liniowej $\varepsilon_T = 12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$, pola przekrojów poprzecznych prętów $A_1 = A_2 = 2 \text{ cm}^2$, moduł sprężystości podłużnej $E_1 = E_2 = 205 \text{ GPa}$.</p>	
--	--

Rozwiązanie

Konstrukcja jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna.

W równaniach równowagi nie wystąpią zewnętrzne siły obciążające, we wzorach określających zmianę długości prętów dojdą człony związane ze wzrostem temperatury.

<p>Równanie równowagi:</p> $\Sigma M_B = 0$ $N_1 \cdot 1 - N_2 \cdot 2 = 0$	
---	--



Równanie nierozdzielności przemieszczeń :

$$|\Delta_1| = |\Delta_2| \operatorname{tg} \alpha,$$

ale $\Delta_1 < 0$, a $\Delta_2 > 0$ stąd $|\Delta_1| = -\Delta_1$ i $|\Delta_2| = \Delta_2$,
więc równanie geometryczne przyjmuje formę:

$$\Delta_2 = -2 \Delta_1$$

Zmiany długości prętów wynoszą:

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \varepsilon_T \Delta T l_1, \quad \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \varepsilon_T \Delta T l_2 .$$

Komplet równań do wyznaczenia sił osiowych w odkształcalnych prętach układu:

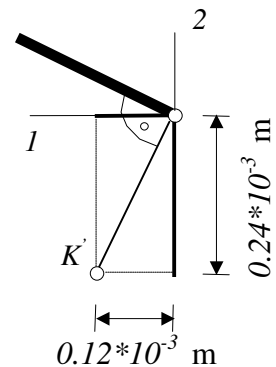
$$\begin{cases} N_1 - 2N_2 = 0 \\ \frac{N_2}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 1 = -2 \left(\frac{2N_1}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 2 \right) \end{cases} \rightarrow$$

$$N_1 = -24600 \text{ kN}; \quad N_2 = -12300 \text{ kN}.$$

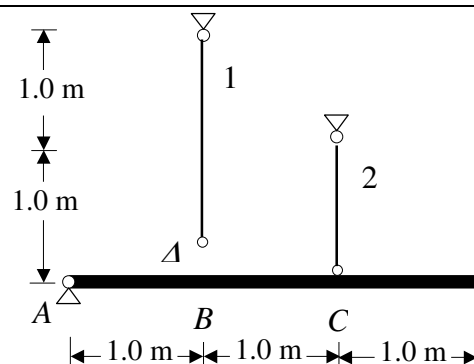
Naszkicujmy położenie punktu K po deformacji konstrukcji.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{N_1 l_1}{E A_1} + \varepsilon_T \Delta T l_1 = \frac{-24600 \cdot 2}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 2 = \\ &= (-1.20 + 1.08) \cdot 10^{-3} = -0.12 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{N_2 l_2}{E A_2} + \varepsilon_T \Delta T l_2 = \frac{-12300 \cdot 1}{205 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 1 = \\ &= (-0.30 + 0.54) \cdot 10^{-3} = 0.24 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \end{aligned}$$



Przykład 9.8.17. Wyznaczyć siły w odkształcalnych prętach układu, które powstały w wyniku błędu montażowego. Pręt 1 wykonany został za krótki o $\Delta = 2$ mm. Średnice prętów wynoszą odpowiednio: $d_1 = 1.0$ cm i $d_2 = 2.0$ cm a moduły Younga $E_1 = E_2 = 205$ GPa.



	<p>Rozwiązanie</p> <p>Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.</p> <p>Równanie równowagi:</p> $\Sigma M_A = 0$ $N_1 * 1 + N_2 * 2 = 0$
--	---

	<p>Równanie geometryczne:</p> $\frac{\Delta - \Delta_1 }{1} = \frac{ \Delta_2 }{2} \quad \text{ale } \Delta_1 > 0, \text{ a } \Delta_2 < 0 \text{ stąd}$ $ \Delta_1 = \Delta_1 \text{ i } \Delta_2 = -\Delta_2,$ <p>zatem: $\Delta_2 = -2(\Delta - \Delta_1)$.</p>
--	---

