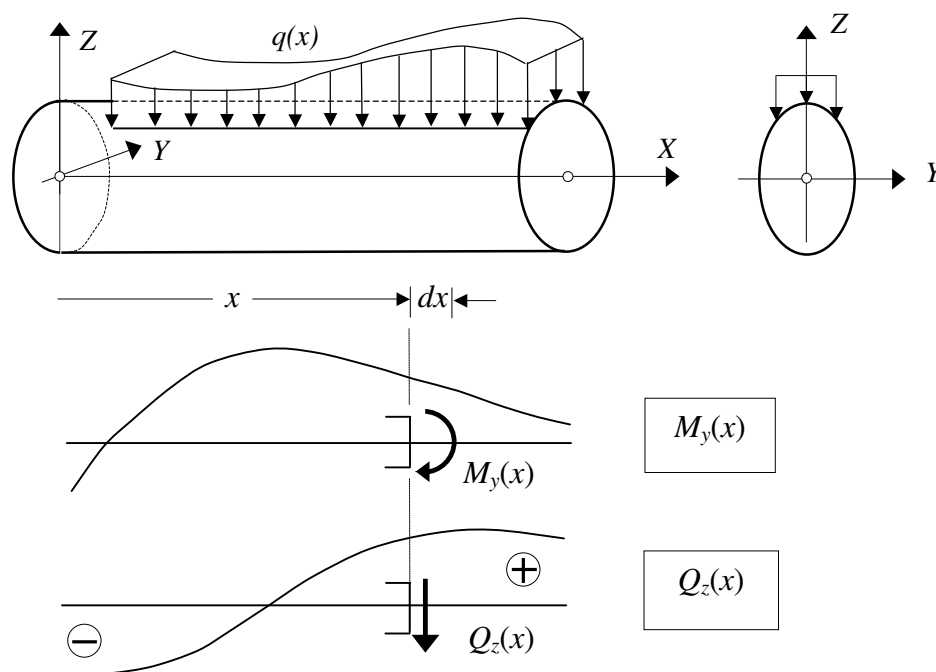


11. POPRZECZNE ZGINANIE

11.1. Naprężenia i odkształcenia

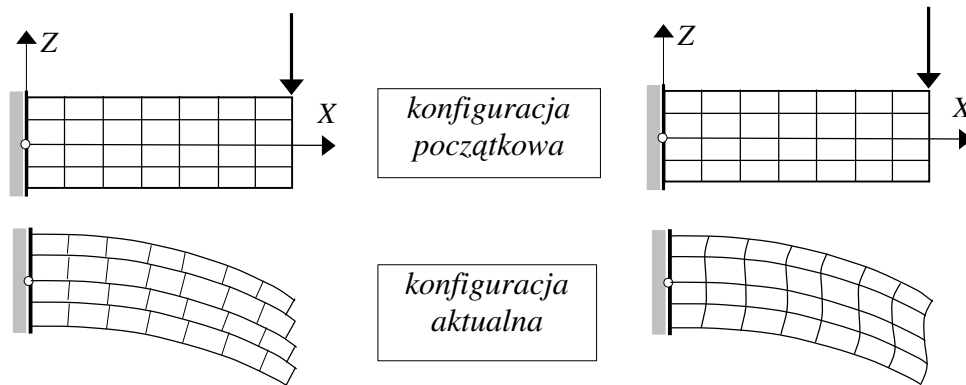
Poprzecznym zginanie występuje wówczas, gdy do pobocznic pręta pryzmatycznego o symetrycznym przekroju poprzecznym przyłożone jest obciążenie rozłożone symetrycznie względem płaszczyzny symetrii pręta, które w jego przekroju poprzecznym redukuje się do momentu zginającego \bar{M} i siły poprzecznej \bar{Q} . Płaszczyzną działania obu tych sił przekrojowych zarówno Q jak i M , jest płaszczyzna symetrii pręta. Zagadnienie to występuje wtedy, gdy moment zginający zmienia swoją wartość na długości pręta, gdyż - zgodnie ze znaną zależnością różniczkową - $\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x)$, wówczas siła poprzeczna $Q_z(x) \neq 0$ (patrz rys. 11.1).



Rys. 11.1

W tak obciążonym pręcie poszukiwać będziemy macierzy naprężeń, odkształceń oraz wektora przemieszczenia w dowolnym jego punkcie. Postawione zadanie, w tym przypadku, nie daje się rozwiązać w sposób ścisły nie tylko metodami *wytrzymałości materiałów* ale i metodami *teorii sprężystości*. Aby uzyskać zależności określające poszukiwane wielkości, konieczne będzie przyjęcie dodatkowych założeń upraszczających. Można jednak pokazać poprzez eksperymenty doświadczalne i numeryczne, że otrzymane w ten sposób wyniki nie odbiegają w sposób istotny od ścisłych rozwiązań dla szczególnych przypadków poprzecznego zginania, a ich niewątpliwą zaletą jest prostota formy.

Jednakże zanim przejdziemy do ich wyznaczenia, przeanalizujemy deformację zginanego poprzecznie wspornika o przekroju prostokątnym pokazanego na rys. 11.2.

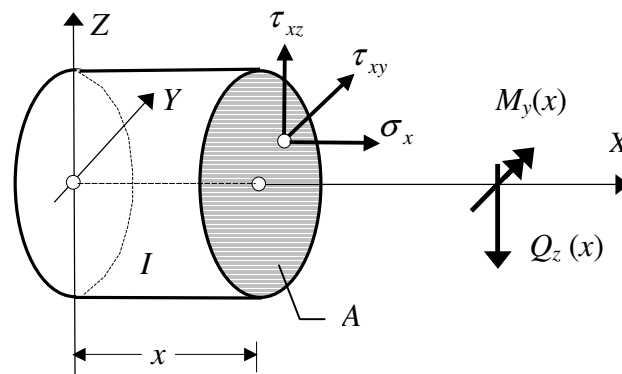


Rys. 11.2

Wspornik pokazany w lewej części rysunku składa się z kilku połączonych na sobie elementów, a w części prawej wspornik wykonany jest z jednego elementu. Obraz deformacji na rys. 11.2 pokazuje, że w przypadku poprzecznego zginania przekrój płaski i prostopadły do osi pręta w konfiguracji początkowej nie pozostaje płaski i prostopadły do osi pręta po przyłożeniu obciążenia, jak to było w przypadku zginania prostego. Dowodzi to wystąpienia odkształceń kątowych (w pokazanym przykładzie będzie to γ_{xz}) włókien równoległych do osi układu odniesienia i, co za tym idzie naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym. Mimo tego, przy wyprowadzaniu zależności określających odkształcenie liniowe przyjmujemy spełnienie hipotezy Bernoulliego głoszącej, że przekrój płaski i prostopadły do osi pręta przed przyłożeniem obciążenia pozostaje płaski i prostopadły do ugiętej osi po przyłożeniu obciążenia. Można pokazać, że takie założenie upraszczające będzie skutkowało w wartościach naprężeń normalnych błędem rzędu h/l gdzie: h jest wysokością przekroju pręta, a l jego długością. Stąd też należy pamiętać, że wyprowadzone zależności mogą być stosowane w przypadku zginania poprzecznego prętów długich.

Po tych wstępnych uwagach rozważmy pokazany na rys. 11.1 pręt pryzmatyczny o polu przekroju poprzecznego A , określony w układzie współrzędnych (X, Y, Z) w którym osie (Y, Z) są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego, a płaszczyzna (X, Z) jest płaszczyzną symetrii pręta i zarazem płaszczyzną obciążenia. Materiał pręta jest izotropowy, liniowo sprężysty o stałych materiałowych E oraz ν .

Dalej postępujemy według schematu, który poprzednio był już dwukrotnie zastosowany. Po dokonaniu myślowego przekroju pręta na dwie części w miejscu o odciętej x , odrzuceniu części II i przyłożeniu do części I układu sił wewnętrznych (rys.11.3) rozważymy trzy komplety równań tzn. równania równowagi, geometryczne i fizyczne.



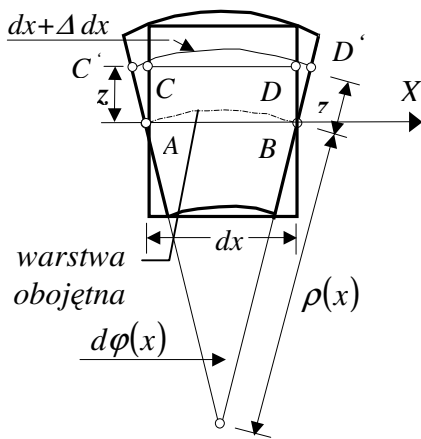
Rys.11.3

Równania równowagi wynikające z twierdzenia o równoważności odpowiednich układów sił wewnętrznych i zewnętrznych w tym przypadku przyjmą postać:

$$\left\{ \begin{aligned} \iint_A \sigma_x dA = 0, \quad \iint_A \tau_{xy} dA = 0, \quad \iint_A \tau_{xz} dA = -Q_z(x), \\ \iint_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA = 0, \quad \iint_A \sigma_x z dA = M_y(x), \quad \iint_A -\sigma_x y dA = 0. \end{aligned} \right. \quad (11.1)$$

Równania geometryczne napiszemy przyjmując, że:

- przekroje płaskie i prostopadłe do osi pręta przed przyłożeniem obciążeń pozostają płaskie i prostopadłe do ugiętej osi pręta po przyłożeniu obciążeń,
- odkształcenia kątowe włókien równoległych do osi układu odniesienia są równe zero,
- odkształcenia liniowe związane są zależnością: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$,
- górne włókna uległy wydłużeniu, a dolne skróceniu, istnieje warstwa włókien - warstwa obojętna, których długość nie uległa zmianie, choć przyjęły formę krzywoliniową o zmiennym promieniu krzywizny $\rho(x)$, i w konfiguracji początkowej włókna te leżały na płaszczyźnie (X, Y) .



Rys. 11.4

Odształcenia liniowe ε_x wyznaczmy analizując wydłużenie odcinka pręta o dowolnie małej długości dx przed przyłożeniem obciążeń (rys. 11.4). Po deformacji przekroje skrajne obrócić się i utworzą dowolnie mały kąt $d\varphi(x)$. Jeśli $\rho(x)$ jest promieniem krzywizny warstwy obojętnej, to odkształcenia liniowe ε_x włókien odległych o z od warstwy obojętnej wynoszą:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta dx}{dx} = \\ &= \lim_{d\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{[\rho(x) + z] d\varphi(x) - \rho(x) d\varphi(x)}{\rho(x) d\varphi(x)} = \frac{z}{\rho(x)} \end{aligned}$$

Równania geometryczne zapiszemy w postaci:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho(x)}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{z}{\rho(x)},$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

Podstawienie tych odkształceń do równań fizycznych daje poniższe zależności i wartości naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_x = E \varepsilon_x,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \rightarrow \tau_{yz} = 0.$$

W wyniku podstawienia do równań równowagi zawierających naprężenia normalne otrzymujemy:

$$\iint_A \sigma_x dA = 0 \rightarrow \iint_A E \varepsilon_x dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho(x)} \iint_A z dA = 0$$

$$\iint_A -\sigma_x y dA = 0 \rightarrow -\frac{E}{\rho(x)} \iint_A yz dA = 0$$

$$\iint_A \sigma_x z dA = M_y(x) \rightarrow \frac{E}{\rho(x)} \iint_A z^2 dA = M_y(x)$$

zależność między krzywizną osi zdeformowanego pręta i momentem zginającym:

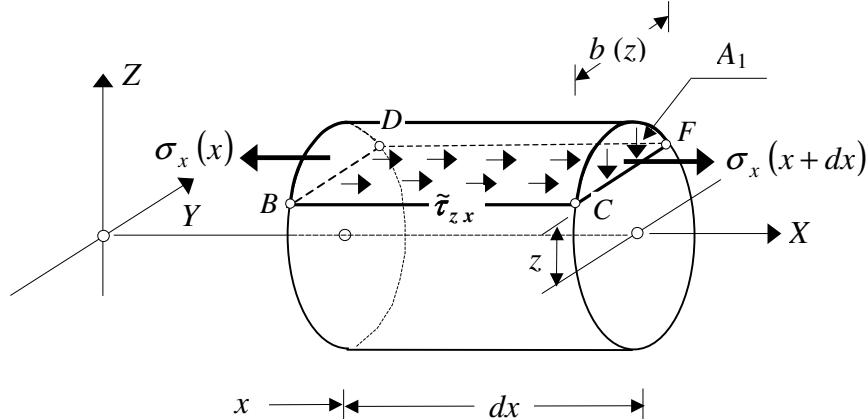
$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_y(x)}{E J_y}, \quad (11.2)$$

co pozwala napisać związki wiążące moment zginający z odkształceniem liniowym i naprężeniem normalnym:

$$\varepsilon_x = \frac{M_y(x)}{E J_y} z, \quad (11.3)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{J_y} z. \quad (11.4)$$

Aby wyznaczyć, ostatni, nieznaną element macierzy naprężeń τ_{xz} , wytnijmy z długości pręta dwoma płaszczyznami prostopadłymi do jego osi odcinek o dowolnie małej długości dx i rozważmy równowagę górnej jego części odciętej płaszczyzną $z = \text{const}$ (rys. 11.5).



