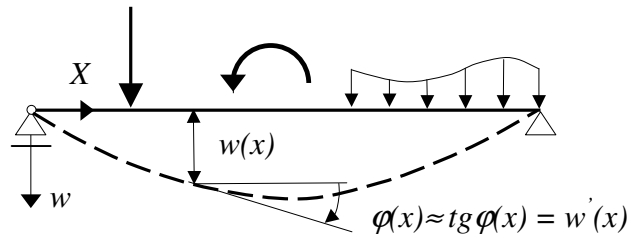


12. UGIĘCIA OSI BELEK ZGINANYCH

12.1. Równanie różniczkowe ugiętej osi belki zginanej poprzecznie

W niniejszym rozdziale zajmiemy się wyznaczeniem przemieszczeń, inaczej ugięć, osi belek zginanych poprzecznie wykonanych z materiału spełniającego równania fizyczne Hooke'a. Rozważmy więc dowolną naszkicowaną na rys. 12.1, belkę zginaną, której konfigurację aktualną zaznaczono linią przerywaną.



Rys. 12.1

Krzywizna poszukiwanej funkcji ugięć spełnia znaną z matematyki zależność:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{[1 + w'^2(x)]^{3/2}}. \quad (12.1)$$

W mianowniku powyższej zależności możemy opuścić pierwszą pochodną funkcji ugięcia, gdyż zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami o małych przemieszczeniach i ich pochodnych, jej wartość będzie znikomo mała w porównaniu z jednością i wzór (11.1) przyjmie postać:

$$\frac{1}{\rho(x)} = |w''(x)|. \quad (12.2)$$

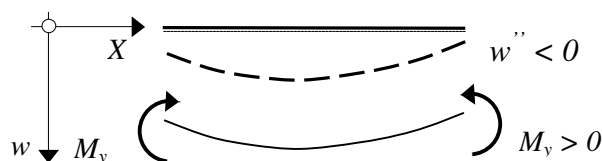
Analizując zagadnienie poprzecznego zginania wyprowadziliśmy związek wiążący krzywiznę belki z momentem zginającym, który możemy zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|M_y(x)|}{EJ_y}. \quad (12.3)$$

Z równości lewych stron zależności (12.2) oraz (12.3) wynika równanie:

$$|w''(x)| = \frac{|M_y(x)|}{EJ_y}. \quad (12.4)$$

Znaki bezwzględnych wartości w równaniu (12.4) będziemy mogli opuścić jeśli będziemy znali znaki występujących w nim wielkości, a to związane jest z układami współrzędnych, w których te wielkości będą wyznaczane.



Rys. 12.2

Jeśli przyjmiemy układy pokazane na rys.12.2, to działaniu dodatniego momentu zginającego $M_y(x)$ (spody na dole belki) odpowiadają ugięcia $w(x)$, których druga pochodna jest ujemna i w tych układach równanie (12.4) przyjmie formę:

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EJ_y}, \quad (12.5)$$

gdzie: E - moduł Younga materiału belki, J_y - moment bezwładności jej przekroju poprzecznego względem głównej centralnej osi bezwładności, do której równoległy jest wektor momentu zginającego (tj. osi zginania). Iloczyn EJ_y nazywany jest sztywnością na zginanie i nazwa ta dobrze oddaje jego sens fizyczny.

Wyznaczenie z równania (12.5) funkcji $w(x)$ przy znanym równaniu momentów zginających $M_y(x)$ nie stanowi merytorycznych trudności.

W dalszej części tego rozdziału, dla uproszczenia zapisu równań, opuścimy indeksy „y” zarówno przy funkcji momentu zginającego jak i momentu bezwładności względem osi zginania.

12.2. Metoda analityczna

Jeśli znana jest funkcja momentów określona jednym równaniem, (a tak zwykle jest, gdyż funkcje momentów zazwyczaj zapisujemy w przedziałach charakterystycznych), wyznaczenie funkcji ugięcia jest bardzo proste, polega ono na dwukrotnym całkowaniu względem x równania (12.5). Po pierwszym całkowaniu otrzymujemy:

$$w'(x) = \int -\frac{M(x)}{EJ} dx + C, \quad (12.6)$$

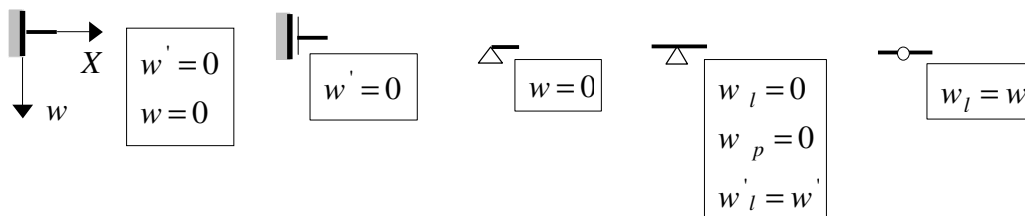
drugie całkowanie daje zależność:

$$w(x) = \int \left\{ \int -\frac{M(x)}{EJ} dx \right\} dx + Cx + D, \quad (12.7)$$

w której C oraz D to stałe całkowania, które możemy wyznaczyć z kinematycznych warunków brzegowych.

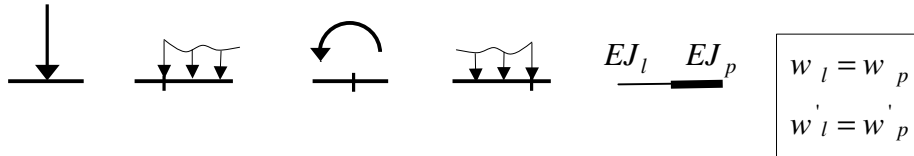
Po wykonaniu całkowania i wyznaczeniu stałych całkowania otrzymujemy poszukiwaną funkcję linii ugięcia belki w rozważanym przedziale. Znamy też jej pierwszą pochodną określoną równaniem (12.6), której interpretacją geometryczną jest tangens kąta zawartego między styczną do krzywej a dodatnim kierunkiem osi X (rys. 12.1). Ponieważ rozważamy, zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami, tylko małe przemieszczenia i małe ich pochodne to $w'(x) = \tan \varphi(x) \approx \varphi(x)$. Kąt $\varphi(x)$ w dalszych rozważaniach nazywać będziemy kątem ugięcia.

Wróćmy do stałych całkowania. W każdym przedziale charakterystycznym, w którym zapisane jest równanie momentów, a potem wykonane całkowanie wystąpią dwie stałe całkowania. Jak już wspomniano możemy je wyznaczyć z kinematycznych warunków brzegowych wynikających z warunków podparcia belki (rys. 12.3),



Rys. 12.3

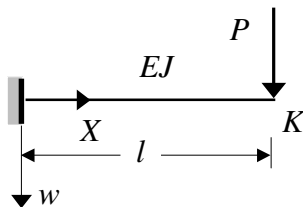
lub sposobu jej obciążenia (rys. 12.4).