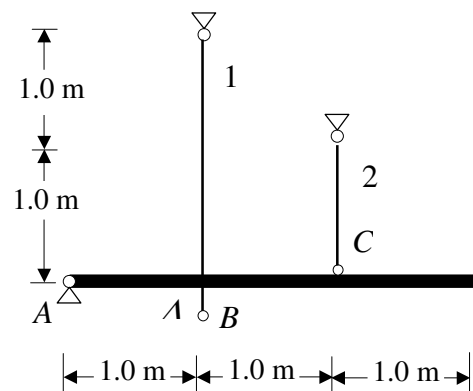
Komplet równań do wyznaczenia sił osiowych w odkształcalnych prętach układu:

$$\begin{cases} N_1 + 2N_2 = 0 \\ \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -2 \left(\Delta - \frac{N_1 l_1}{EA_1} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 + 2N_2 = 0 \\ \frac{N_2}{205 * 10^9 (\pi 2^2 / 4) * 10^{-4}} = -2 \left(2 * 10^{-3} - \frac{2N_1}{205 * 10^9 (\pi 1^2 / 4) * 10^{-4}} \right) \end{cases}$$

Siły w prętach wynoszą: $N_1 = 15.613 \text{ kN}$, $N_2 = -7.806 \text{ kN}$.

Przykład 9.8.18. Wyznaczyć siły w odkształcalnych prętach układu, które powstały w wyniku błędu montażowego. Pręt 1 wykonany został za długi o $\Delta = 2 \text{ mm}$. Średnice prętów wynoszą odpowiednio: $d_1 = 1.0 \text{ cm}$ i $d_2 = 2.0 \text{ cm}$ a moduły Younga $E_1 = E_2 = 205 \text{ GPa}$.



	<p>Rozwiązanie</p> <p>Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.</p> <p>Równanie równowagi:</p> $\Sigma M_A = 0$ $N_1 * 1 + N_2 * 2 = 0$
--	---

Równanie geometryczne:

$$\frac{\Delta - |\Delta_1|}{1} = \frac{|\Delta_2|}{2} \quad \text{ale } \Delta_1 < 0, \text{ a } \Delta_2 > 0 \quad \text{stąd}$$

$$|\Delta_1| = -\Delta_1 \text{ i } |\Delta_2| = \Delta_2$$

zatem

$$\Delta_2 = 2(\Delta + \Delta_1).$$

Komplet równań do wyznaczenia sił osiowych w odkształcalnych prętach układu:

$$\begin{cases} N_1 + 2N_2 = 0 \\ \frac{N_2 l_2}{E A_2} = 2 \left(\Delta + \frac{N_1 l_1}{E A_1} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 + 2N_2 = 0 \\ \frac{N_2}{205 \cdot 10^9 (\pi 2^2 / 4) \cdot 10^{-4}} = 2 \left(2 \cdot 10^{-3} + \frac{2N_1}{205 \cdot 10^9 (\pi 1^2 / 4) \cdot 10^{-4}} \right) \end{cases}$$

Siły w prętach wynoszą: $N_1 = -15.613 \text{ kN}$, $N_2 = 7.806 \text{ kN}$.

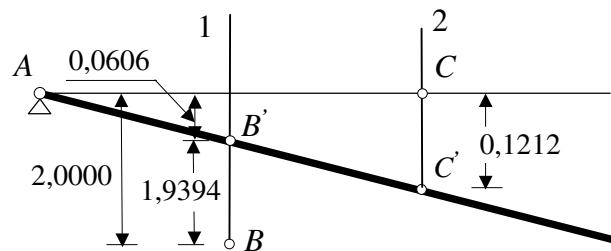
Sprawdźmy spełnienie warunku geometrycznego i naszkicujmy obraz konstrukcji po deformacji.