Rys. 11.5

Siły przyłożone do tej odciętej części winny spełniać ogólnie znane warunki równowagi. Jeżeli przez $\tilde{\tau}_{zx}$ oznaczymy średnie naprężenie styczne na ścianie $BCDF$ to jeden z warunków równowagi a mianowicie sumy rzutów sił na oś X możemy zapisać w postaci:

$$\sum X = 0;$$

$$-\iint_{A_1} \sigma_x(x) dA + \tilde{\tau}_{zx} b(z) dx + \iint_{A_1} \sigma_x(x+dx) dA = 0$$

Wykorzystanie zależności (10.4) wiążącej naprężenia normalne z momentem zginającym, a następnie twierdzenia Lagrange'a pozwala przepisać powyższe równanie w formie:

$$-\iint_{A_1} \frac{M_y(x)}{J_y} z dA + \tilde{\tau}_{zx} b(z) dx + \iint_{A_1} \left[M_y(x) + \frac{dM_y(x+\alpha dx)}{dx} dx \right] \frac{z}{J_y} dA = 0$$

gdzie: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Podstawiając do równania związek różniczkowy między momentem zginającym i siłą poprzeczną możemy otrzymać:

$$\tilde{\tau}_{zx} = -\frac{Q_z(x+\alpha dx)}{J_y b(z)} \iint_{A_1} z dA.$$

Po obustronnym przejściu do granicy $dx \rightarrow 0$ otrzymujemy ostatecznie zależność określającą poszukiwane naprężenia styczne:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{Q_z(x) S_y(z)}{J_y b(z)}, \quad (11.5)$$

gdzie: τ_{xz} - średnie naprężenie styczne we włóknach $z = \text{const}$ w przekroju pręta o współrzędnej x ,

$S_y(z)$ - moment statyczny względem osi zginania części przekroju ponad włóknami w których wyznaczamy naprężenia,

$b(z)$ - szerokość przekroju na wysokości z ,

$Q_z(x)$ - siła poprzeczna w przekroju w którym wyznaczamy naprężenia.

Znaki w wyprowadzonych wzorach obowiązują przy przyjętych zwrotach osi układu odniesienia i sił przekrojowych. W przypadku innych zwrotów należy dokonać odpowiedniej korekty znaków.

Zatem macierze naprężeń i odkształceń w pręcie poddanym poprzecznemu zginaniu w płaszczyźnie (X, Z) mają postać:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & \gamma_{xz}/2 \\ 0 & -\nu \epsilon_x & 0 \\ \gamma_{zx}/2 & 0 & -\nu \epsilon_x \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

w których naprężenia wyrażone poprzez siły przekrojowe i charakterystyki geometryczne określają wzory wyprowadzone wyżej a odkształcenia liniowe i kątowe związane są z nimi równaniami Hooke'a.

Warto jednak w tym miejscu dodać, że jest to najprostsza postać macierzy naprężeń i odkształceń dla tego przypadku wytrzymałości. Bywają one jeszcze uzupełnione naprężeniami τ_{xy} oraz σ_z i odpowiadającymi im odkształceniami ale i wówczas są one

przybliżone i nie spełniają kompletu równań zagadnienia brzegowego ciągłego ośrodka liniowo-sprężystego.

10.2. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia

Macierz naprężeń przy poprzecznym zginaniu pokazuje, że w tym przypadku wytrzymałości występuje płaski, niejednorodny stan naprężenia, którego płaszczyzną jest płaszczyzna (X, Z) . Naprężenia główne (ekstremalne wartości naprężeń normalnych) i ich kierunki wyznaczamy ze wzorów wyprowadzonych przy analizie płaskiego stanu naprężenia podstawiając do nich odpowiednie elementy macierzy naprężeń:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}, \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2},$$

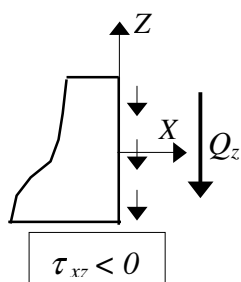
$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{\max}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{\min}}.$$

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym określone wzorem (11.4) są liniowo zależne od współrzędnej z , zerują się w punktach na osi Y , jest ona ich osią obojętną i osiągają swą maksymalną bezwzględną wartość w punktach od niej najodleglejszych. Ponieważ w tym przypadku wytrzymałości moment zginający zmienia swą wartość na długości pręta to największe naprężenia σ_x , w konstrukcji wystąpią w przekroju maksymalnego momentu zginającego i są równe:

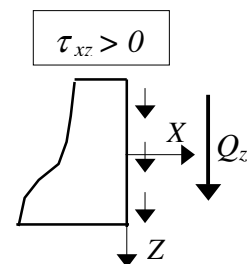
$$\max |\sigma_x| = \frac{\max M_y}{J_y} \max |z| = \frac{\max M_y}{W_y} \quad (11.7)$$

gdzie: $W_y = \frac{J_y}{\max |z|}$ znany już wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu względem osi Y .

Analizę rozkładu naprężeń stycznych τ_{xz} w przekroju poprzecznym określonych wzorem (11.5) zaczniemy od omówienia występującego w nim ujemnego znaku. Punktem wyjścia przy jego określeniu jest to, że zwrot tych naprężeń jest taki jak zwrot siły poprzecznej i nie zależy od układu odniesienia. Przypisanie odpowiedniego znaku po ustalonym już zwrocie naprężenia stycznego związane jest z przyjętym układem odniesienia i reguluje to umowa znakowania naprężeń stycznych – reguła podwójnej zgodności (zwrotów osi układu współrzędnych i zwrotów normalnej zewnętrznej do płaszczyzny przekroju).



Pokazane na rysunkach obok naprężenia styczne w obu przypadkach mają zwrot w dół (bo tak działa na rozważany przekrój siła poprzeczna) ale w przypadku po lewej należy przypisać im znak minus (bo zachodzi niezgodność ich zwrotu z dodatnim kierunkiem osi Z układu współrzędnych, przy równoczesnej zgodności zwrotu normalnej zewnętrznej do przekroju ze zwrotem osi X).



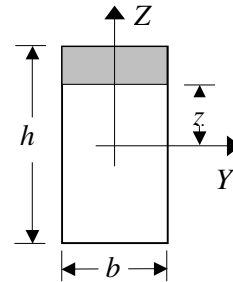
W dowolnym ustalonym przekroju poprzecznym pręta naprężenia styczne są funkcją jednej współrzędnej z . Powstaje pytanie, jaką funkcją?

Zacznijmy od prostego przypadku prostokątnego przekroju o wymiarach $b \times h$, na który działa siła poprzeczna $Q_z = Q$ skierowana zgodnie z osią Z . Wielkości występujące we wzorze na naprężenia styczne w tym przypadku przyjmują wartości:

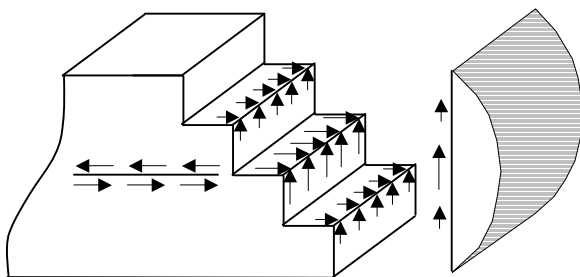
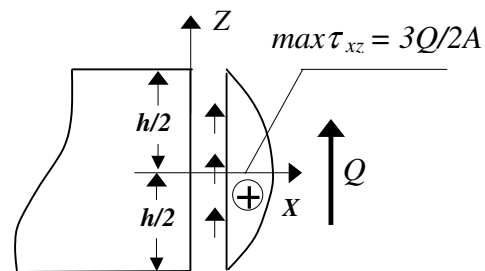
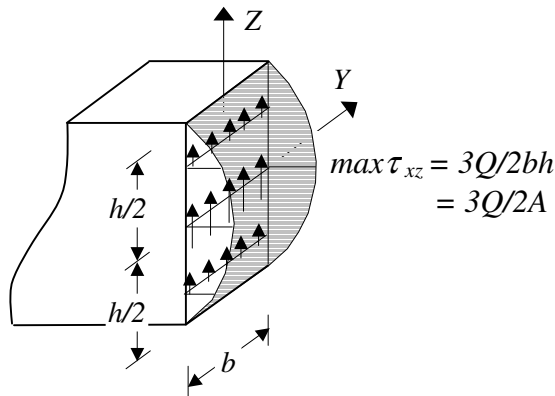
$$J_y = bh^3/12, \quad b(z) = b,$$

$$S_y(z) = b \frac{h}{2} * \frac{h}{4} - b z * \frac{z}{2} = \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

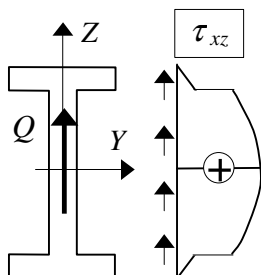
$$\tau_{xz} = \frac{Q}{bh^3/12 * b} \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] = \frac{3Q}{2bh} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$



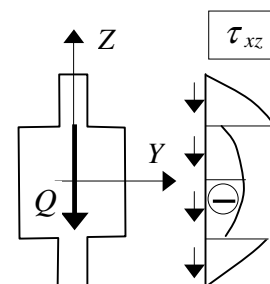
Zatem rozkład naprężeń stycznych po wysokości przekroju prostokątnego jest funkcją kwadratową, która osiąga ekstremalną wartość na osi obojętnej, a zeruje się we włóknach skrajnych. Rysunek poniżej pokazuje opisaną sytuację w aksonometrii oraz w płaszczyźnie (X, Z) .



Z naprężeniami stycznymi τ_{xz} stowarzyszone są naprężenia τ_{zx} (patrz rysunek obok) i właśnie te naprężenia są przyczyną rozwarstwiania się pręta (ścianania) w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny (X, Y) .



Mając w pamięci rozkład naprężeń stycznych dla prostokątnego przekroju narysowanie kształtu rozkładu naprężeń stycznych dla innych prostych przekrojów, w których boczne tworzące są odcinkami równoległymi do osi Z nie powinno sprawiać trudności (patrz szkice obok).



Stan odkształcenia przy poprzecznym zginaniu jest przestrzenny. Przy czym odkształcenia liniowe włókien równoległych do osi Y to jedne z odkształceń głównych. Dwa pozostałe to odkształcenia odpowiadające kierunkom naprężeń głównych działających w płaszczyźnie (X, Z) .

11.3. Energia sprężysta pręta zginanego poprzecznie

Po wstawieniu do wzorów (8.18), zależności określających elementy macierzy naprężeń dla pręta poddanego poprzecznemu zginaniu i wykonaniu całkowania po jego objętości dostajemy wyrażenie określające wielkość energii sprężystej dla tego przypadku wytrzymałości:

$$U = \iiint_V \Phi dV = \iiint_V \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + 2(1+\nu)\tau_{xz}^2] dV = \\ = \int_0^l dx \iint_A \frac{1}{2E} \left[\frac{M_y(x)}{J_y} z \right]^2 dA + \int_0^l dx \iint_A \frac{1}{2G} \left[\frac{Q_z(x) S_y(z)}{J_y b(z)} \right]^2 dA = \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2E J_y} dx + \kappa \int_0^l \frac{Q_z^2(x)}{2G A} dx,$$

gdzie: $\kappa = \frac{A}{J_y^2} \iint_A \frac{S_y^2(x)}{b^2(z)} dA$ - współczynnik zależny od kształtu przekroju nazywany

energetycznym współczynnikiem ścinania (dla prostokąta ma wartość 1.2, a dla przekroju kołowego 1.18).

Energię sprężystą układu złożonego z wielu prętów poddanych poprzecznemu zginaniu obliczamy wykonując sumowanie po wszystkich przedziałach charakterystycznych:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2E J_y} dx + \sum_{i=1}^n \kappa \int_0^l \frac{Q_z^2(x)}{2G A} dx. \quad (11.8)$$

11.4. Wymiarowanie prętów zginanych poprzecznie

Ograniczymy się teraz tylko do wymiarowania ze względu na stan graniczny nośności przyjmując, że będzie on osiągnięty jeśli przynajmniej w jednym punkcie dowolnego przekroju poprzecznego pręta, wartości naprężeń normalnych lub stycznych będą równe ich wytrzymałości obliczeniowej. Tak więc stan graniczny nośności wymaga, w istocie rzeczy, równoczesnego spełnienia dwóch nierówności:

- warunek nośności ze względu na naprężenia normalne:

materiał pręta ma różną wytrzymałość obliczeniową na rozciąganie R_r i ściskanie R_c

$$\max \sigma_{xr} = \frac{\max M_y}{J_y} \max |z_r| \leq R_r \quad \text{i} \quad \max |\sigma_{xc}| = \frac{\max M_y}{J_y} \max |z_c| \leq R_c,$$

gdzie:

$\max \sigma_{xr}$ i $\max |\sigma_{xc}|$ - największe naprężenia rozciągające i ściskające w przekroju poprzecznym konstrukcji,

$\max |z_r|$ i $\max |z_c|$ - odległości od osi obojętnej skrajnych punktów przekroju poprzecznego, odpowiednio, rozciąganych i ściskanych.

materiał pręta ma jednakową wytrzymałość obliczeniową na rozciąganie i ściskanie (materiał izonomiczny) R

$$\max |\sigma_x| = \frac{\max M_y}{W_y} \leq R$$

- warunek nośności ze względu na naprężenia styczne:

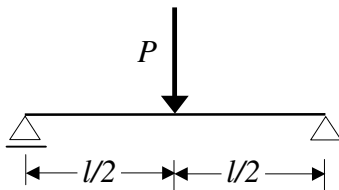
$$\max |\tau_{xz}| = \max \left| \frac{Q_z S_y(z)}{J_y b(z)} \right| \leq R_t,$$

gdzie: R_t wytrzymałość obliczeniowa na ścinanie.