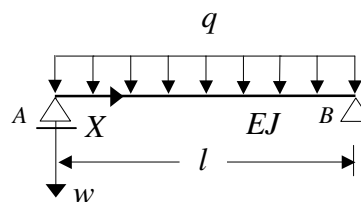
Rys. 12.4

Indeksy przy ugięciach i ich pochodnych w kinematycznych warunkach brzegowych na rys. 12.3 oraz 12.4 informują o przedziałach z lewej i prawej strony rozpatrywanego punktu. Kinematyczne warunki brzegowe pokazane na rys. 12.4 nazywane też bywają „warunkami zszycia” i w sensie fizyczny oznaczają, że w punkcie wspólnym dla obu przedziałów ugięcie i kąt ugięcia muszą być ciągłe. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że przy rozważaniu zagadnienia ugięć, punktami charakterystycznymi stają się dodatkowo (w stosunku do zagadnienia wyznaczania sił przekrojowych tj. momentów zginających, sił poprzecznych i podłużnych) punkty, w których następuje skokowo zmiana sztywności na zginanie oraz przeguby wewnętrzne w belce.

Tok postępowania przy wyznaczaniu ugięcia i kątów ugięcia pokażemy na kilku prostych zadaniach. Zaczniemy od belki wspornikowej, pokazanej na rys. 12.5 o stałej sztywności na zginanie EJ . W belce tej chcemy wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia jej końca K .



Rys. 12.5



Rys.12.6

Funkcję momentów (przy spodach na dole belki) określa równanie: $M(x) = -P(l-x)$.

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma postać: $EJ w''(x) = P(l-x)$.

Całkując dwukrotnie otrzymujemy kolejno:

$$EJ w'(x) = -P(l-x)^2/2 + C,$$

$$EJ w(x) = P(l-x)^3/6 + Cx + D.$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} 1/w'(0) = 0 &\rightarrow \begin{cases} -Pl^2/2 + C = 0 \\ Pl^3/6 + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} C &= Pl^2/2 \\ D &= -Pl^3/6 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{Równanie kątów ugięcia: } w'(x) = \left[-P(l-x)^2/2 + Pl^2/2 \right] / EJ.$$

$$\text{Równanie linii ugięcia: } w(x) = \left[P(l-x)^3/6 + Pl^2x/2 - Pl^3/6 \right] / EJ.$$

Stąd kąt ugięcia i ugięcie końca wspornika wynosi:

$$\varphi_K = w'(l) = Pl^2/2EJ, \quad w_K = w(l) = Pl^3/3EJ.$$

W wolnopodpartej belce pokazanej na rys. 12.6, wyznaczmy maksymalne ugięcie i kąt ugięcia na podporach.

Funkcja momentów (przy spodach na dole belki): $M(x) = qlx/2 - qx^2/2$.

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma postać: $EJ w''(x) = qx^2/2 - qlx/2$.

Całkując dwukrotnie otrzymujemy kolejno:

$$EJ w'(x) = qx^3/6 - qlx^2/4 + C,$$

$$EJ w(x) = qx^4/24 - qlx^3/12 + Cx + D.$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} 1/w(0) = 0 & \rightarrow D = 0 \\ 2/w(l) = 0 & \rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ ql^4/24 - ql^4/12 + Cl = 0 \end{cases} \rightarrow C = ql^3/24 \end{aligned}$$

Równanie kątów ugięcia: $w'(x) = [qx^3/6 - qlx^2/4 + ql^3/24]/EJ$.

Równanie linii ugięcia: $w(x) = [qx^4/24 - qlx^3/12 + ql^3x/24]/EJ$.

Kąty ugięcia na podporach wynoszą:

$$\varphi_A = w'(0) = ql^3/24EJ, \quad \varphi_B = w'(l) = -ql^3/24EJ.$$

Maksymalne (ekstremalne) ugięcie wystąpi w tym punkcie przedziału gdzie zeruje się pierwsza pochodna funkcji ugięcia, czyli tam, gdzie zeruje się kąt ugięcia. W analizowanym przykładzie będzie to:

$$w'(x) = 0 \rightarrow qx^3/6 - qlx^2/4 + ql^3/24 = 0 \rightarrow x = l/2,$$

$$\max w = w(l/2) = 5ql^4/384EJ.$$

Tok postępowania w przypadku większej niż jeden ilości przedziałów całkowania nie zmienia się zasadniczo. Zwiększa się liczba stałych całkowania oraz liczba kinematycznych warunków brzegowych.

Wyznaczmy ugięcie i kąt w środku rozpiętości belki wolnopodpartej pokazanej na rys. 12.7.



Rys. 12.7

Rys.12.8

Zadanie rozwiążemy przyjmując dwa układy współrzędnych (rys. 12.7). Równania momentów, równania różniczkowe linii ugięcia i dalsze po dwukrotnym całkowaniu, zestawione są niżej.

$$0 < x_1 < l/2$$

$$M_1(x_1) = P x_1/2$$

$$EJ w_1''(x_1) = -P x_1/2$$

$$EJ w_1'(x_1) = -P x_1^2/4 + C_1$$

$$EJ w_1(x_1) = -P x_1^3/12 + C_1 x_1 + D_1$$

$$0 < x_2 < l/2$$

$$M_2(x_2) = P x_2/2$$

$$EJ w_2''(x_2) = -P x_2/2$$

$$EJ w_2'(x_2) = -P x_2^2/4 + C_2$$

$$EJ w_2(x_2) = -P x_2^3/12 + C_2 x_2 + D_2$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{cases} 1/w_1(0) = 0 \\ 2/w_1(l/2) = w_2(l/2) \\ 3/w_1'(l/2) = -w_2'(l/2) \\ 4/w_2(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ -Pl^3/96 + C_1 l/2 + D_1 = -Pl^3/96 + C_2 l/2 + D_2 \\ -Pl^2/16 + C_1 = Pl^2/16 - C_2 \\ D_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_1 = D_2 = 0 \\ C_1 = C_2 = Pl^2/16 \end{cases}$$

Ujemny znak w trzecim kinematycznym warunku brzegowym jest konsekwencją różnej skretności przyjętych układów współrzędnych.