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E A_1} = \frac{-15613 \cdot 2}{205 \cdot 10^9 (\pi 1^2 / 4) \cdot 10^{-4}} = -1.9394 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

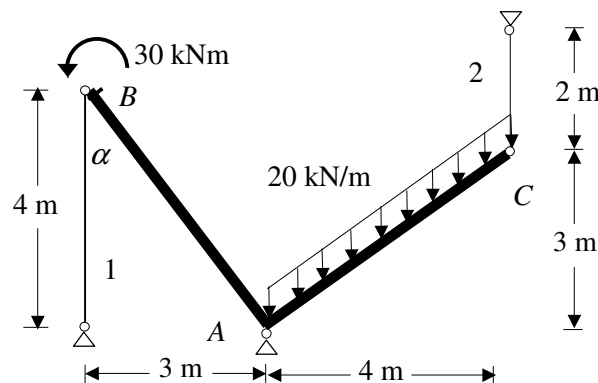
$$\Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E A_2} = \frac{7806 \cdot 1}{205 \cdot 10^9 (\pi 2^2 / 4) \cdot 10^{-4}} = 0.1212 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Warunek geometryczny miał postać $\Delta_2 = 2(\Delta + \Delta_1)$ i jak łatwo sprawdzić wyznaczone przemieszczenia go spełniają:

$$0.1212 \cdot 10^{-3} = 2(2 - 1.9394) \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$



Przykład 9.8.19. Wyznaczyć siły w odkształcalnych prętach 1 i 2 układu przegubowo-prętowego jak na rys. Pola ich przekrojów poprzecznych $A_1 = A_2 = A$, modułów sprężystości podłużnej $E_1 = E_2 = E$.

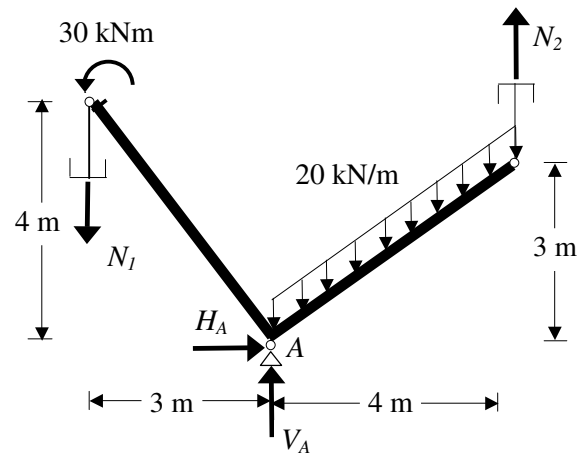


Rozwiązanie

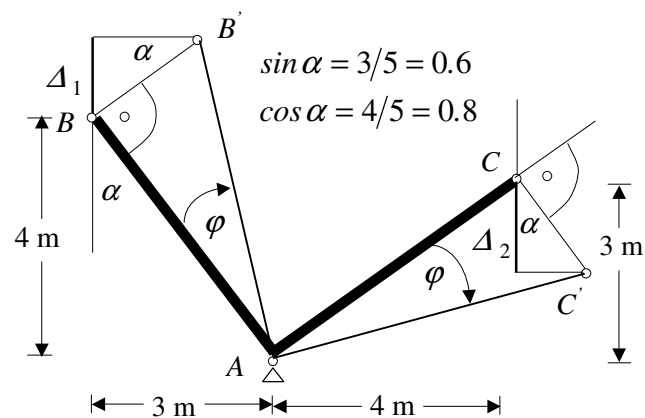
Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.
Równanie statyki:

$$\sum M_A = 0,$$

$$N_1 \cdot 3 + N_2 \cdot 4 - 20 \cdot 5 \cdot 2 + 30 = 0.$$



Z pokazanego obok planu przemieszczeń wyznaczmy równanie geometryczne. Sztywna rama BAC może się tylko obracać wokół przegubu A. Zadając wydłużenie pręta pierwszego Δ_1 , przy nieodkształcalnym pręcie AB, określamy położenie punktu B po deformacji i tym samym narzucamy, że wszystkie punkty sztywnej ramy BAC obracają się o ten sam kąt φ , a to definiuje położenie punktu C po deformacji i wydłużenie pręta drugiego Δ_2 .