Punkt, w którym wystąpią maksymalne naprężenia normalne to najodleglejszy od osi obojętnej punkt przekroju poprzecznego, w którym występuje maksymalny moment zginający.

Nieco trudniej jest określić punkt wystąpienia maksymalnych naprężeń stycznych, jeśli przekrój ma skomplikowany kształt (np. o zmiennej szerokości). Wymaga to pewnej analizy, ale będzie to niewątpliwie punkt w tym przekroju gdzie występuje maksymalna siła poprzeczna.

Z tych dwóch wyżej podanych warunków na ogół wystarcza spełnienie warunku stanu granicznego nośności ze względu na naprężenia normalne, gdyż te naprężenia w prętach są dominujące. Aby się o tym przekonać policzmy stosunek maksymalnego naprężenia normalnego σ_x do maksymalnego naprężenia stycznego τ_{xz} w belce wolnopodpartej o przekroju prostokątnym $b \times h$ obciążonej jak rysunku.



Maksymalne naprężenia normalne wystąpią w środku rozpiętości we włóknach skrajnych i będą miały wartość

$$\max \sigma_x = \frac{\max M}{W_y} = \frac{Pl}{4} \frac{6}{bh^2}.$$

Maksymalne naprężenia styczne wystąpią we włóknach na osi obojętnej i będą miały wartość $\max \tau_{xz} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$.

Zatem:
$$\frac{\max \sigma_x}{\max \tau_{xz}} = \frac{\frac{3Pl}{2bh^2}}{\frac{3P}{4bh}} = \frac{2l}{h}.$$

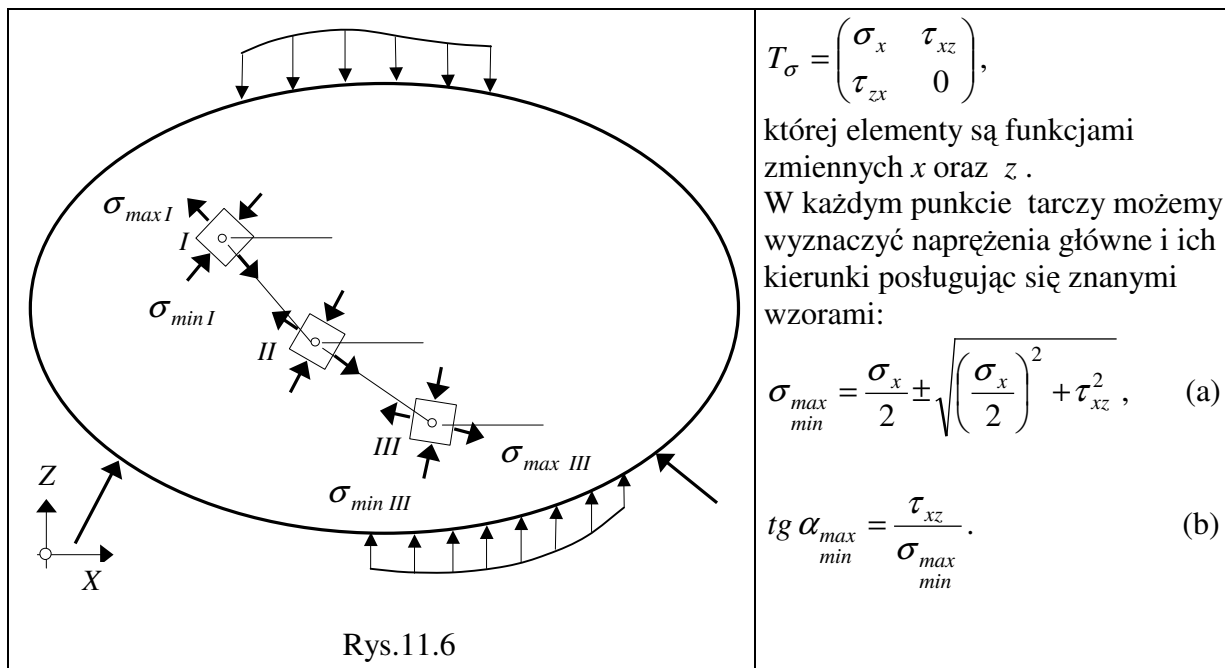
Rozpiętość belki jest w większości przypadków kilkanaście razy większa od jej wysokości i podobnie dominują wartości naprężeń normalnych nad stycznymi, a naprężenia obliczeniowe przy rozciąganiu nie są tak dużo mniejsze od tych przy ścinaniu, gdyż np.:

stal St3S	$R = 215 \text{ MPa},$	$R_t = 0.58 R$
beton B20	$R_r = 0.71 \text{ MPa},$	$R_t = 0.75 R$
drewno sosnowe	$R_r = 12.5 \text{ MPa},$	$R_t = 1.4 \text{ MPa}.$

Dla pełnego sprawdzenia stanu granicznego nośności należałoby obliczyć naprężenia główne (tzn. ekstremalne naprężenia normalne) i ekstremalne naprężenia styczne i porównać je z wartościami odpowiednich wytrzymałości obliczeniowych. Z reguły jest to jednak zbyteczne gdyż dla belek zginanych o powszechnie stosowanych („nie udziwnionych”) kształtach przekroju, największe naprężenia normalne występują we włóknach skrajnych (w płaszczyźnie przekroju poprzecznego) i tam też występują ekstremalne naprężenia styczne, których wartość jest równa połowie tych naprężeń normalnych.

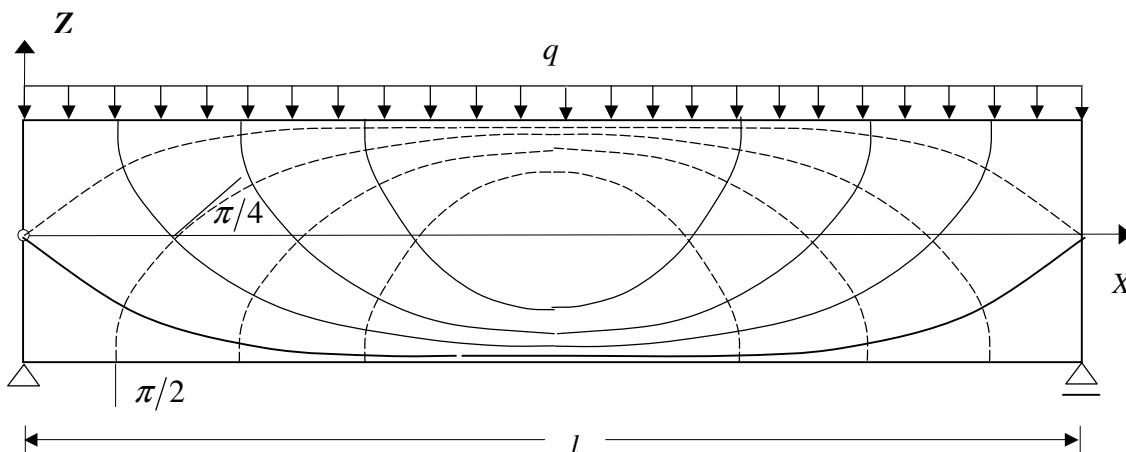
11.5. Trajektorie naprężeń głównych w prętach zginanych poprzecznie

Rozważmy płaską tarczę w płaszczyźnie (X, Z) w której występuje płaski stan naprężenia określony macierzą naprężeń:



Wybermy w niej dowolny punkt I (rys. 11.6) i wyznaczmy w nim naprężenie główne $\sigma_{\max,I}$ i jego kierunek określony $\operatorname{tg} \alpha_{\max,I}$, a następnie przesuniemy się po tym kierunku do bliskiego punktu II. W punkcie II wyznaczmy naprężenie główne $\sigma_{\max,II}$ i jego kierunek określony $\operatorname{tg} \alpha_{\max,II}$ i znowu przesuniemy się po tym kierunku do bliskiego punktu III, itd. Działania takie możemy kontynuować startując od dowolnego punktu na brzegu tarczy i kończąc na innym punkcie brzegowym a ich wynikiem będzie krzywa łamana, która w przypadku gdy z odległościami między punktami będziemy zmierzać do zera będzie krzywą ciągłą o tej własności, że w każdym jej punkcie kierunek maksymalnego naprężenia głównego σ_{\max} jest do niej styczny. Krzywą o takiej własności nazywać będziemy trajektorią maksymalnego naprężenia głównego. Podobnie definiujemy trajektorię minimalnego naprężenia głównego. W płaskiej tarczy trajektorie maksymalnych i minimalnych naprężeń głównych tworzą dwie rodziny krzywych prostopadłych do siebie w każdym punkcie.

Odnieśmy teraz to co zostało wyżej powiedziane do przykładu belki wolnopodpartej obciążonej równomiernie której prostokątny przekrój ma wymiary $b * h$ (rys. 11.7)



Funkcja momentów zginających i naprężeń normalnych są następujące:

$$M_y(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}, \quad \sigma_x(x, z) = -\frac{M_y(x)}{J_y} z, \quad (c)$$

a funkcje sił poprzecznych i naprężeń stycznych mają postać:

$$Q_z(x) = \frac{ql}{2} - qx, \quad \tau_{xz}(x, z) = -\frac{Q_z(x)S_y(z)}{J_y b(z)}, \quad (d)$$

w których $J_y = \frac{bh^3}{12}$, $S_y(z) = \frac{bh^2}{8} - \frac{bz^2}{2}$, $b(z) = b$.

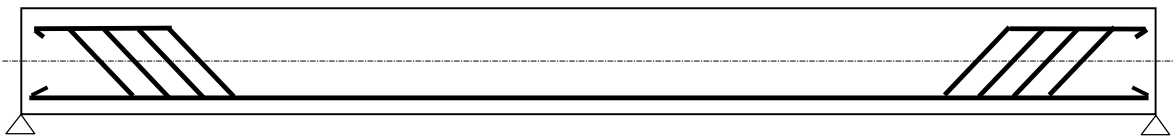
Trajektorie maksymalnych i minimalnych naprężeń głównych to krzywe całkowe niżej podanych równań różniczkowych:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{dz}{dx} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{\max}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{dz}{dx} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{\min}}, \quad (e)$$

do których trzeba wstawić zależności (a), (c) i (d).

Rozwiązanie równań (e) daje dwie rodziny krzywych, których przebieg jest naszkicowany na rys. 11.7. Linia ciągłą naszkicowana jest trajektoria maksymalnego naprężenia głównego (rozciągającego), a linia przerywana pokazuje trajektorię minimalnego naprężenia głównego (ściskającego). Każda z tych trajektorii przecina oś X pod kątem 45° , bo tam panuje czyste ścinanie, i podchodzi do odpowiednich krawędzi (rozciąganych lub ściskanych) belki pod kątem prostym.

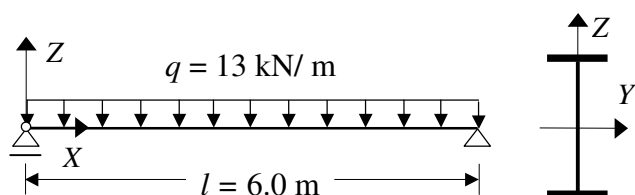
Zagadnienie trajektorii naprężeń głównych jest szczególnie ważne przy kształtowaniu zginanych poprzecznie belek żelbetowych. Ponieważ wytrzymałość betonu przy rozciąganiu jest kilkanaście razy mniejsza niż przy ściskaniu, a stal posiada dużą wytrzymałość przy rozciąganiu, więc w obszarach belki gdzie występują naprężenia rozciągające przenoszą je stalowe pręty powszechnie nazywane - zbrojeniem. Przebieg zbrojenia w żelbetowej belce winien w przybliżeniu odpowiadać kształtowi maksymalnych naprężeń głównych, i stąd zbrojenie pracujące na rozciąganie, w belce wyżej analizowanej, będzie miało kształt naszkicowany na rys. 11.8.



Rys.11.8

11.6. Przykłady

Przykład 11.6.1. Wyznaczyć potrzebny przekrój stalowej belki dwuteowej ze względu na stan graniczny nośności jeśli wytrzymałość obliczeniowa stali wynosi $R = 175$ MPa. Po przyjęciu dwuteownika wyznaczyć jego



nośność na zginanie.

Rozwiązanie

Maksymalny moment zginający w belce wynosi:

$$\max M_y = \frac{ql^2}{8} = \frac{13 \cdot 6^2}{8} = 58.50 \text{ kNm.}$$

Warunek stanu granicznego nośności daje:

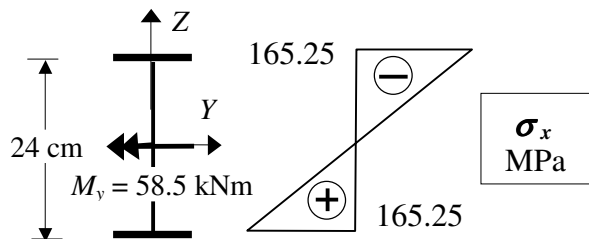
$$\frac{\max M_y}{W_y} \leq R \rightarrow W_y \geq \frac{\max M_y}{R} \rightarrow W_y \geq \frac{58.5 \cdot 10^3}{175 \cdot 10^6} = 0.334 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 334 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto I 240, którego $W_y = 354 \text{ cm}^3$.