Ugięcie i kąt ugięcia w środku rozpiętości belki wynoszą:

$$w_K = w_1(l/2) = Pl^3/48 EJ, \quad \varphi_K = w_1'(l/2) = 0.$$

W zakończeniu prostych zadań wyznaczmy ugięcie końca wspornika o skokowej zmiennej sztywności na zginanie pokazanego na rys. 12.8.

$$0 < x < l/2$$

$$M_1(x) = -P(l-x)$$

$$2EJ w_1''(x) = P(l-x)$$

$$2EJ w_1'(x) = -P(l-x)^2/2 + C_1$$

$$2EJ w_1(x) = P(l-x)^3/6 + C_1 x + D_1$$

$$l/2 < x < l$$

$$M_2(x) = -P(l-x)$$

$$EJ w_2''(x) = P(l-x)$$

$$EJ w_2'(x) = -P(l-x)^2/2 + C_2$$

$$EJ w_2(x) = P(l-x)^3/6 + C_2 x + D_2$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{cases} 1/w_1'(0)=0 \\ 2/w_1(0)=0 \\ 3/w_1'(l/2)=w_2'(l/2) \\ 4/w_1(l/2)=w_2(l/2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -Pl^2/2+C_1=0 \\ Pl^3/6+D_1=0 \\ (-Pl^2/8+C_1)/2EJ = (-Pl^2/8+C_2)/EJ \\ (Pl^3/48+C_1l/2+D_1)/2EJ = (Pl^3/48+C_2l/2+D_2)/EJ \end{cases}$$

$$C_1 = Pl^2/2, \quad D_1 = -Pl^3/6, \quad C_2 = 5Pl^2/16, \quad D_2 = -Pl^3/8.$$

Ugięcie końca belki wynosi:

$$w_K = w_2(l) = 3Pl^3/16EJ.$$

Przy większej ilości przedziałów charakterystycznych wyznaczenie stałych całkowania, których liczba równa się podwojonej ilości przedziałów jest bardzo pracochłonne. Możemy uniknąć tego nadmiernego nakładu pracy stosując pewien specyficzny sposób zapisu funkcji momentów zginających $M(x)$ a potem ich całkowania. Sposób ten zaproponowany przez A. Clebscha w 1862 roku, daje w przypadku belek prostych o stałej sztywności na zginanie EJ zrównanie się stałych całkowania we wszystkich przedziałach i tym samym zredukowanie ich do dwóch (niezależnie od ilości przedziałów), które wyznaczamy z kinematycznych warunków brzegowych wynikających ze sposobu podparcia belki (nie z warunków zszycia).

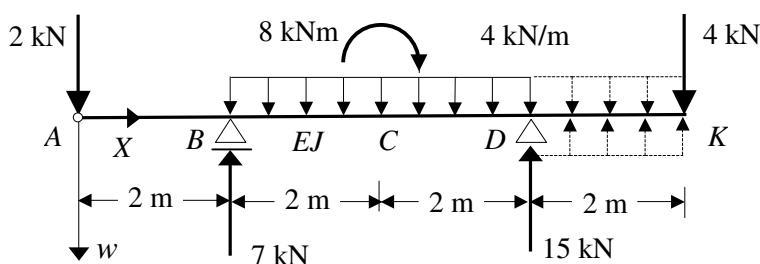
Nie uzasadniając teoretycznie tego sposobu (patrz np. S.Piechnik: Wytrzymałość Materiałów. PWN 1978) podamy niżej wymagania, które muszą być spełnione przy jego stosowaniu:

- równania momentów zginających $M(x)$ muszą być zapisane w jednym układzie, którego początek należy przyjąć na jednym z końców belki,
- wszystkie składniki równania momentów w przedziale (i) muszą się powtórzyć bez zmian w równaniu momentów w przedziale następnym ($i + 1$) a nowe dodatkowe człony muszą zawierać dwumian typu $(x-a_i)^\alpha$ gdzie α jest dowolną potęgą natomiast a_i jest odciętą początku przedziału ($i + 1$),
- całkowanie dwumianów typu $(x-a_i)^\alpha$ należy wykonywać względem zmiennej $(x-a_i)$, tzn. bez otwierania nawiasów.

Dla belek o skokowo zmiennej sztywności na zginanie doprowadzenie liczby stałych całkowania do dwóch jest również możliwe przy zastosowaniu pewnych modyfikacji co wymaga jednak sporego nakładu pracy. Dlatego w takich przypadkach zwykle nie stosuje się sposobu Clebscha wykonując obliczenia, jak to pokazano wyżej, lub stosuje inne metody obliczeń, jak np. metoda Mohra czy jeszcze bardziej ogólna i efektywna metoda Maxwella-Mohra.

12.2.1. Przykłady

Przykład 12.2.1.1. Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia punktu K danej belki.



Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy korzystając ze sposobu Clebscha, dzięki czemu liczba stałych całkowania zredukuje się do dwóch, niezależnie od ilości przedziałów charakterystycznych, których w danym przykładzie mamy cztery.

Zaczynamy od równań momentów zginających. W przedziale AB , przy spodach na dole belki, równanie ma postać:

$$M(x) = -2x \quad \Big|_{AB}$$

W przedziale BC , zgodnie z zasadami podejścia Clebscha, równanie momentów przyjmuje formę:

$$M(x) = -2x + 7(x-2) - 4(x-2)^2/2 \quad \Big|_{BC}$$

Pionowe kreski na końcach równań informują, w jakim przedziale dane równanie jest obowiązujące.

Równanie w przedziale CD ma postać:

$$M(x) = -2x + 7(x-2) - 4(x-2)^2/2 + 8(x-4)^0 \quad \Big|_{CD}$$

Czwarty człon w powyższym równaniu pochodzi od skupionego momentu działającego na belkę. Nawias $(x-4)$ jest konieczny, bo takie są zasady stosowania tego podejścia, a podniesienie go do potęgi zerowej $(x-4)^0$ daje wartość jeden i nie zmienia wartości w równaniu momentów. Równanie w ostatnim przedziale DK wygląda następująco:

$$M(x) = -2x + 7(x-2) - 4(x-2)^2/2 + 8(x-4)^0 + 15(x-6) + 4(x-6)^2/2 \quad \Big|_{DK}$$

Ostatni człon tego równania to fikcyjnie dodane obciążenie ciągłe na odcinku DK . Jego pojawienie się wynika z zasad podejścia, że równanie momentów w przedziale następnym musi zawierać wszystkie człony równania z przedziału poprzedniego. Skoro tak to musiał pozostać trzeci człon równania tj. $-4(x-2)^2/2$, a to oznacza przyjęcie, że obciążenie ciągłe działa do końca belki. Ponieważ w rzeczywistości nie działa ono na odcinku DK , to należało je wyzerować poprzez dodanie fikcyjnego obciążenia. To fikcyjne obciążenie jak i przedłużone do końca belki obciążenie ciągłe z przedziału BD , zaznaczone zostało na rysunku belki linią przerywaną.

Te cztery równania mogą być formalnie zapisane w jednej linijce, nie tracąc nic ze swej ogólności i dając pełną informację o postaci równania momentów w danym przedziale:

$$M(x) = -2x \quad \Big|_{AB} + 7(x-2) - 4(x-2)^2/2 \quad \Big|_{BC} + 8(x-4)^0 \quad \Big|_{CD} + 15(x-6) + 4(x-6)^2/2 \quad \Big|_{DK}$$

Równanie momentów w danym przedziale zawiera człony od znaku „=” do pionowej kreski informującej o punktach określających początek i koniec przedziału. Dotyczyć to będzie również równań ugięć i kątów ugięć.