Pokazany i opisany obraz przemieszczeń daje zależności

$$\operatorname{tg} \varphi = BB' / AB, \text{ a ponieważ długość } AB = 5 \text{ m, a } BB' = \Delta_1 / \sin \alpha, \text{ to}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \Delta_1 / 3.$$

Równocześnie $\operatorname{tg} \varphi = CC' / AC$, i dalej $AC = 5 \text{ m}$, $CC' = \Delta_2 / \cos \alpha$, więc

$$\operatorname{tg} \varphi = \Delta_2 / 4.$$

Zatem równanie geometryczne ma postać:

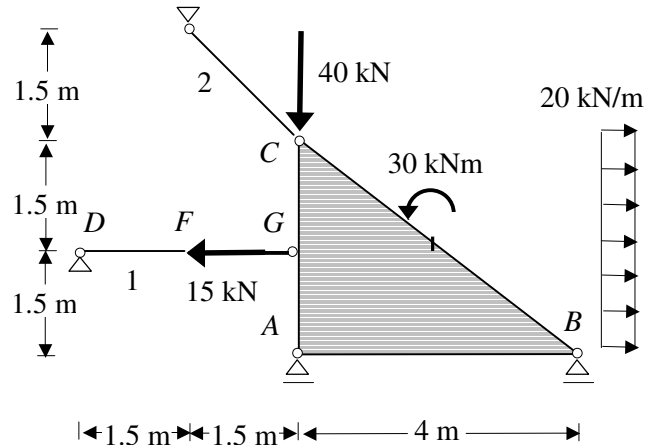
$$\Delta_1 / 3 = \Delta_2 / 4 \rightarrow \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = 0.75 \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \rightarrow N_1 = 0.375 N_2.$$

Układ równań do wyznaczenia sił w prętach przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} 3N_1 + 4N_2 = 170 \\ N_1 = 0.375 N_2 \end{cases}.$$

Siły w prętach podanego układu prętowego wynoszą: $N_1 = 12.439 \text{ kN}$, $N_2 = 33.170 \text{ kN}$.

Przykład 9.8.20. Wyznaczyć naprężenia normalne w odkształcalnych prętach 1 i 2 utrzymujących sztywną tarczę ABC pokazaną na rys. Pole przekroju poprzecznego pręta 2 oraz pręta 1 na odcinku DF wynosi $A_2 = 2 \text{ cm}^2$, pole przekroju poprzecznego pręta 1 na odcinku FG jest równe $A_1 = 2A_2$. Moduł Younga materiału obu prętów wynosi E .



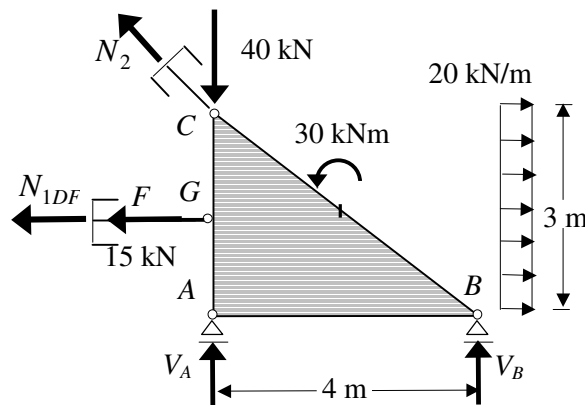
Rozwiązanie

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Równanie równowagi:

$$\sum X = 0,$$

$$-N_{1DF} - N_2/\sqrt{2} - 15 + 20 \cdot 3 = 0.$$



Pokazany obok plan przemieszczeń pozwala wyznaczyć równanie geometryczne. Sztywna tarcza ABC może przemieszczać się tylko poziomo. Zadając wydłużenie pręta pierwszego Δ_1 , definiujemy położenie wszystkich jej punktów a to określa wydłużenie pręta drugiego Δ_2 .

Zatem równanie geometryczne ma postać:

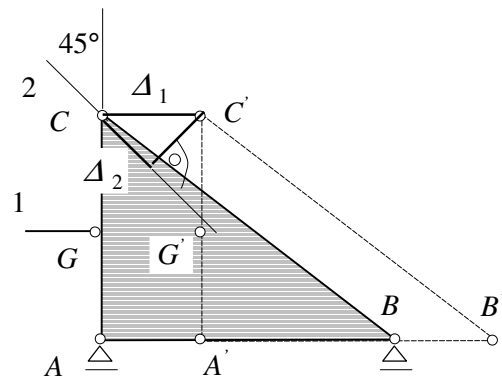
$$\Delta_1 = \sqrt{2}\Delta_2.$$

Pręt pierwszy jest obciążony siłą osiową 15 kN w połowie swej długości i dodatkowo ma zmienny przekrój więc jego wydłużenie jest równe:

$$\Delta_1 = \frac{N_{1DF} \cdot 1.5}{EA_2} + \frac{(N_{1DF} + 15) \cdot 1.5}{E \cdot 2A_2}, \text{ i równanie geometryczne jest następujące:}$$

$$\frac{N_{1DF} \cdot 1.5}{EA_2} + \frac{(N_{1DF} + 15) \cdot 1.5}{E \cdot 2A_2} = \sqrt{2} \frac{N_2 \cdot 1.5}{EA_2}.$$

Układ równań do wyznaczenia sił w prętach ma postać:



$$\begin{cases} N_{1DF} + N_2/\sqrt{2} = 45 \\ 2.25 N_{1DF} + 11.25 = 1.5 * \sqrt{2} N_2 \end{cases}$$

Siły w prętach podanego układu prętowego mają wartości: $N_{1DF} = 23.571$ kN, $N_2 = 30.305$ kN, $N_{1FG} = 38.571$ kN.

Naprężenia normalne wynoszą:
w pręcie 1

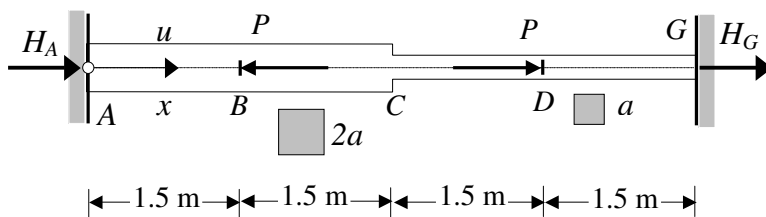
na odcinku DF $\sigma = \frac{23.571 * 10^3}{2 * 10^{-4}} = 117.855$ MPa,

na odcinku FG $\sigma = \frac{38.571 * 10^3}{4 * 10^{-4}} = 96.428$ MPa,

w pręcie 2

$$\sigma = \frac{30.305 * 10^3}{2 * 10^{-4}} = 151.525 \text{ MPa.}$$

Przykład 9.8.21. Wyznaczyć wykresy $N(x)$, $u(x)$ i $\sigma_x(x)$ w pręcie obciążonym osiowo i zamocowanym między nieodkształcalnymi ścianami jak na rysunku.



Dane:
 $P = 100$ kN, $a = 2$ cm,
 $E = 205$ GPa

Rozwiązanie

Konstrukcja jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna.

Równanie równowagi:

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A - P + P + H_G = 0 \rightarrow H_A + H_G = 0$$

Równanie geometryczne:

$$\begin{aligned} \Delta l_{AG} = 0 &\rightarrow \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DG} = 0 \rightarrow \\ \frac{N_{AB} l_{AB}}{E A_{AB}} + \frac{N_{BC} l_{BC}}{E A_{BC}} + \frac{N_{CD} l_{CD}}{E A_{CD}} + \frac{N_{DG} l_{DG}}{E A_{DG}} &= 0 \rightarrow \\ \frac{-H_A * 1.5}{E(2a)^2} + \frac{(-H_A + P) * 1.5}{E(2a)^2} + \frac{(-H_A + P) * 1.5}{E a^2} + \frac{(-H_A + P - P) * 1.5}{E a^2} &= 0 \end{aligned}$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymujemy: $H_A = 50.0$ kN i $H_G = -50.0$ kN.