Przy tak przyjętych wymiarach przekroju poprzecznego naprężenia normalne w skrajnych włóknach przekroju maksymalnego momentu zginającego (środek rozpiętości belki) wynoszą:

$$\sigma_x^{\text{górne}} = -\frac{M_y}{W_y} = -\frac{58.5 \cdot 10^3}{354 \cdot 10^{-6}} = -165.25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{\text{dolne}} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{58.5 \cdot 10^3}{354 \cdot 10^{-6}} = 165.25 \text{ MPa}$$



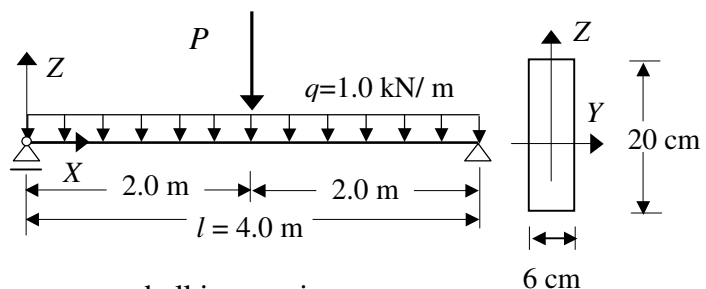
a ich rozkład pokazuje rysunek obok.

Przez nośność przekroju na zginanie rozumiemy największy moment zginający, który przyłożony do przekroju nie wywołuje w żadnym jego punkcie naprężeń normalnych większych od wytrzymałości obliczeniowej jego materiału.

Nośność na zginanie, przyjętego dwuteownika, wyznaczymy z warunku stanu granicznego nośności:

$$\frac{\max M_y}{W_y} \leq R \rightarrow \max M_y \leq W_y R \rightarrow \max M_y \leq 354 \cdot 175 = 61950 \text{ Nm.}$$

Przykład 11.6.2. Jaką dodatkową siłą P można obciążyć pokazaną drewnianą belkę aby naprężenia normalne nie przekroczyły wytrzymałości obliczeniowej $R = 10 \text{ MPa}$.



Rozwiązanie

Wskaźnik wytrzymałości przekroju poprzecznego belki wynosi:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 20^2}{6} = 400 \text{ cm}^3.$$

Maksymalny moment zginający w belce (wystąpi on w środku jej rozpiętości) wynosi:

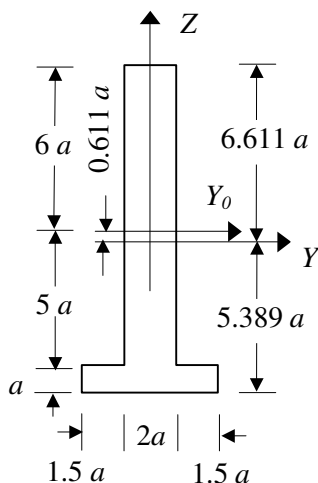
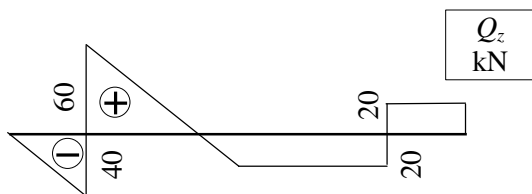
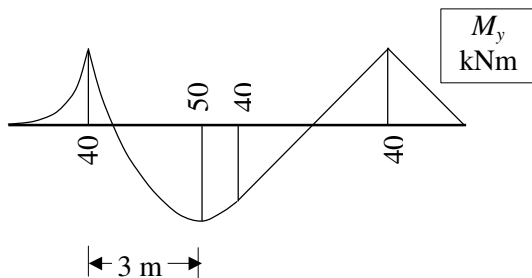
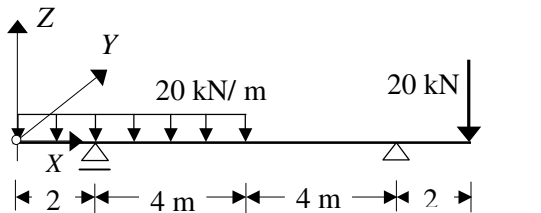
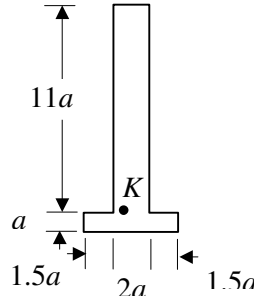
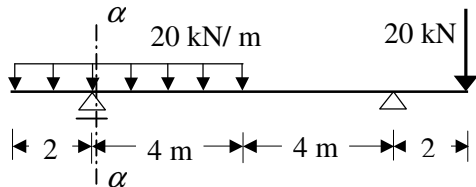
$$\max M_y = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4}.$$

Warunek stanu granicznego nośności daje:

$$\frac{\max M_y}{W_y} \leq R \rightarrow \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4} \leq W_y R \rightarrow \frac{10^3 \cdot 4^2}{8} + \frac{P \cdot 4}{4} \leq 400 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^6 \rightarrow P \leq 2000 \text{ N.}$$

Przykład 11.6.3. Wyznaczyć wymiary przekroju poprzecznego belki ze względu na stan graniczny nośności jeśli wytrzymałości obliczeniowe stali są równe $R = 175 \text{ MPa}$ oraz $R_t = 0.6R$.

Po przyjęciu wymiarów wyznaczyć wykres naprężeń normalnych i stycznych w przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ oraz naprężenia główne i ich kierunki w punkcie K tego przekroju.



Rozwiązanie

Zacniemy od wyznaczenia wartości sił przekrojowych. Na wykresach pokazanych obok zaznaczone są ich wartości w punktach charakterystycznych jak i ich ekstremalne wartości.

$$\max M_y = 50.0 \text{ kNm}, \quad \max Q_z = 60.0 \text{ kN.}$$

Następnie przejdziemy do wyznaczenia potrzebnych charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego belki.

Potrzebujemy wyznaczyć główne centralne osie bezwładności. Oś Z , jako oś symetrii jest jedną z nich, druga oś Y jest do niej prostopadła i przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Musimy go wyznaczyć.

Pole przekroju:

$$A = 12a \cdot 2a + 2 \cdot 1.5a \cdot a = 27a^2$$

Moment statyczny względem dowolnie przyjętej osi Y_0 :

$$S_{y_0} = 2 \cdot 1.5a^2 (-5.5a) = -16.5a^3$$

Współrzędna środka ciężkości w układzie (Y_0, Z) :

$$z_0 = S_{y_0} / A = -16.5a^3 / 27a^2 = -0.611a$$

Główna centralna oś Y w tym zadaniu jest osią zginania i osią obojętną naprężeń normalnych.

Moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi obojętnej

$$J_y = \frac{2a * (12a)^3}{12} + 2a * 12a * (0.611a)^2 + 2 \left[\frac{1.5a * a^3}{12} + 1.5a * a * (4.889a)^2 \right] = 368.917 a^4$$

Wskaźnik wytrzymałości

$$W_y = \frac{J_y}{\max |z|} = \frac{368.917 a^4}{6.611 a} = 55.804 a^3$$

Potrzebny wymiar ze względu na naprężenia normalne.

Największe (co do bezwzględnej wartości) naprężenia normalne wystąpią w przekroju maksymalnego momentu zginającego we włóknach górnych.

$$\frac{\max M_y}{W_y} \leq R \rightarrow W_y \geq \frac{\max M_y}{R} \rightarrow 55.804 a^3 \geq \frac{50 * 10^3}{175 * 10^6} \rightarrow a \geq 0.0172 \text{ m} = 1.72 \text{ cm.}$$

Potrzebny wymiar ze względu na naprężenia styczne.

Największe (co do bezwzględnej wartości) naprężenia styczne wystąpią w przekroju maksymalnej siły poprzecznej (na prawo od lewej podpory) we włóknach na osi Y .

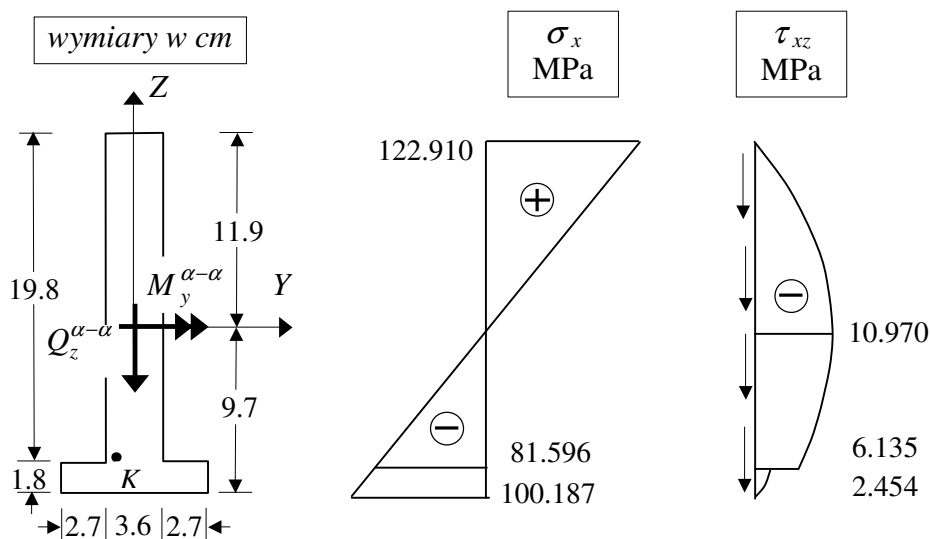
Moment statyczny części przekroju powyżej włókien w których wyznaczamy naprężenia:

$$S_y(0) = 6.611a * 2a * 6.611a / 2 = 43.705 a^3$$

$$\frac{\max Q_z S_y(0)}{J_y b(0)} \leq R_t \rightarrow \frac{60 * 10^3 * 43.705 a^3}{368.917 a^4 * 2a} \leq 0.6 * 175 * 10^6 \rightarrow a \geq 5.82 * 10^{-3} \text{ m} = 0.582 \text{ cm.}$$

Przyjęto do wykonania $a = 1.8 \text{ cm}$.

Wyznamy teraz wykresy naprężeń normalnych i stycznych w przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ gdzie moment zginający ma wartość $M_y^{\alpha\text{-}\alpha} = 40 \text{ kN}$ i rozciąga włókna górne a siła poprzeczna jest dodatnia i ma wartość $Q_z^{\alpha\text{-}\alpha} = 60 \text{ kN}$ (patrz rysunek niżej).



Moment bezwładności względem osi obojętnej:

$$J_y = 368.917 * 1.8^4 = 3872.743 \text{ cm}^4.$$

Wartości naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_y} z = \frac{40 * 10^3}{3872.743 * 10^{-8}} z$$

$$\sigma_x^{\text{górne}} = \frac{40 * 10^3}{3872.743 * 10^{-8}} 11.90 * 10^{-2} = 122.910 \text{ MPa},$$

$$\sigma_x^{\text{dolne}} = \frac{40 * 10^3}{3872.743 * 10^{-8}} (-9.70 * 10^{-2}) = -100.187 \text{ MPa},$$

$$\sigma_x^K = \frac{40 * 10^3}{3872.743 * 10^{-8}} (-7.90 * 10^{-2}) = -81.596 \text{ MPa}.$$

Wartości naprężeń stycznych:

włókna górne i dolne: $z = 11.90$ oraz (-9.70) cm

$$\tau_{xz} = 0$$

włókna na osi obojętnej: $z = 0$

$$S_y(0) = 11.9 * 3.6 * 11.9 / 2 = 254.898 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz} = - \frac{Q^{\alpha-\alpha} S_y(0)}{J_y b(0)} = - \frac{60 * 10^3 * 254.898 * 10^{-6}}{3872.743 * 10^{-8} * 3.6 * 10^{-2}} = -10.970 \text{ MPa}$$

włókna: $z = -7.90$ cm

Moment statyczny, względem osi obojętnej, wchodzący do licznika wzoru na naprężenia styczne można policzyć od części przekroju znajdującej się poniżej włókien (tak jest prościej) biorąc jednak do dalszych obliczeń jego bezwzględną wartość gdyż zwrot naprężeń stycznych generuje zwrot siły poprzecznej i przy przyjętym układzie współrzędnych jest on ujemny, co zostało już uwzględnione w znaku we wzorze na naprężenia.

$$S_y(-7.9) = 9.0 * 1.8 * 8.8 = 142.56 \text{ cm}^3$$

Dla tej współrzędnej z występuje skokowa zmiana szerokości przekroju dlatego też wystąpią dwie wartości naprężeń stycznych.

$$\tau_{xz} = - \frac{60 * 10^3 * 142.56 * 10^{-6}}{3872.743 * 10^{-8} * 3.6 * 10^{-2}} = -6.135 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz} = - \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 142.56 \cdot 10^{-6}}{3872.743 \cdot 10^{-8} \cdot 9.0 \cdot 10^{-2}} = - 2.454 \text{ MPa.}$$

Obliczenie naprężeń głównych i ich kierunków w punkcie K przekroju $\alpha\text{-}\alpha$.