Postępując analogicznie równania różniczkowe ugiętej osi belki we wszystkich przedziałach możemy zapisać w postaci:

$$EJw''(x) = 2x \quad \Big|_{AB} + 7(x-2) - 4(x-2)^2/2 \quad \Big|_{BC} + 8(x-4)^0 \quad \Big|_{CD} + 15(x-6) + 4(x-6)^2/2 \quad \Big|_{DK}$$

W wyniku dwukrotnego całkowania otrzymujemy:

$$EJw'(x) = \begin{matrix} C + 2x^2/2 & \left|^{AB} - 7(x-2)^2/2 + 4(x-2)^3/6 & \left|^{BC} - 8(x-4) & \left|^{CD} - 15(x-6)^2/2 - 4(x-6)^3/6 & \left|^{DK} \\ EJw(x) = D + Cx + 2x^3/6 & \left| - 7(x-2)^3/6 + 4(x-2)^4/24 & \left| - 8(x-4)^2/2 & \left| - 15(x-6)^3/6 - 4(x-6)^4/24 \end{matrix}$$

Stałe całkowania C oraz D muszą się znaleźć zaraz za znakiem równości gdyż są one obowiązujące dla wszystkich przedziałów charakterystycznych.

Kinematyczne warunki brzegowe, z których możemy wyznaczyć stałe całkowania są następujące:

$$\begin{matrix} 1/w(2)=0 \\ 2/w(6)=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} D + 2C + 2 \cdot 2^3/6 = 0 \\ D + 6C + 2 \cdot 6^3/6 - 7(6-2)^3/6 + 4(6-2)^4/24 - 8(6-4)^2/2 = 0 \end{cases}$$

a wyznaczone z nich stałe mają wartości : $C = -16/3 \text{ kNm}^2$, $D = 8.00 \text{ kNm}^3$.

Poszukiwane wartości kąta ugięcia i ugięcia punktu K wynoszą:

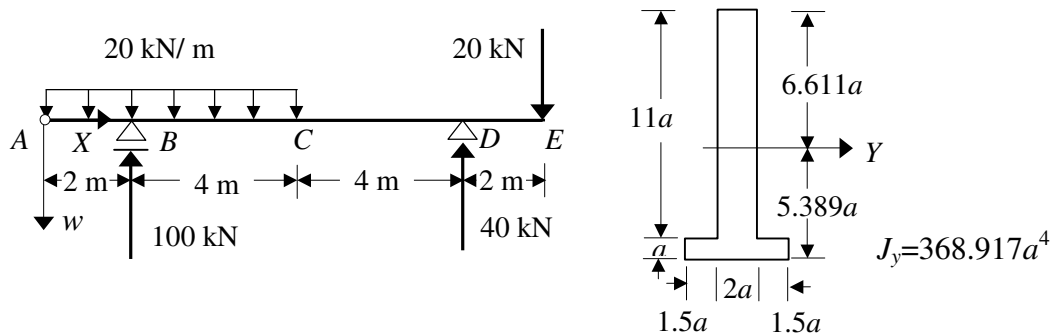
$$\varphi_K = w'(8) = \left[-16/3 + 2 \cdot 8^2/2 - 7 \cdot 6^2/2 + 4 \cdot 6^3/6 - 8 \cdot 4 - 15 \cdot 2^2/2 - 4 \cdot 2^3/6 \right] / EJ$$

$$\varphi_K = \frac{28 \text{ kNm}^2}{3 \cdot EJ} = \frac{9.33 \text{ kNm}^2}{EJ}$$

$$w_K = w(8) = \left[8 - 8 \cdot 16/3 + 2 \cdot 8^3/6 - 7 \cdot 6^3/6 + 4 \cdot 6^4/24 - 8 \cdot 4^2/2 - 15 \cdot 2^3/6 - 4 \cdot 2^4/24 \right] / EJ$$

$$w_K = \frac{40 \text{ kNm}^3}{3 \cdot EJ} = \frac{13.33 \text{ kNm}^3}{EJ}$$

Przykład 12.2.1.2. Wyznaczyć linię ugięcia podanej belki oraz wymiar a jej przekroju poprzecznego z warunku stanu granicznego użytkowania jeśli $w_{dop} = l/250$ oraz $E=205 \text{ GPa}$.



Rozwiązanie

Linię ugięcia belki wyznaczymy korzystając ze sposobu Clebscha, dzięki czemu liczba stałych całkowania zredukuje się do dwóch.

$$\begin{matrix} M(x) = & -20x^2/2 & \left|^{AB} + 100(x-2) & \left|^{BC} + 20(x-6)/2 & \left|^{CD} + 40(x-10) & \left|^{DE} \\ EJw''(x) = & +20x^2/2 & \left| - 100(x-2) & \left| - 20(x-6)^2/2 & \left| - 40(x-10) \\ EJw'(x) = & C + 20x^3/6 & \left| - 100(x-2)^2/2 & \left| - 20(x-6)^3/6 & \left| - 40(x-10)^2/2 \\ EJw(x) = & D + Cx + 20x^4/24 & \left| - 100(x-2)^3/6 & \left| - 20(x-6)^4/24 & \left| - 40(x-10)^3/6 \end{matrix}$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{cases} 1/w(2)=0 \\ 2/w(10)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D + 2C + 20 \cdot 2^4/24 = 0 \\ D + 10C + 20 \cdot 10^4/24 - 100(10-2)^3/6 - 20(10-6)^4/24 = 0 \end{cases}$$

$$C = 53.33 \text{ kNm}^2, \quad D = -119.99 \text{ kNm}^3.$$

Ostatecznie funkcje kątów ugięć i linii ugięcia mają postać:

$$\begin{aligned} EJ w'(x) &= 53.33 + 20x^3/6 \quad \left| \begin{array}{l} AB \\ -100(x-2)^2/2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} BC \\ -20(x-6)^3/6 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} CD \\ -40(x-10)^2/2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} DE \end{array} \right. \\ EJ w(x) &= -119.99 + 53.33x + 20x^4/24 \quad \left| \begin{array}{l} -100(x-2)^3/6 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} -20(x-6)^4/24 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} -40(x-10)^3/6 \end{array} \right| \end{aligned}$$

Ugięcia i kąty ugięcia w punktach charakterystycznych:

$$w'_A = w'(0) = 53.33/EJ, \quad w_A = w(0) = -119.99/EJ,$$

$$w'_B = w'(2) = 80.00/EJ, \quad w_B = w(2) = 0,$$

$$w'_C = w'(6) = -26.67/EJ, \quad w_C = w(6) = 213.32/EJ,$$

$$w'_D = w'(10) = -26.67/EJ, \quad w_D = w(10) = 0,$$

$$w'_E = w'(12) = 13.33/EJ, \quad w_E = w(12) = 0.$$

Powyższe wyniki dowodzą, że maksymalne ugięcie belki wystąpi w przedziale BC w punkcie w którym zeruje się kąt ugięcia

$$53.33 + 20 \cdot x^3/6 - 100 \cdot (x-2)^2/2 = 0 \rightarrow x = 5.404 \text{ m.}$$

$$53.33 + 20 \cdot 5.404^3/6 - 100 \cdot (5.404-2)^2/2 = -0.016 \approx 0$$

Maksymalne ugięcie w belce wynosi:

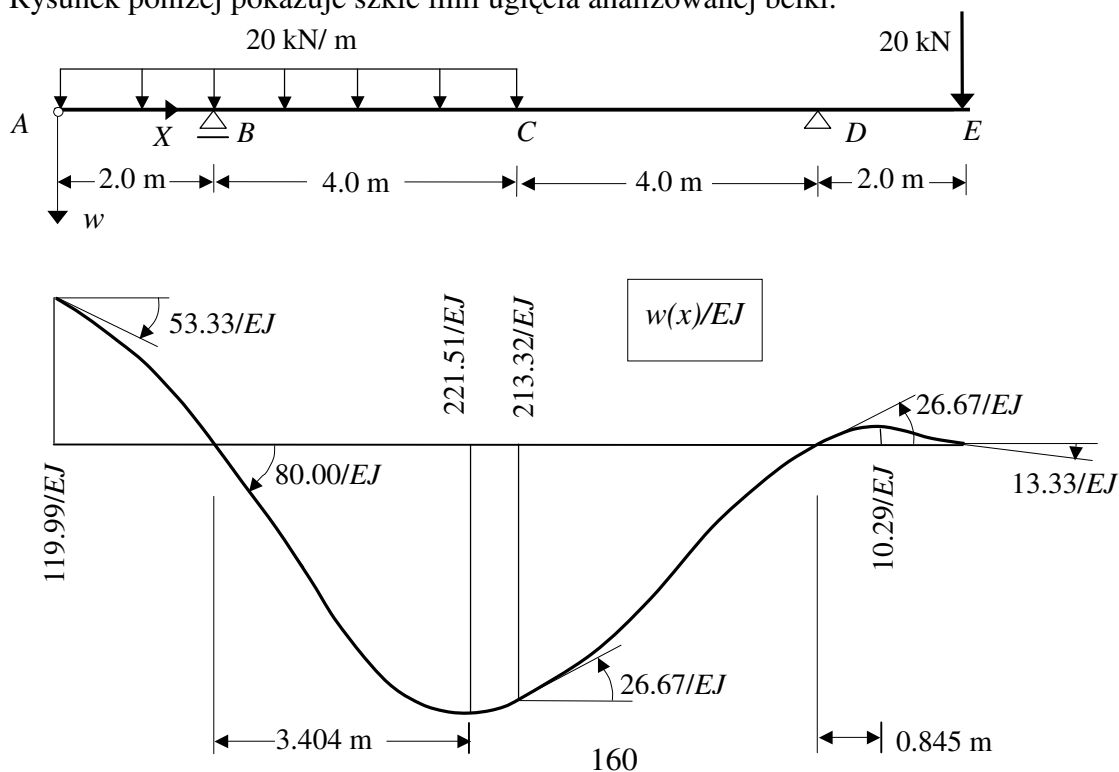
$$\max w = w(5.404) = 221.51/EJ.$$

Największe ugięcie w przedziale DE

$$53.33 + 20 \cdot x^3/6 - 100 \cdot (x-2)^2/2 - 20 \cdot (x-6)^3/6 - 40 \cdot (x-10)^2/2 = 0 \rightarrow x = 10.845 \text{ m.}$$

$$w(10.845) = -10.29/EJ.$$

Rysunek poniżej pokazuje szkic linii ugięcia analizowanej belki.



Wyznaczenie wymiaru a :

$$W_{dop} = l/250 = 8.00/250 = 0.032 \text{ m}$$

$$\max w \leq w_{dop} \rightarrow \frac{221.51}{EJ} \leq w_{dop} \rightarrow J \geq \frac{221.51 \cdot 10^3}{w_{dop} E} \rightarrow 368.917 a^4 \geq \frac{221.51 \cdot 10^3}{0.032 \cdot 205 \cdot 10^9}$$

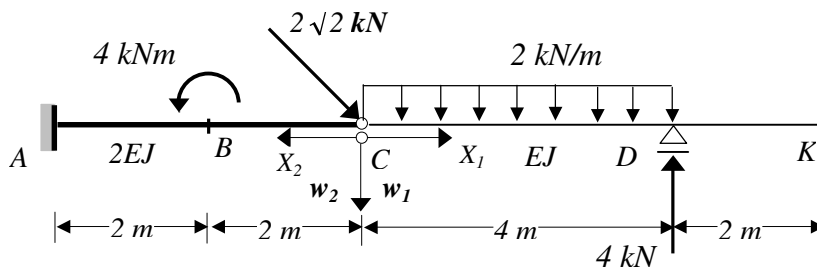
$$a \geq 0.0174 \text{ m.}$$

Przyjęto do wykonania $a = 2.0 \text{ cm}$.

Przy przyjętym wymiarze a maksymalne ugięcie belki wynosi:

$$\max w = \frac{221.52}{EJ} = \frac{221.51 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \cdot 368.917 \cdot 0.02^4} = 0.018 \text{ m.}$$

Przykład 12.2.1.3. Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia punktu K danej belki.



Rozwiązanie

Jeśli przyjmiemy początek układów współrzędnych dla każdej z belek składowych rozważanej belki gerberowskiej w przegubie C , to dla każdej z nich możemy wykorzystać podejście Clebscha i warunek zszycia w tym przegubie. Rozważmy w pierw belkę CK (belka górna w schemacie obliczeniowym, drugorzędna):

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= 4x_1 - 2x_1^2/2 & \Big|^{CD} & + 4(x_1 - 4) + 2(x_1 - 4)^2/2 & \Big|^{DK} \\ EJ w_1''(x_1) &= -4x_1 + 2x_1^2/2 & & - 4(x_1 - 4) - 2(x_1 - 4)^2/2 & \\ EJ w_1'(x_1) &= C_1 - 4x_1^2/2 + 2x_1^3/6 & & - 4(x_1 - 4)^2/2 - 2(x_1 - 4)^3/6 & \\ EJ w_1(x_1) &= D_1 + C_1 x_1 - 4x_1^3/6 + 2x_1^4/24 & & - 4(x_1 - 4)^3/6 - 2(x_1 - 4)^4/24 & \end{aligned}$$

Zajmijmy się teraz belką AC (belka dolna w schemacie obliczeniowym, pierwszorzędna). Przy jej rozważaniu uwzględnimy tylko pionową składową siły pod kątem 45° działającą w przegubie C , gdyż równanie różniczkowe ugiętej osi belki, którym się posługujemy, nie uwzględnia wpływu sił podłużnych na wielkość ugięcia.