Wartości sił podłużnych są równe:

$$N_{AB} = -50.0 \text{ kN}, N_{BC} = 50.0 \text{ kN}, N_{CD} = 50.0 \text{ kN}, N_{DG} = -50.0 \text{ kN.}$$

Wartości naprężeń normalnych σ_x wynoszą:

$$\sigma_{x_{AB}} = -31.25 \text{ MPa}, \quad \sigma_{x_{BC}} = 31.25 \text{ MPa}, \quad \sigma_{x_{CD}} = 125.00 \text{ MPa}, \quad \sigma_{x_{DG}} = -125.00 \text{ MPa}.$$

Wartości wydłużeń poszczególnych odcinków pręta wynoszą:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{E A_{AB}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{205 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = -0.229 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -0.229 \text{ mm}$$

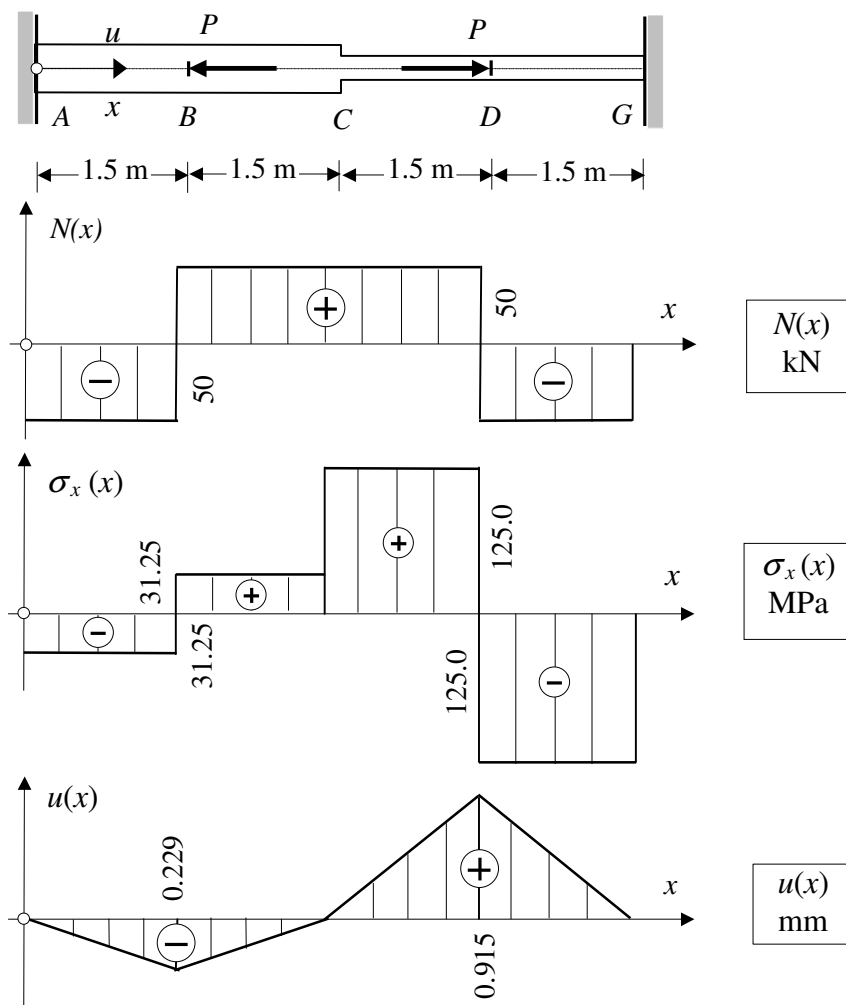
$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{E A_{BC}} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{205 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 0.229 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.229 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{E A_{CD}} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{205 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0.915 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.915 \text{ mm}$$

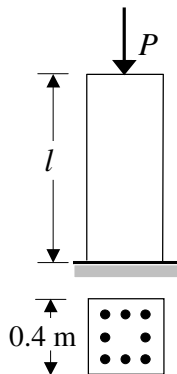
$$\Delta l_{DG} = \frac{N_{DG} l_{DG}}{E A_{DG}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{205 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -0.915 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -0.915 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{AG} = (-0.229 + 0.229 + 0.915 - 0.915) \cdot 10^{-3} = 0$$

Wykresy poszukiwanych wielkości:



Przykład 9.8.22. Słup żelbetowy o przekroju 0.4×0.4 m i zbrojeniu $8 \varnothing 22$ mm obciążony jest osiową siłą ścisającą $P = 3000$ kN. Wyznaczyć naprężenia w stali zbrojeniowej i betonie jeśli moduły Younga stali $E_s = 205$ GPa i betonu $E_b = 32.5$ GPa.