W tym punkcie występuje płaski stan naprężenia (wszystkie wektory naprężeń przypisane dowolnym płaszczyzną przecięcia leżą w płaszczyźnie (X, Z)) określony macierzą naprężeń:

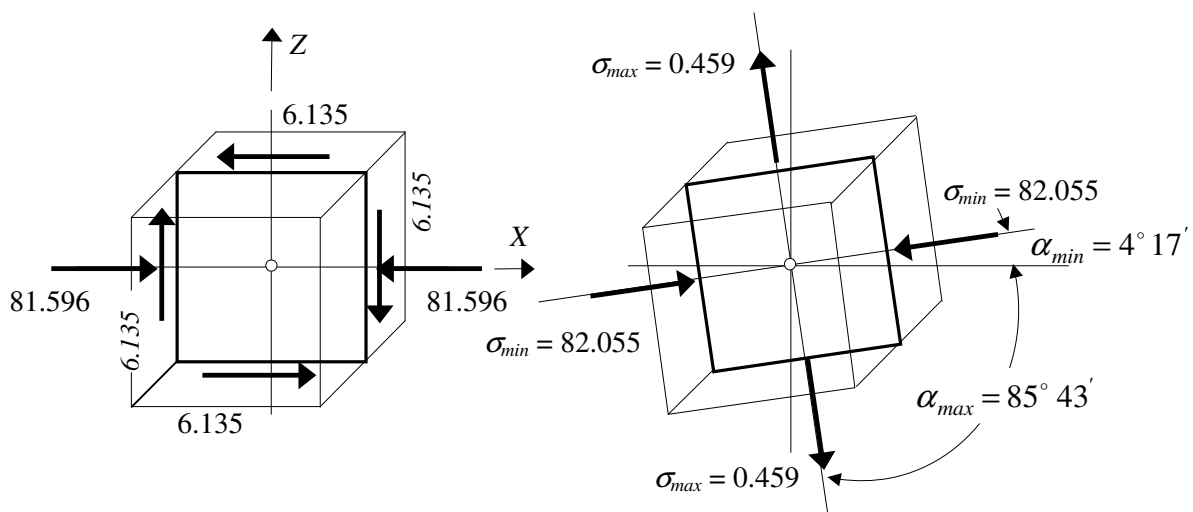
$$T_{\sigma}^K = \begin{pmatrix} -81.596 & -6.135 \\ -6.135 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^K = \frac{\sigma_x^K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^K}{2}\right)^2 + (\tau_{xz}^K)^2} = \frac{-81.596}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-81.596}{2}\right)^2 + (-6.135)^2}$$

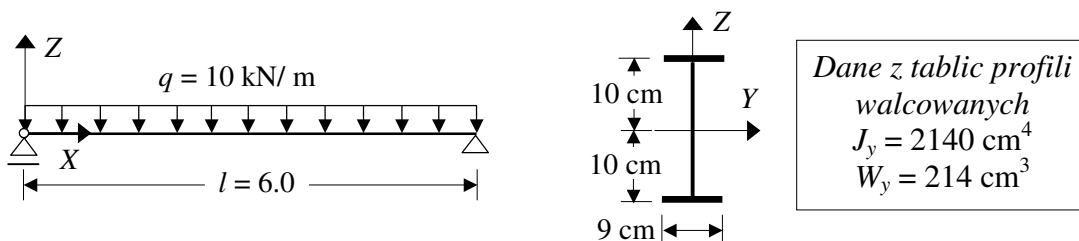
$$\sigma_{\max}^K = 0.459 \text{ MPa, } \sigma_{\min}^K = -82.055 \text{ MPa.}$$

$$\text{tg } \alpha_{\max} = \frac{\tau_{xz}^K}{\sigma_{\max}^K} = \frac{-6.135}{0.459} = -13.3660 \rightarrow \alpha_{\max} = -85^{\circ} 43'$$

$$\text{tg } \alpha_{\min} = \frac{\tau_{xz}^K}{\sigma_{\min}^K} = \frac{-6.135}{-82.055} = 0.0748 \rightarrow \alpha_{\min} = 4^{\circ} 17'$$



Przykład 11.6.4. Wyznaczyć wymiary płaskownika, który należy przyspawać do póltek dwuteowej stalowej belki I 200 pokazanej na rysunku w celu zapewnienia jej potrzebnej nośności. Wytrzymałość obliczeniowa stali $R = 150 \text{ MPa}$.



Rozwiązanie

Maksymalny moment zginający działający na belkę:

$$\max M_y = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 45.00 \text{ kNm}$$

Maksymalny dopuszczalny moment zginający, który dany przekrój dwuteowy może przenieść:

$$\text{dop } M_y = W_y R = 214 \cdot 10^{-6} \cdot 150 \cdot 10^6 = 32100 \text{ Nm} = 32.10 \text{ kNm.}$$

Belka nie może przenieść zadanego obciążenia, jej przekrój wymaga wzmocnienia.

Przyjęto do wzmocnienia dwa płaskowniki o wymiarach 7.0*0.8 cm przyspawane do pólki dwuteownika.

Moment bezwładności wzmocnionego przekroju względem osi obojętnej:

$$J_y = 2140 + 2 \left(\frac{7 \cdot 0.8^3}{12} + 7 \cdot 0.8 \cdot 10.4^2 \right) = 2140 + 1211.39 + 0.60 = 3351.99 \text{ cm}^4$$

Wskaźnik wytrzymałości wzmocnionego przekroju:

$$W_y = 3351.99 / 10.80 = 310.37 \text{ cm}^3.$$

Dopuszczalny moment zginający który może przenieść wzmocniony przekrój (nośność przekroju na zginanie):

$$\text{dop } M_y = W_y R = 310.37 \cdot 10^{-6} \cdot 150 \cdot 10^6 = 46555.50 \text{ Nm} = 46.56 \text{ kNm.}$$

Nośność wzmocnionego przekroju na zginanie jest większa od maksymalnego momentu zginającego działającego w przekroju.

Płaskowniki wzmacniające przekrój belki potrzebne są tylko na długości belki gdzie występuje moment zginający większy od 32.10 kNm.

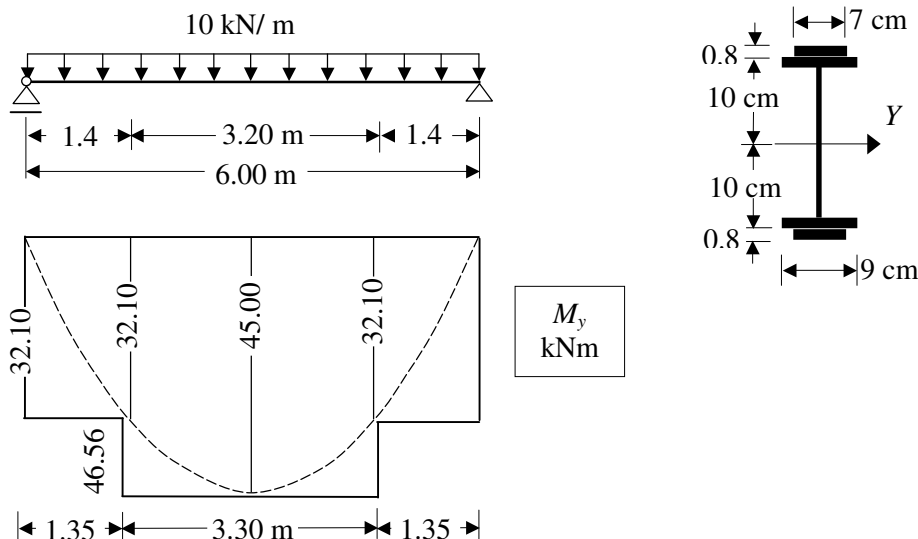
Miejsce występowania tego momentu:

$$M(x) = 30x - 10 \frac{x^2}{2} = 32.10 \rightarrow x^2 - 6x + 6.42 = 0 \rightarrow x_1 = 1.40 \text{ m}, x_2 = 4.60 \text{ m.}$$

Dano ostatecznie dwa płaskowniki 7*0.8 cm na długości 3.30 m.

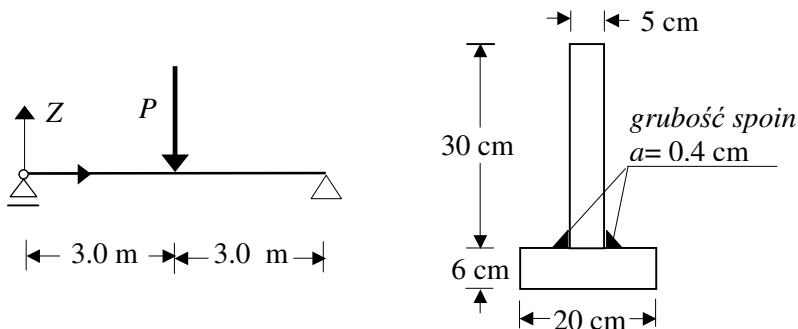
Na rysunku poniżej linią przerywaną narysowano wykres momentów zginających działających na belkę, linia ciągła pokazuje wartości momentów, które belka może przenieść.

Wykres narysowany linią ciągłą musi obejmować wykres narysowany linią przerywaną.



Przykład 11.6.5. Dla spawanej belki o symetrycznym przekroju teowym jak rysunku wyznaczyć największą dopuszczalną wartość siły P (nośność belki) ze względu na:

- naprężenia normalne jeśli $R = 175 \text{ MPa}$
- naprężenia styczne przy ścinaniu spoin jeśli $R_{ts} = 105 \text{ MPa}$.

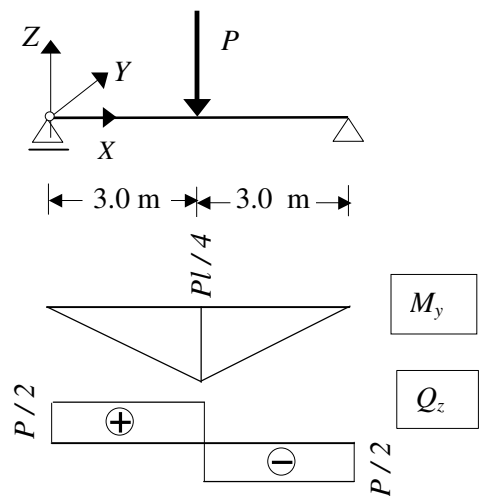


Rozwiązanie

Z pokazanych obok wykresów momentów i sił poprzecznych wynika, że:

$$\max M_y = \frac{Pl}{4},$$

$$\max Q_z = \frac{P}{2}.$$

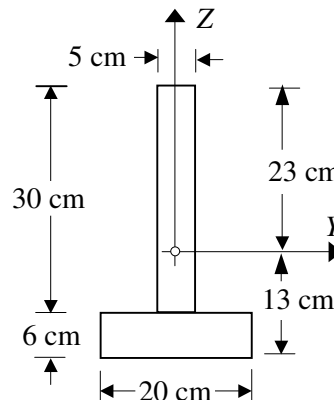


Wyznaczenie osi głównych centralnych i potrzebnych charakterystyk geometrycznych nie powinno stanowić trudności.

Ich położenie pokazuje rysunek obok a moment bezwładności i wskaźnik wytrzymałości względem osi zginania wynoszą:

$$J_y = 33210.00 \text{ cm}^4,$$

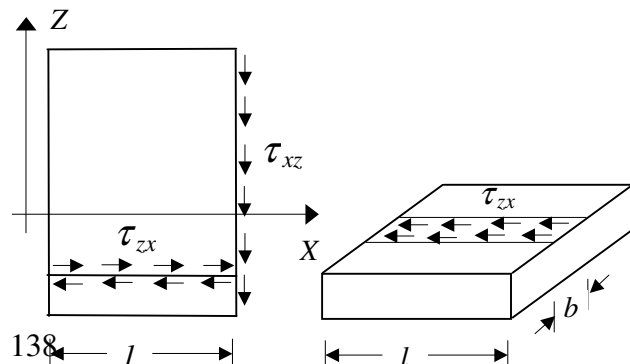
$$W_y = \frac{J_y}{\max |z|} = \frac{33120}{23} = 1443.913 \text{ cm}^3.$$



Nośność belki ze względu na naprężenia normalne:

$$\frac{\max M_y}{W_y} \leq R \rightarrow \max M_y \leq W_y R \rightarrow \frac{P6}{4} \leq 1443.913 \cdot 10^{-6} \cdot 175 \cdot 10^6 \rightarrow P \leq 252.685 \text{ kN}$$

W celu wyznaczenia nośności belki ze względu na ścinanie spoin policzymy w pierw siłę rozwarstwiająca między stopką a środnikiem na jednostkę długości belki.



Zakładając równomierny rozkład naprężeń stycznych (patrz rysunek obok) siła ta jest równa:

$$T = \tau_{zx} * b * l = \frac{Q_z S_y}{J_y b} b = \frac{Q_z S_y}{J_y},$$

gdzie: $Q_z = P/2$, $S_y = 6 * 20 * 10 * 10^{-6} = 1200 * 10^{-6} \text{ m}^3$ (to moment statyczny półki względem osi zginania).

Tą siłą muszą przenieść dwie spoiny, których powierzchnia ścinania na jednostkowej długości wynosi: $A_{sp} = 2 * a * l = 2 * 0.4 * 10^{-2} = 0.80 * 10^{-2} \text{ m}^2$.

Przy założeniu równomiernego rozkładu naprężeń ścinających w spoinach, naprężenia winny spełniać warunek:

$$\frac{T}{A_{sp}} \leq R_{ts}.$$

Stąd nośność belki ze względu na ścinanie spoin wynosi:

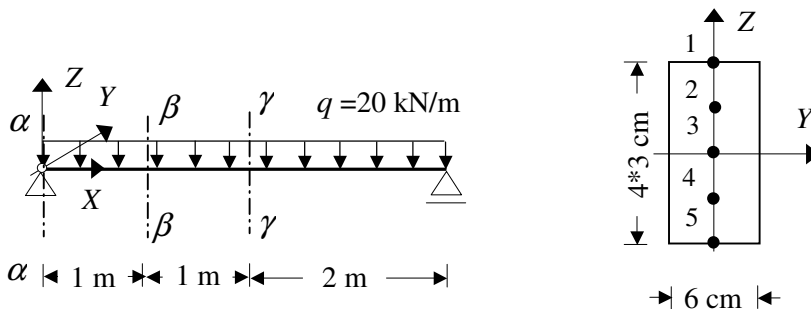
$$T \leq R_{ts} A_{sp} \rightarrow \frac{Q_z S_y}{J_y} \leq R_{ts} A_{sp} \rightarrow$$

$$P \leq \frac{2 * J_y R_{ts} A_{sp}}{S_y} = \frac{2 * 33210 * 10^{-8} * 105 * 10^6 * 0.8 * 10^{-2}}{1200 * 10^{-6}} = 464.940 \text{ kN}.$$

Zatem największa dopuszczalna siła jaką można obciążyć analizowaną belkę ma wartość 252.685 kN.