$$\begin{aligned} M_2(x_2) &= -6x_2 & \Big|^{CB} & + 4(x_2 - 2)^0 & \Big|^{BA} \\ 2EJ w_2''(x_2) &= +6x_2 & & - 4(x_2 - 2)^0 & \\ 2EJ w_2'(x_2) &= C_2 + 6x_2^2/2 & & - 4(x_2 - 2) & \\ 2EJ w_2(x_2) &= D_2 + C_2 x_2 + 6x_2^3/6 & & - 4(x_2 - 2)^2/2 & \end{aligned}$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{cases} 1/w_2'(4)=0 \\ 2/w_2(4)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 + 6 \cdot 4^2/2 - 4 \cdot (4-2) = 0 \\ D_2 + 4C_2 + 6 \cdot 4^3/6 - 4 \cdot (4-2)^2/2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$C_2 = -40.00 \text{ kNm}^2, \quad D_2 = 104.00 \text{ kNm}^3.$$

$$\begin{cases} 3/w_1(0)=w_2(0) \\ 4/w_1(4)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{D_1}{EJ} = \frac{D_2}{2EJ} \\ D_1 + 4C_1 - 4 \cdot 4^3/6 + 2 \cdot 4^4/24 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

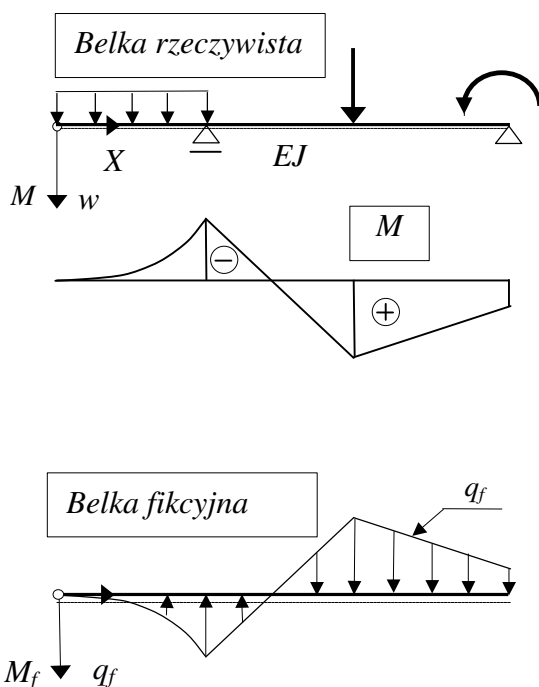
$$C_1 = -7.67 \text{ kNm}^2, \quad D_1 = 52.00 \text{ kNm}^3.$$

$$w_K = w_1(6) = \left[52 - 7.67 \cdot 6 - 4 \cdot 6^3/6 + 2 \cdot 6^4/24 - 4(6-4)^3/6 - 2(6-4)^4/24 \right] / EJ,$$

$$w_K = \frac{-36.69 \text{ kNm}^3}{EJ}.$$

12.3. Metoda Mohra

Jeśli potrzebujemy wyznaczyć przemieszczenia osi belki zginanej w tylko jednym interesującym nas punkcie, to metoda analityczna jest mało efektywna. Przy jej zastosowaniu nakład pracy potrzebny do określenia funkcji ugięcia i kątów ugięcia w całej belce lub wyznaczeniu przemieszczeń w jednym tylko punkcie niewiele się różni. Metoda którą pokażemy niżej jest bardzo skuteczna i efektywna zwłaszcza przy obliczaniu ugięć i kątów ugięcia w jednym punkcie osi belki.



Rys. 12.9

Rozważmy dowolną belkę zginaną, która na rys. 12.9 nazwana jest belką rzeczywistą. W przyjętym układzie odniesienia linia jej ugięcia spełnia znane już równanie różniczkowe:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}.$$

Wyobraźmy sobie inną belkę, nazwiemy ją belką fikcyjną (rys. 12.9), o tej samej długości co belka rzeczywista obciążoną pewnym obciążeniem rozłożonym w sposób ciągły o intensywności $q_f(x)$. Podpór belki fikcyjnej na razie nie specyfikujemy, ale są one takie, że zapewniają jej geometryczną niezmienną. Między obciążeniem $q_f(x)$ a funkcją momentów w belce fikcyjnej $M_f(x)$ zachodzi znana zależność różniczkowa:

$$M_f''(x) = -q_f(x).$$

Jeśli położymy:

$$q_f(x) = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (12.8)$$

to zachodzi równość:

$$w''(x) = M_f''(x), \quad (12.9)$$

która dowodzi, że druga pochodna linii ugięcia w belce rzeczywistej równa się drugiej pochodnej funkcji momentów w belce fikcyjnej tj. belce, której obciążenie stanowi funkcja momentów w belce rzeczywistej podzielona przez jej sztywność zginania.

Po dwukrotnym obustronnym całkowaniu równania (12.9) dostajemy kolejno:

$$w'(x) + C_1 = M_f'(x) + C_2, \quad (12.10)$$

$$w(x) + C_1x + D_1 = M_f(x) + C_2x + D_2.$$













Jeśli zapewnimy równość stałych całkowania w równaniach (12.10) i uwzględnimy, że pochodną linii ugięcia jest kąt ugięcia a pochodną momentów zginających jest siła poprzeczna otrzymujemy ostatecznie:

$$\varphi(x) = Q_f(x); \quad w(x) = M_f(x). \quad (12.11)$$

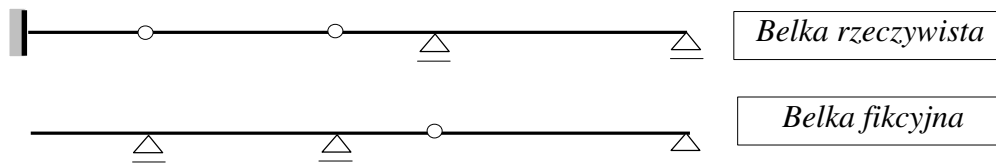
Wzory (12.11) będące podstawą metody Mohra (Mohr pierwszy w roku 1868 zauważył i wykorzystał do wyznaczania ugięć formalną analogię równań różniczkowych wiążących ugięcia z momentami zginającymi oraz momentami zginającymi i obciążeniem) obliczania ugięć osi belek zginanych stanowią, że kąt ugięcia i ugięcie w dowolnym punkcie belki rzeczywistej są równe sile poprzecznej i momentowi zginającemu w tym samym punkcie belki fikcyjnej.

Wróćmy do określenia, dotąd nie zdefiniowanych, podpór belki fikcyjnej. Sposób jej podparcia wynika ze wzorów (12.11), otrzymanych przy założeniu równości stałych całkowania we wzorach (12.10).

Rozważmy sztywne zamocowanie w belce rzeczywistej. Jest to punkt, w którym kąt ugięcia i ugięcie jest równe zero, zgodnie więc ze wzorami (12.11) w tym punkcie belki fikcyjnej siła poprzeczna i moment zginający muszą się zerować. Jedynym takim skrajnym punktem w belce jest wolny koniec. W przypadku skrajnej podpory przegubowej w belce rzeczywistej kinematyczne warunki brzegowe to zerowanie się ugięcia i różny od zera kąt ugięcia. Musi temu w belce fikcyjnej odpowiadać punkt, w którym statyczne warunki brzegowe dają zerowanie się momentu zginającego i różną od zera siłę poprzeczną i takim punktem będzie podpora przegubowa. W tabeli poniżej zestawione są podpory w belce rzeczywistej i odpowiadające im podpory w belce fikcyjnej.