$$A_b = 0.4 * 0.4 = 1600 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_s = 30.41 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

Rozwiązanie

Przy założeniu pełnej przyczepności stali i betonu zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Równanie równowagi w którym N_b – siła przenoszona przez beton, a N_s – siła przenoszona przez stal ma postać:

$$N_b + N_s = P$$

Warunek geometryczny, który wynika z założonej przyczepności mówi o równości przemieszczeń w obu elementach składowych konstrukcji:

$$\Delta l_b = \Delta l_s.$$

Stąd komplet równań do wyznaczenia sił osiowych jest następujący:

$$\begin{cases} N_b + N_s = P \\ \frac{N_b l}{E_b A_b} = \frac{N_s l}{E_s A_s} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_b + N_s = 3000 * 10^3 \\ \frac{N_b}{32.5 * 10^9 * 1600 * 10^{-4}} = \frac{N_s}{205 * 10^9 * 30.41 * 10^{-4}} \end{cases}.$$

W wyniku rozwiązania otrzymujemy: $N_b = 2678.84$ kN; $N_s = 321.16$ kN, i obie siły są ścisające.

Naprężenia ścisające w betonie i stali są równe:

$$\sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = \frac{2678.84 * 10^3}{1600 * 10^{-4}} = 16.74 \text{ MPa}, \quad \sigma_s = \frac{N_s}{A_s} = \frac{321.16 * 10^3}{30.41 * 10^{-4}} = 105.61 \text{ MPa}.$$

Przykład 9.8.23. Jak zmienia się stosunek energii odkształcenia objętościowego U_V i energii odkształcenia postaciowego U_f do całkowitej energii U w zależności od wartości liczby Poissona ν w osiowo rozciągany pręcie pryzmatycznym.

Rozwiązanie

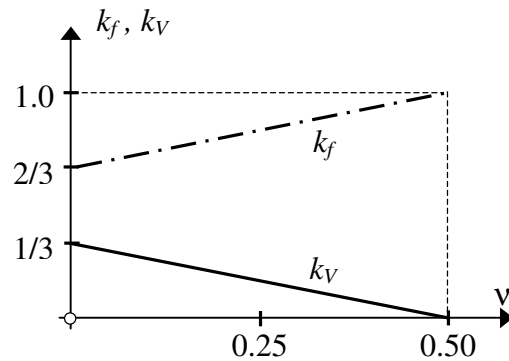


$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}; \quad \Phi_V = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_x^2; \quad \Phi_f = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2.$$

$$U_V = \int_V \Phi_V dV = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_x^2 V; \quad U_f = \int_V \Phi_f dV = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2 V; \quad U = U_V + U_f = \frac{\sigma_x^2}{2E} V.$$

$$k_V = \frac{U_V}{U} = \frac{1}{3}(1-2\nu), \quad k_f = \frac{U_f}{U} = \frac{2}{3}(1+\nu)$$



Przykład pokazuje, że w analizowanym przypadku:

- ilość energii, która zużywana jest na zmianę postaci zawsze jest większa od tej, która zużywana jest na zmianę objętości,
- w materiałach nieściśliwych ($\nu = 0.5$), cała praca sił zewnętrznych zużywa się na zmianę postaci.

Przykład 9.8.24. Obliczyć zmianę objętości ΔV rozciąganego osiowo siłą N pręta o długości l i polu przekroju poprzecznego A wykonanego z materiału o stałych sprężystych E oraz ν .

Rozwiązanie

Względna zmiana objętości w punkcie określona wzorem (6.19) wynosi:

$$D = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Aby otrzymać całkowitą zmianę objętości ciała należy wykonać całkowanie po jego objętości

$$\Delta V = \iiint_V D dV = \iiint_V (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV.$$

W rozważanym przypadku pręta rozciąganego osiowo stałą siłą N , otrzymujemy:

$$\Delta V = \iiint_V (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV = (1-2\nu) \frac{N}{EA} V = (1-2\nu) \frac{Nl}{E}.$$

W izotropowych liniowo sprężystych materiałach liczba Poissona zawiera się w granicach $0 \leq \nu \leq 0.5$, więc pręt rozciągany osiowo wykonany z takiego materiału zwiększa swoją objętość.