Przykład. 11.6.6. Dla belki o schemacie i przekroju jak na rys. wyznaczyć w przekrojach $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ i $\gamma - \gamma$:

- rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju poprzecznym,
- naprężenia główne i ich kierunki oraz maksymalne naprężenia styczne τ_{max} w zaznaczonych pięciu punktach po wysokości przekroju,



Rozwiązanie

Wykresy sił przekrojowych wraz ich wartościami w zadanych przekrojach pokazane są obok.

Potrzebne do wyznaczenia naprężeń wartości charakterystyk geometrycznych wynoszą: moment bezwładności względem osi obojętnej

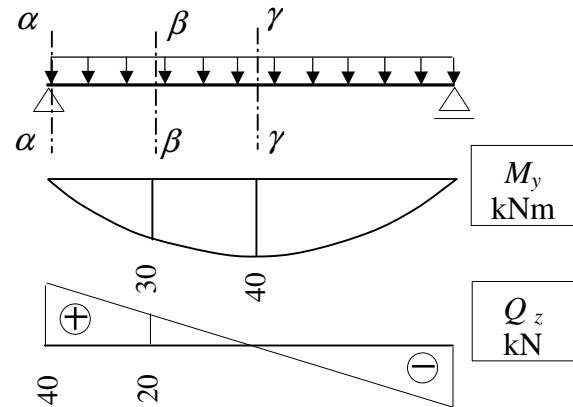
$$J_y = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864.00 \text{ cm}^4,$$

momenty statyczne wchodzące do wzoru na naprężenia styczne w zadanych kolejnych punktach przekroju

$$S_{y,1} = S_{y,5} = 0,$$

$$S_{y,2} = S_{y,4} = 3 \cdot 6 \cdot 4.5 = 81.00 \text{ cm}^3,$$

$$S_{y,3} = 6 \cdot 6 \cdot 3 = 108.00 \text{ cm}^3$$



Przekrój $\alpha - \alpha$ (przekrój podporowy)

$$M_y = 0, \quad Q_z = 40.00 \text{ kN}$$

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym σ_x wobec zerowania się momentu zginającego są równe zero.

Naprężenia styczne w przekroju poprzecznym:

$$\tau_{xz} = -\frac{Q_z S_y(z)}{J_y b(z)}$$

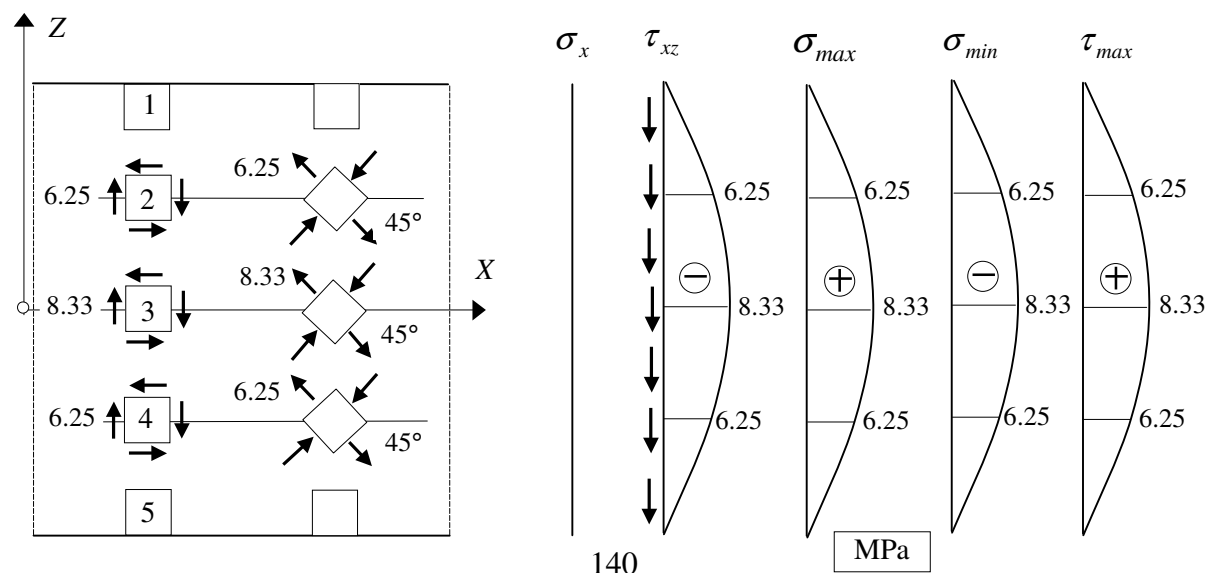
$$\tau_{xz,1} = \tau_{xz,5} = 0, \quad \tau_{xz,2} = \tau_{xz,4} = -\frac{40 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-6}}{864 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = -6.25 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz,3} = -\frac{40 \cdot 10^3 \cdot 108 \cdot 10^{-6}}{864 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = -8.33 \text{ MPa}.$$

Naprężenia główne i ich kierunki

W przekroju występuje czyste ścinanie i naprężenia główne w każdym punkcie są równe występującym w nim naprężeniom ścinającym a ich kierunki nachylone są pod kątem 45° do osi Y (patrz rys. niżej na którym opisane są tylko wartości σ_{max}).

Maksymalne naprężenia styczne są w tym przypadku równe naprężeniom stycznym w przekroju poprzecznym.



Przekrój $\beta - \beta$

$$M_y = 30.00 \text{ kNm}, Q_z = 20.00 \text{ kN},$$

w przekroju występuje poprzeczne zginanie i w ogólności każdy punkt tego przekroju (z wyjątkiem skrajnych) znajduje się w płaskim stanie naprężenia, którego płaszczyzną jest płaszczyzna (X, Z) .

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J_y} z$$

$$\sigma_{x,1} = -\frac{30 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} 6 \cdot 10^{-2} = -208.33 \text{ MPa}, \quad \sigma_{x,2} = -\frac{30 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} 3 \cdot 10^{-2} = -104.17 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x,3} = 0, \quad \sigma_{x,4} = -\frac{30 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} (-3 \cdot 10^{-2}) = 104.17 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,5} = -\frac{30 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} (-6 \cdot 10^{-2}) = 208.33 \text{ MPa}$$

Naprężenia styczne w przekroju poprzecznym

$$\tau_{xz} = -\frac{Q_z S_y(z)}{J_y b(z)}$$

$$\tau_{xz,1} = \tau_{xz,5} = 0, \quad \tau_{xz,2} = \tau_{xz,4} = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-6}}{864 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = -3.12 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz,3} = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 108 \cdot 10^{-6}}{864 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = -4.16 \text{ MPa}.$$

Naprężenia główne i ich kierunki

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max}^{\min} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{\max}^{\min}}$$

Punkt 1

$$\sigma_{\max,1} = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max,1} = -\infty, \quad \alpha_{\max,1} = -90^\circ,$$

$$\sigma_{\min,1} = -208.33 \text{ MPa}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min,1} = 0, \quad \alpha_{\min,1} = 0^\circ.$$

Punkt 2

$$\sigma_{\max,2}^{\min,2} = \frac{-104.17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-104.17}{2}\right)^2 + (-3.12)^2}, \quad \sigma_{\max,2} = 0.09 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\min,2} = -104.26 \text{ MPa},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max,2} = \frac{-3.12}{0.09} = -34.67 \rightarrow \alpha_{\max,2} = -89^\circ 50',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min,2} = \frac{-3.12}{-104.26} = 5.27 \cdot 10^{-3} \rightarrow \alpha_{\min,2} = 0^\circ 10'.$$

Punkt 3

$$\sigma_{\max,3} = \pm \sqrt{(-4.16)^2}, \quad \sigma_{\max,3} = 4.16 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\min,3} = -4.16 \text{ MPa},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max,3} = \frac{-4.16}{4.16} = -1 \rightarrow \alpha_{\max,3} = -45^\circ, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min,3} = \frac{-4.16}{-4.16} = 1 \rightarrow \alpha_{\min,3} = 45^\circ.$$

Punkt 4

$$\sigma_{\max,2} = \frac{104.17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{104.17}{2}\right)^2 + (-3.12)^2}, \quad \sigma_{\max,2} = 104.26 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\min,2} = -0.09 \text{ MPa},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max,2} = \frac{-3.12}{104.26} = -5.27 \cdot 10^{-3} \rightarrow \alpha_{\max,2} = -0^\circ 10',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min,2} = \frac{-3.12}{-0.09} = 34.67 \rightarrow \alpha_{\min,2} = 89^\circ 50'.$$

Punkt 5

$$\sigma_{\max,5} = 208.33 \text{ MPa}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max,5} = 0, \quad \alpha_{\max,5} = 0^\circ,$$

$$\sigma_{\min,5} = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min,5} = \infty, \quad \alpha_{\min,5} = 90^\circ.$$

Maksymalne naprężenia styczne :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Punkt 1 i 5

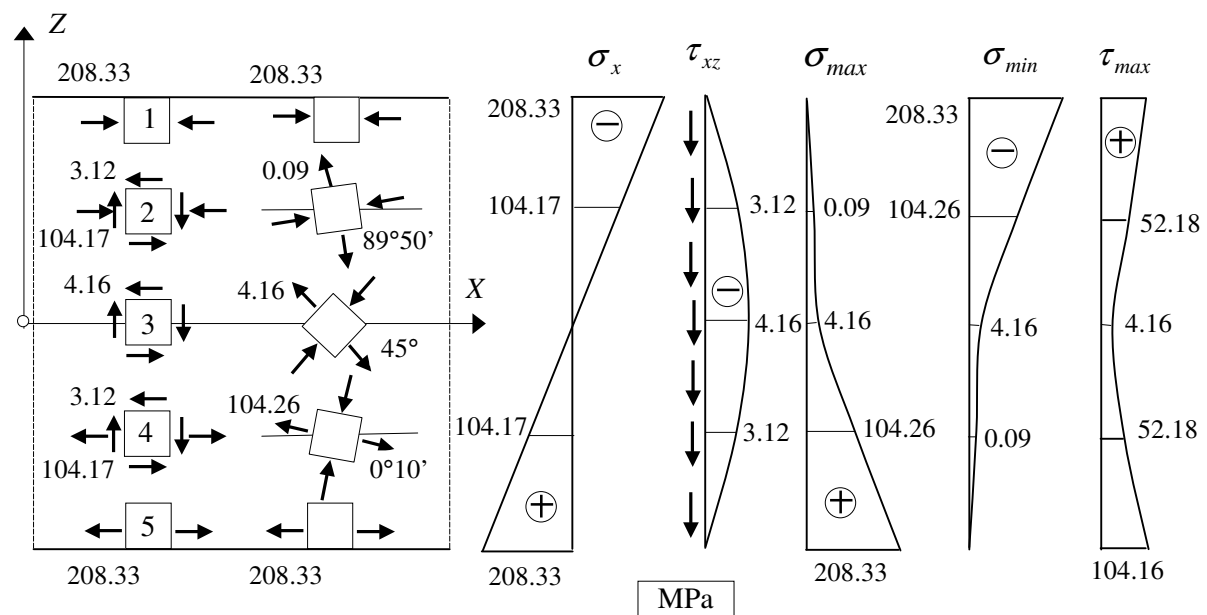
$$\tau_{\max,1} = \tau_{\max,5} = 104.16 \text{ MPa}$$

Punkt 3

$$\tau_{\max,3} = 4.16 \text{ MPa}$$

Punkt 2 i 4

$$\tau_{\max,2} = \tau_{\max,4} = 52.18 \text{ MPa}$$



Przekrój $\gamma - \gamma$ (przekrój w środku rozpiętości)

$$M_y = 40.00 \text{ kNm}, Q_z = 0$$

w przekroju występuje proste zginanie względem osi Y i w każdy punkcie przekroju występuje jednoosiowy stan naprężenia, reprezentowany przez naprężenie σ_x , które jest równocześnie jednym z naprężeń głównych.