Belka rzeczywista	Belka fikcyjna
 $\varphi=0; w=0$	 $Q_f=0; M_f=0$
 $\varphi \neq 0; w=0$	 $Q_f \neq 0; M_f=0$
 $\varphi \neq 0; w \neq 0$	 $Q_f \neq 0; M_f \neq 0$
 $\varphi=0; w \neq 0$	 $Q_f=0; M_f \neq 0$
 $\varphi_l = \varphi_p; w_l=0; w_p=0$	 $Q_{fl} = Q_{fp}; M_{fl}=0; M_{fp}=0$
 $\varphi_l \neq 0; \varphi_p \neq 0; w_l = w_p$	 $Q_{fl} \neq 0; Q_{fp} \neq 0; M_{fl} = M_{fp}$

Wyznaczenie belki fikcyjnej dla dowolnej belki rzeczywistej jest zadaniem bardzo prostym. Niżej pokazany jest przykład belki rzeczywistej i odpowiadającej jej belki fikcyjnej.



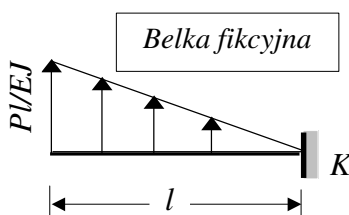
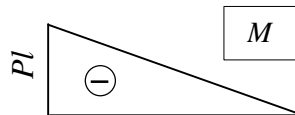
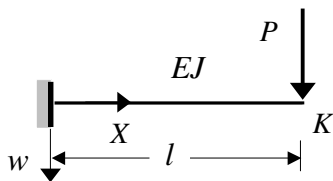
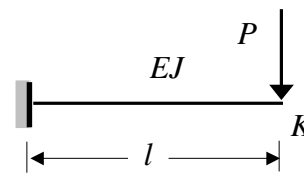
Jak powiedziane zostało na wstępie metoda Mohra jest bardzo efektywna (w stosunku do metody analitycznej) w przypadku gdy poszukujemy przemieszczeń osi belki w określonym punkcie.

Tok postępowania przy obliczaniu przemieszczeń w wybranym punkcie osi belki zginanej metodą Mohra jest następujący:

- wyznaczyć wykres momentów zginających w belce rzeczywistej (spody na dole belki),
- wyznaczyć belkę fikcyjną,
- obciążyć belkę fikcyjną wykresem momentów zginających z belki rzeczywistej podzielonemu przez jej sztywność na zginanie EJ . Dodaniem wykresowi momentów odpowiadają zwroty obciążenia fikcyjnego zgodnego ze zwrotem osi ugięć belki rzeczywistej,
- wyznaczyć siłę poprzeczną i/lub moment zginający w tym wybranym punkcie w belce fikcyjnej (siła poprzeczna znakowana zgodnie z układem własnym przekroju poprzecznego belki, moment przy spodach na dole belki). Będą one równe odpowiednim przemieszczeniom w tym samym punkcie osi belki rzeczywistej.

12.3.1. Przykłady

Przykład 12.3.1.1. Wyznaczyć metodą Mohra ugięcie i kąt ugięcia końca wspornika.



Rozwiązanie

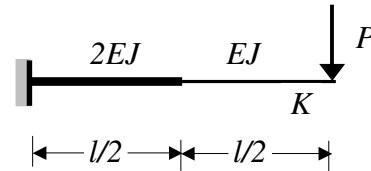
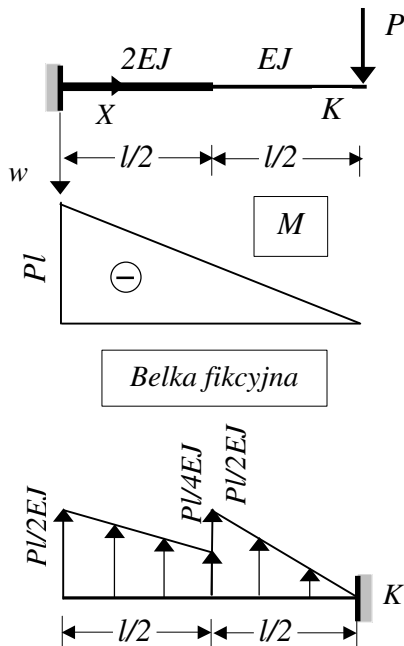
Rysunki obok pokazują kolejne etapy rozwiązania. Fikcyjne siły przekrojowe tj. siła poprzeczna i moment zginający w punkcie K belki fikcyjnej wynoszą:

$$Q_{fK} = \varphi_K = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ} l = \frac{Pl^2}{2EJ},$$

$$M_{fK} = w_K = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ} l * \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Obie wielkości są dodatnie, co w przyjętym układzie odniesienia związanego z belką rzeczywistą oznacza, że punkt K przemieści się w dół a jego kąt obrotu będzie zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Przykład 12.3.1.2. Wyznaczyć metodą Mohra ugięcie i kąt ugięcia końca wspornika o skokowo zmiennej sztywności na zginanie.



Rozwiązanie

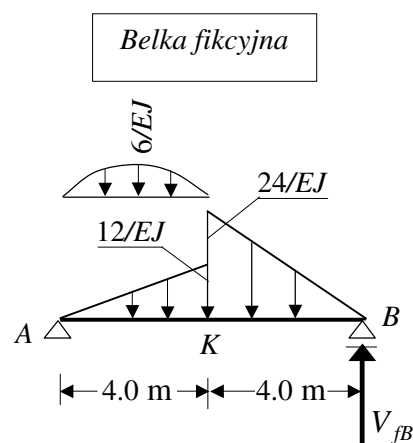
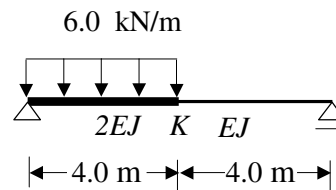
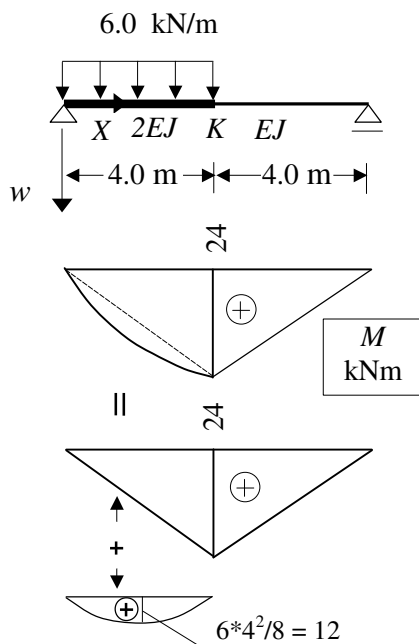
Fikcyjne siły przekrojowe tj. siła poprzeczna i moment zginający w punkcie K belki fikcyjnej wynoszą:

$$Q_{fK} = \varphi_K = \frac{1}{2} \frac{Pl}{2EJ} \frac{l}{2} + \frac{Pl}{4EJ} \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \frac{Pl}{4EJ} \frac{l}{2} = \frac{5Pl^2}{16EJ},$$

$$M_{fK} = w_K = \frac{1}{2} \frac{Pl}{2EJ} \frac{l}{2} * \frac{2l}{3} + \frac{Pl}{4EJ} \frac{l}{2} * \frac{3l}{4} + \frac{1}{2} \frac{Pl}{4EJ} \frac{l}{2} * \left(\frac{l}{2} + \frac{2l}{3} \right) = \frac{3Pl^3}{16EJ}$$

Przykład 12.3.1.3. Wyznaczyć metodą Mohra ugięcie i kąt ugięcia punktu K belki wolnopodpartej o skokowo zmiennej sztywności na zginanie.