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J_y} z$$

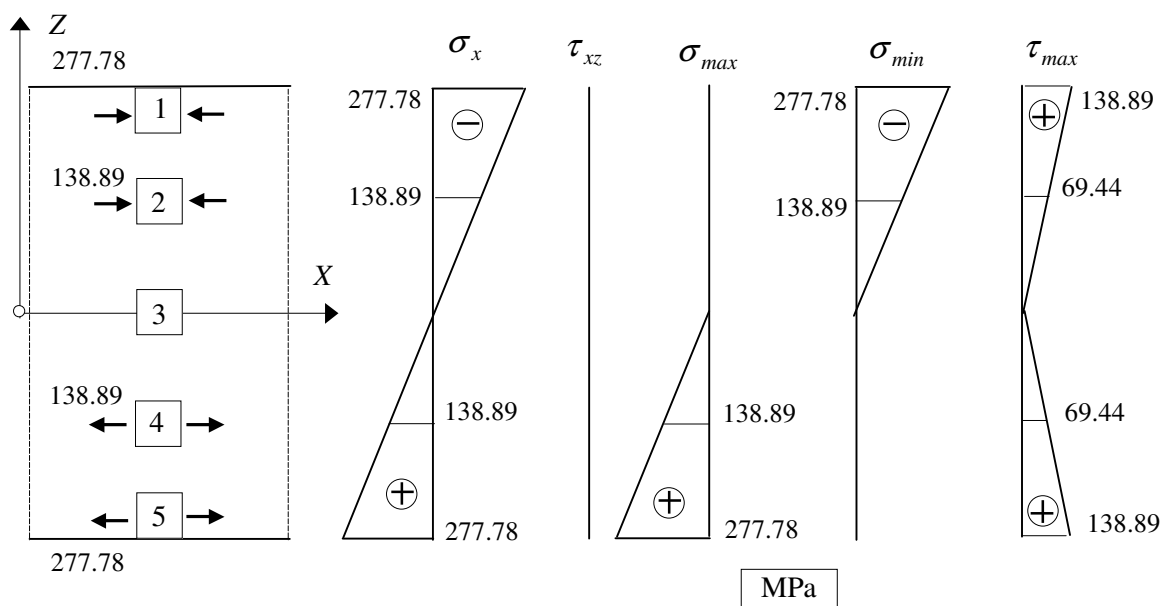
$$\sigma_{x,1} = -\frac{40 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} 6 \cdot 10^{-2} = -277.78 \text{ MPa}, \sigma_{x,2} = -\frac{40 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} 3 \cdot 10^{-2} = -138.89 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x,3} = 0, \sigma_{x,4} = -\frac{40 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} (-3 \cdot 10^{-2}) = 138.89 \text{ MPa},$$

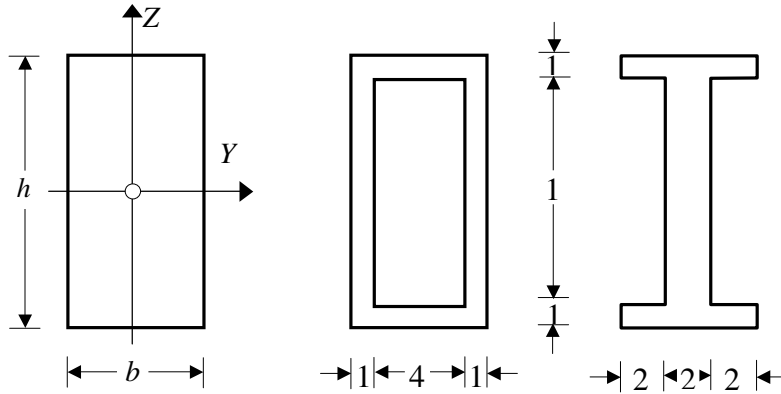
$$\sigma_{x,5} = -\frac{40 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} (-6 \cdot 10^{-2}) = 277.78 \text{ MPa}.$$

Naprężenia styczne w przekroju poprzecznym τ_{xz} wobec zerowania się siły poprzecznej są równe zero.

Wartości naprężeń głównych, ich kierunki oraz maksymalne naprężenia styczne pokazane są niżej.



Przykład 11.6.7. Obliczyć wartość energetycznego współczynnika ścinania κ dla podanych przekrojów.



Prostokąt

$$A = bh; \quad J_y = \frac{bh^3}{12}; \quad b(z) = b; \quad S_y(z) = \frac{bh^2}{8} - \frac{bz^2}{2} = \frac{bh^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2}\right),$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{A}{J_y^2} \iint_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} dA = \frac{bh}{\frac{b^2 h^6}{144}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\frac{b^2 h^4}{64} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2}\right)^2}{b^2} b dz = \frac{9}{4h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - \left(2z/h\right)^2\right]^2 dz = \\ &= \frac{9}{8} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^2 du = \frac{9}{8} \int_{-1}^1 (1 - 2u^2 + u^4) du = \frac{6}{5} = 1.2 \end{aligned}$$

Łatwo i warto zauważyć, że energetyczny współczynnik ścinania dla kwadratu 1*1 będzie też miał wartości 1.2 bo jak widać z powyższych obliczeń jego wielkość nie zależy od b oraz h . Liczenie powyższej całki po obszarze 1*1 jest znacznie prostsze.

Przekrój skrzynkowy i dwuteowy

Wartości energetycznego współczynnika ścinania dla obu przekrojów będą takie same. Obliczenia przeprowadzimy dla przekroju skrzynkowego.

$$A = 6 * 12 - 4 * 10 = 32,$$

$$J_y = \frac{6 * 12^3}{12} - \frac{4 * 10^3}{12} = 530.667,$$

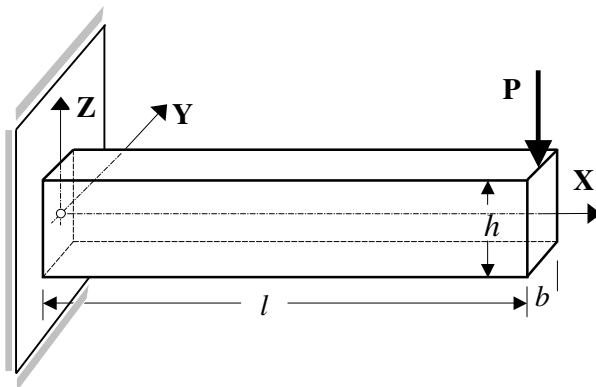
$$b(z) = \begin{cases} 2; & 0 < |z| < 5 \\ 6; & 5 < |z| < 6 \end{cases},$$

$$S_y(z) = \begin{cases} 6 * 1 * 5.5 + 2 * 5 * 2.5 - z^2 = 58 - z^2; & 0 < |z| < 5 \\ 6 * 6 * 3 - 3z^2 = 108 - 3z^2; & 5 < |z| < 6 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{A}{J_y^2} \iint_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} dA = \frac{32}{530.667^2} 2 \left[\int_0^5 \frac{(58-z^2)^2}{2^2} 2 dz + \int_5^6 \frac{(108-3z^2)^2}{6^2} 6 dz \right] = \\ &= 113.633 * 10^{-6} \left[\int_0^5 (58-z^2)^2 dz + 3 \int_5^6 (36-z^2)^2 dz \right] = \\ &= 113.633 * 10^{-6} \left[\int_0^5 (3364 - 116z^2 + z^4) dz + 3 \int_5^6 (1296 - 72z^2 + z^4) dz \right] = \\ &= 113.633 * 10^{-6} (12611.667 + 126.600) = 1.433 + 0.014 = 1.447 \end{aligned}$$

Wynik obliczeń pokazuje, że decydujący wpływ na wielkość κ ma średnik nie pólki. W pokazanym przykładzie udział średnika stanowi $1.433/1.447 = 99\%$.

Przykład 11.6.8. Obliczyć energię sprężystą U dla belki wspornikowej obciążonej jak na rysunku.



$$\begin{aligned} P &= 1.0 \text{ kN}, \quad l = 0.20 \text{ m}, \\ b &= 0.01 \text{ m}, \quad h = 0.02 \text{ m}, \\ E &= 205 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

Policzymy całkowitą energię sprężystą tej belki wykorzystując wzór wyrażający energię sprężystą poprzez siły przekrojowe:

$$U = \sum \int \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx + \sum \kappa \int \frac{Q_z^2(x)}{2GA} dx .$$

$$M(x) = P(x-l); \quad Q(x) = P$$

$$U = \int_0^l \frac{P^2(x-l)^2}{2EJ_y} dx + 1.2 \int_0^l \frac{P^2}{2GA} dx = \frac{P^2 l^3}{6EJ_y} + 1.2 \frac{P^2 l}{2GA}$$

$$A = 0.01 * 0.02 = 2.00 * 10^{-4} \text{ m}^2, \quad J_y = \frac{0.01 * 0.02^3}{12} = 0.667 * 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{205 * 10^9}{2(1+0.3)} = 78.846 * 10^9 \text{ N/m}^2.$$

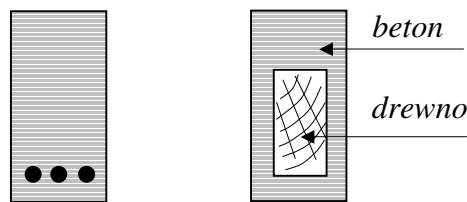
$$U = \frac{10^6 * 0.200^3}{6 * 205 * 10^9 * 0.667 * 10^{-8}} + \frac{1.2 * 10^6 * 0.200}{2 * 78.846 * 10^9 * 2.000 * 10^{-4}} = 0.975 + 0.008 = 0.983 \text{ Nm.}$$

Widoczny jest dominujący wpływ momentów zginających w energii sprężystej, udział sił poprzecznych w tym przykładzie wynosi $0.008/0.983 \approx 0.8\%$ i z reguły jest pomijany w obliczeniach.

11.7. Belki zespolone

11.7.1. Naprężenia normalne w belkach zespolonych

W konstrukcjach budowlanych bardzo często spotykamy się z ustrojami prętowymi wykonanymi z materiałów o różnych własnościach fizycznych, współpracującymi ze sobą na powierzchni styku w sposób ciągły. Takie konstrukcje nazywać będziemy belkami zespolonymi, a typowe ich przykłady jak belka żelbetowa czy obetonowana belka drewniana pokazane są na rys. 11.9.



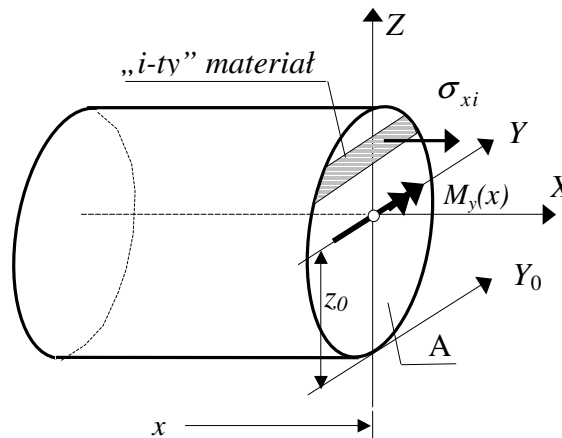
Rys. 11.9

Wyznamy zależności podające rozkład naprężeń normalnych w belkach zespolonych zginanych poprzecznie.

Przy ich wyprowadzaniu przyjmujemy, że:

- spełniona jest zasada płaskich przekrojów Bernoulie'go
- materiały składowe belki są liniowo sprężyste i różnią się jedynie stałymi materiałowymi
- obciążenie i przekrój poprzeczny belki spełnia warunki poprzecznego zginania.

Rozważmy przekrój belki zespolonej pokazany na rys. 11.10, w którym moment zginający jest równy $M_y(x)$. Oś Z jest osią symetrii przekroju, a włókna leżące na płaszczyźnie (X, Y) nie zmieniają swej długości po przyłożeniu obciążenia więc oś Y jest osią obojętną. Jej położenie, na razie nie znane, względem włókien dolnych określa współrzędna z_0 .



Rys. 11.10

Założenie płaskich przekrojów pozwala zapisać równanie geometryczne określające odkształcenia liniowe dowolnych włókien w postaci:

$$\varepsilon_x = a(x)z$$

gdzie: z - współrzędna włókien mierzona od osi obojętnej Y (osi zginania),
 $a(x)$ - krzywizna osi belki.

Liniowo sprężyste fizyczne własności „*i-tego*” materiału powodują, że naprężenia normalne w nim wynoszą:

$$\sigma_{xi} = E_i \varepsilon_x = E_i a(x)z. \quad (11.9)$$

Te naprężenia muszą spełniać równania równoważności odpowiednich układów sił wewnętrznych i zewnętrznych:

$$\iint_A \sigma_x dA = 0,$$

$$\iint_A \sigma_x z dA = M_y(x).$$

Podstawiając do pierwszego z nich (11.9) po kolejnych przekształceniach :

$$\sum_{i=1}^k \iint_{A_i} \sigma_{xi} dA_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^k E_i a(x) \iint_{A_i} z dA_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{E_i}{E_0} \iint_{A_i} z dA_i = 0,$$

otrzymujemy równanie do wyznaczenia osi obojętnej Y :

$$\sum_{i=1}^k n_i S_{yi}(z_0) = 0, \quad (11.10)$$

gdzie: k - ilość materiałów składowych belki,

$$n_i = \frac{E_i}{E_0}, \text{ a } E_0 \text{ to moduł Younga materiału przyjętego za porównawczy,}$$

$$S_{yi}(z_0) = \iint_{A_i} z dA_i \text{ moment statyczny względem osi } Y \text{ pola przekroju zajmowanego przez „}i\text{-ty” materiał.}$$

Podstawiając do drugiego równania równoważności wzór (11.9) i wykonując szereg przekształceń :

$$\sum_{i=1}^k \iint_{A_i} \sigma_{xi} z dA_i = M_y(x) \rightarrow \sum_{i=1}^k E_i a(x) \iint_{A_i} z^2 dA_i = M_y(x) \rightarrow a(x) \sum_{i=1}^k \frac{E_i}{E_0} \iint_{A_i} z^2 dA_i = M_y(x),$$

otrzymujemy równanie do wyznaczenia krzywizny osi belki:

$$a(x) = \frac{M_y(x)}{E_0 J_{yw}} \quad (11.11)$$

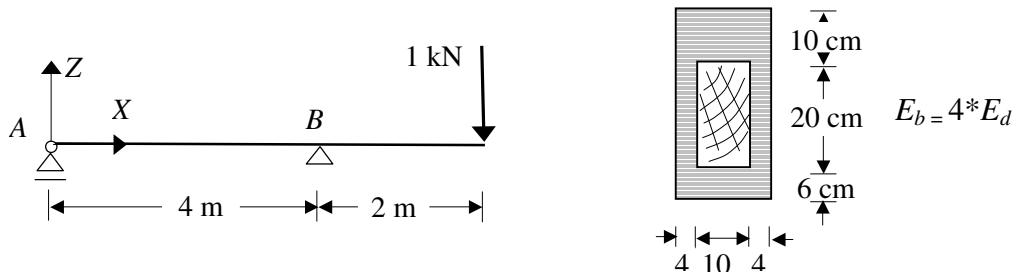
$$\text{gdzie: } J_{yw} = \sum_{i=1}^k n_i \iint_{A_i} z^2 dA_i \text{ - tzw. ważonym moment bezwładności.} \quad (11.12)$$

Podstawiając (11.11) do (11.9) otrzymujemy wzór podający rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym zginanej belce zespolonej:

$$\sigma_{xi} = n_i \frac{M_y(x)}{J_{yw}} z \quad (11.13)$$

11.7.2. Przykłady

Przykład 11.7.2.1. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych na podporze *B* zespolonej belki drewniano-betonowej, pokazanej na rysunku, przyjmując, że moduł Younga betonu E_b jest czterokrotnie większy od modułu Younga drewna E_d .

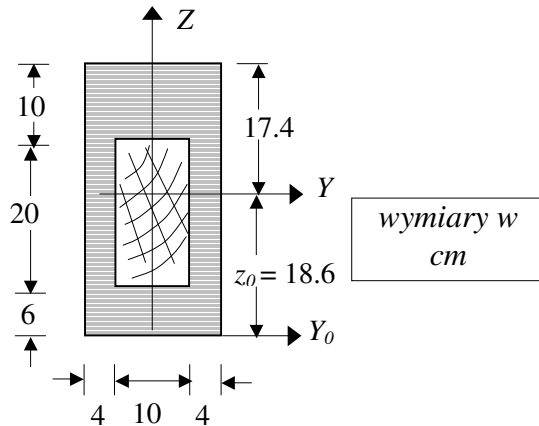


Rozwiązanie

Jako materiał porównawczy przyjmujemy drewno, stąd wielkości dotyczące betonu, przy założonym stosunku E_b/E_d , będą mnożone przez 4.

Położenie osi obojętnej:

$$\sum_{i=1}^2 n_i S_{yi}(z_0) = 0;$$



$$10 * 20 * (16 - z_0) + 4 [18 * 36 * (18 - z_0) - 10 * 20 * (16 - z_0)] = 0 \rightarrow z_0 = 18.60 \text{ cm.}$$

Ważony moment bezwładności względem osi obojętnej *Y*:

$$J_{yw} = \sum_{i=1}^2 n_i J_{yi} = \frac{10 * 20^3}{12} + 10 * 20 * 2.6^2 + 4 \left[\frac{18 * 36^3}{12} + 18 * 36 * 0.6^2 - \left(\frac{10 * 20^3}{12} + 10 * 20 * 2.6^2 \right) \right] = 274813 \text{ cm}^4.$$

Wartości naprężeń normalnych obliczamy ze wzoru:

$$\sigma_{xi} = n_i \frac{M_y}{J_{yw}} z$$

i wynoszą one w betonie:

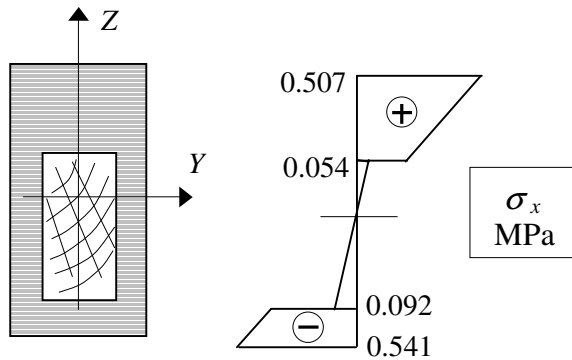
$$\sigma_{xb}^{górne} = 4 \frac{2 * 10^3}{274813 * 10^{-8}} 0.174 = 0.507 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{xb}^{dolne} = 4 \frac{2 * 10^3}{274813 * 10^{-8}} (-0.186) = -0.541 \text{ MPa.}$$

w drewnie:

$$\sigma_{xd}^{górne} = \frac{2 \cdot 10^3}{274813 \cdot 10^{-8}} 0.074 = 0.054 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{xd}^{dolne} = \frac{2 \cdot 10^3}{274813 \cdot 10^{-8}} (-0.126) = -0.092 \text{ MPa.}$$



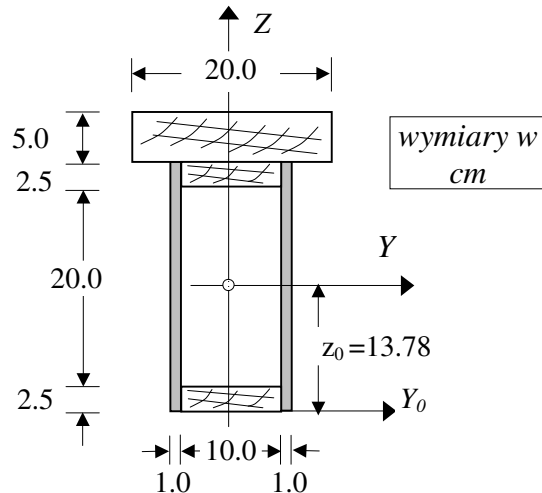
Przykład 11.7.2.2. Wyznaczyć położenie osi obojętnej i ważony moment bezwładności zespolonej belki drewniano-stalowej pokazanej na rysunku jeśli moduł Younga stali $E_s = 205$ GPa a moduł Younga drewna $E_d = 10$ GPa.

Rozwiązanie

Jako materiał porównawczy przyjmujemy drewno stąd wielkości dotyczące stali będą mnożone przez 20.5.

Położenie osi obojętnej:

$$\sum_{i=1}^2 n_i S_y^i(z_0) = 0;$$



$$5 * 20 * (27.5 - z_0) + 2.5 * 10 * (23.75 - z_0) + 2.5 * 10 * (1.25 - z_0) +$$

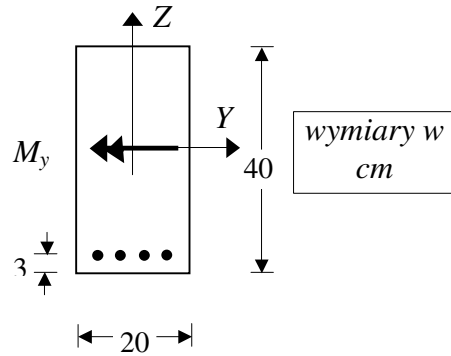
$$+ 2 * 20.5 * 1 * 25 * (12.5 - z_0) = 0 \rightarrow z_0 = 13.78 \text{ cm.}$$

Ważony moment bezwładności względem osi obojętnej:

$$J_{yw} = \sum_{i=1}^2 n_i J_{yi} = \frac{20 * 5^3}{12} + 5 * 20 * 13.72^2 + \frac{10 * 2.5^3}{12} + 2.5 * 10 * 9.97^2 + \frac{10 * 2.5^3}{12} +$$

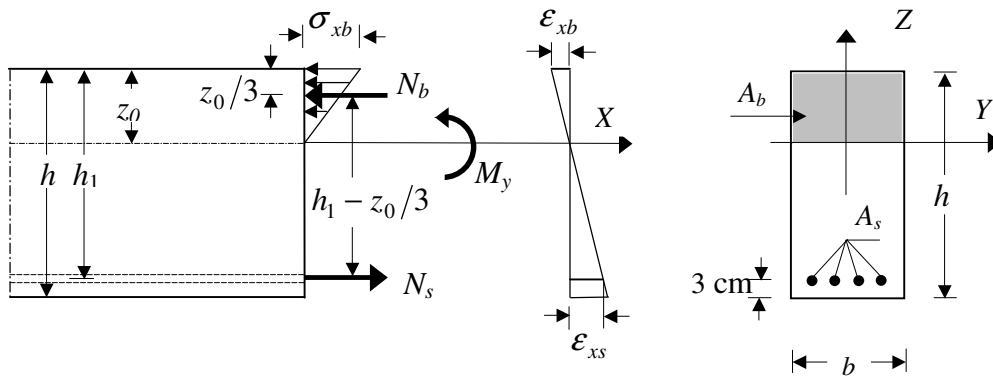
$$+ 2.5 * 10 * 12.53^2 + 2 * 20.5 \left(\frac{1 * 20^3}{12} + 1 * 20 * 1.28^2 \right) = 194.614 \text{ cm}^4.$$

Przykład 11.7.2.3. Wyznaczyć wartości naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym zginanej momentem $M_y = 30 \text{ kNm}$ belki żelbetonowej o przekroju prostokątnym $20 \times 40 \text{ cm}$ i zbrojeniu $4 \varnothing 12 \text{ mm}$ ($A_s = 4.52 \text{ cm}^2$) jak na rysunku, przy założeniu, że beton nie przenosi naprężeń rozciągających. Moduł Younga betonu $E_b = 30 \text{ GPa}$, stali $E_s = 205 \text{ GPa}$



Rozwiązanie

Przy rozwiązaniu zadania przyjmiemy, że spełniona jest zasada płaskich przekrojów, oba materiały składowe tj. beton i stal pracują w zakresie liniowo sprężystym oraz że rozkład naprężeń normalnych w stali ze względu na małą średnicę prętów jest stały.



Niewiadomymi w zadaniu są: wartości naprężeń normalnych w betonie σ_{xb} , stali zbrojeniowej σ_{xs} oraz położenie osi obojętnej (zasięg strefy ściskanej) z_0 .

Do dyspozycji mamy dwa równania równowagi układów sił wewnętrznych i zewnętrznych (wynikających z równań równowagi) i warunek geometryczny w postaci założonej hipotezy płaskich przekrojów.

Równania równowagi:

$$\iint_A \sigma_x dA = 0 \rightarrow -\iint_{A_b} \sigma_{xb} dA_b + \iint_{A_s} \sigma_{xs} dA_s = 0 \rightarrow -N_b + N_s = 0 \rightarrow N_b = N_s \rightarrow \frac{1}{2} \sigma_{xb} z_0 b = \sigma_{xs} A_s \quad (a)$$

$$\iint_A \sigma_x z dA = M_y \rightarrow N_b \left(h_1 - \frac{1}{3} z_0 \right) = M_y \rightarrow \frac{1}{2} \sigma_{xb} z_0 b \left(h_1 - \frac{1}{3} z_0 \right) = M_y, \quad (b)$$

równanie geometryczne:

$$\frac{\varepsilon_{xb}}{z_0} = \frac{\varepsilon_{xs}}{h_1 - z_0}. \quad (c)$$

W powyższych zależnościach N_b i N_s oznaczają wypadkową naprężeń ściskających w betonie i wypadkową naprężeń rozciągających w stali.

Założone liniowo sprężyste własności materiałów pozwalają napisać związki:

$$\sigma_{xb} = E_b \varepsilon_{xb}, \quad \sigma_{xs} = E_s \varepsilon_{xs},$$

które wstawione do równania (c) dają zależność:

$$\sigma_{xs} = n \frac{h_1 - z_0}{z_0} \sigma_{xb} \quad (d)$$

gdzie: $n = E_s / E_b$.

Wstawienie tej zależności do równania (a) daje równanie kwadratowe

$$\frac{1}{2} \sigma_{xb} z_0 b = n \frac{h_1 - z_0}{z_0} \sigma_{xb} A_s \quad \rightarrow \quad z_0^2 + \frac{2n A_s}{b} z_0 - \frac{2n A_s}{b} h_1 = 0,$$

z którego możemy wyznaczyć położenie osi obojętnej w betonie:

$$z_0 = \frac{2n A_s}{b} \left[\sqrt{1 + \frac{2b h_1}{n A_s}} - 1 \right], \quad (e)$$

co z kolei dzięki równaniom (b) i (a), pozwala wyznaczyć wyrażenia określające wielkość naprężeń normalne w betonie i stali :

$$\sigma_{xb} = \frac{2M_y}{b z_0 (h_1 - z_0/3)}, \quad \sigma_{xs} = \frac{M_y}{A_s (h_1 - z_0/3)}. \quad (f)$$

Podstawiając zadane wielkości momentu zginającego, stałych materiałowych i wymiarów przekrojów betonu i stali otrzymujemy:

$$z_0 = \frac{2n A_s}{b} \left[\sqrt{1 + \frac{2b h_1}{n A_s}} - 1 \right] = \frac{2 * 6.833 * 4.52 * 10^{-4}}{0.20} \left[\sqrt{1 + \frac{2 * 0.20 * 0.37}{6.833 * 4.52 * 10^{-4}}} - 1 \right] = 0.185 \text{ m},$$

$$\sigma_{xb} = \frac{2M_y}{b z_0 (h_1 - z_0/3)} = \frac{2 * 30 * 10^3}{0.20 * 0.185 (0.37 - 0.185/3)} = 5.259 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{xs} = \frac{M_y}{A_s (h_1 - z_0/3)} = \frac{30 * 10^3}{4.52 * 10^{-4} (0.37 - 0.185/3)} = 215.260 \text{ MPa}.$$