Rozwiązanie



Wykres momentów (na części krzywoliniowy) w belce rzeczywistej można rozłożyć na wykresy pokazane niżej na rysunku. Część krzywoliniowa to symetryczna parabola drugiego stopnia, której maksymalna wartość wynosi $qa^2/8$, gdzie a to rozpiętość na której działa stałe obciążenie ciągłe q .

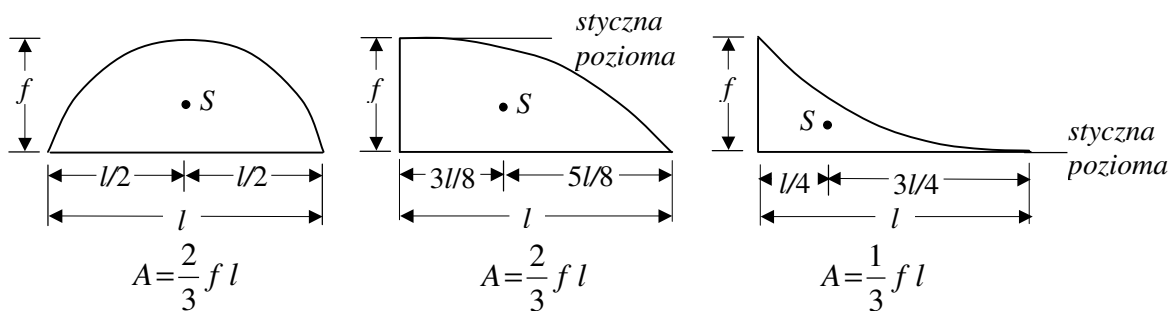
Poszukiwane siły przekrojowe w belce fikcyjnej policzymy idąc od strony prawej i w tym celu potrzebujemy w pierw wyznaczyć reakcję na prawej podporze.

$$\sum M_{fA} = 0 \rightarrow -8V_{fB} + \frac{1}{2} \frac{24}{EJ} 4 * \left(4 + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \frac{12}{EJ} 4 * \frac{2}{3} 4 + \frac{2}{3} \frac{6}{EJ} 4 * 2 = 0,$$

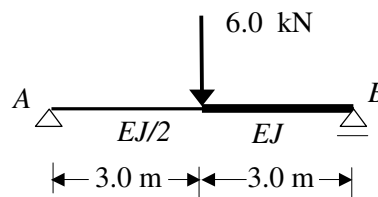
$$V_{fB} = \frac{44.0 \text{ kNm}^2}{EJ}.$$

$$\varphi_K = Q_{fK} = -\frac{44}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{24}{EJ} 4 = \frac{4.0 \text{ kNm}^2}{EJ}, \quad w_K = M_{fK} = \frac{44}{EJ} 4 - \frac{1}{2} \frac{24}{EJ} 4 * \frac{1}{3} 4 = \frac{112.0 \text{ kNm}^3}{EJ}.$$

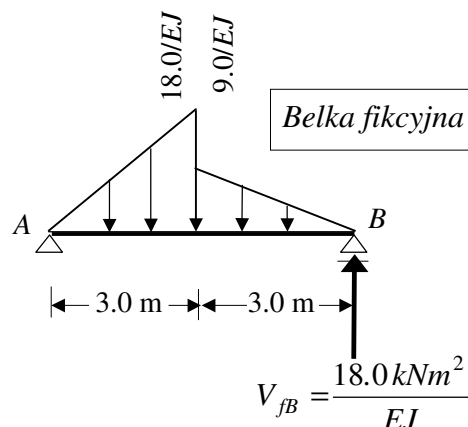
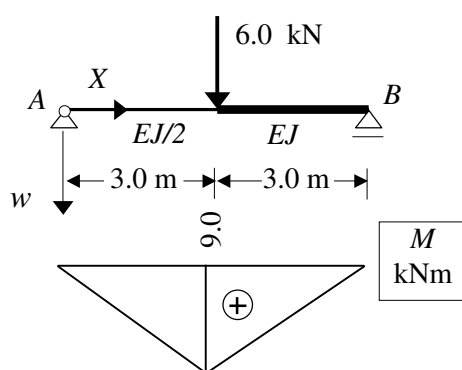
Niżej podane są pola powierzchni A i położenie środków ciężkości S dla figur ograniczonych parabolami drugiego stopnia, stanowiących części wykresów momentów zginających pochodzących od równomiernie rozłożonych obciążeń ciągłych w belkach rzeczywistych.



Przykład 12.3.1.4. Wyznaczyć metodą Mohra kąt ugięcia na podporze B belki wolnopodpartej o skokowo zmiennej sztywności na zginanie.



Rozwiązanie



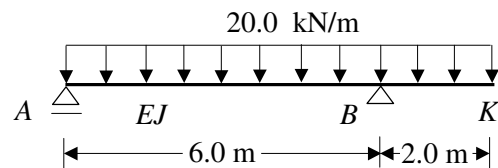
Fikcyjną siłę poprzeczną w przekroju podporowym policzymy idąc od strony prawej, zatem celem jest wyznaczenie reakcji na prawej podporze.

$$\sum M_A^f = 0 \rightarrow -6V_{fB} + \frac{1}{2} \frac{9}{EJ} 3 * \left(3 + \frac{3}{3}\right) + \frac{1}{2} \frac{18}{EJ} 3 * \frac{2}{3} 3 = 0 \rightarrow V_{fB} = \frac{18.0 \text{ kNm}^2}{EJ}$$

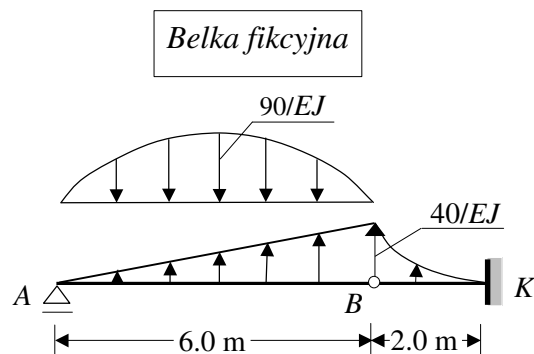
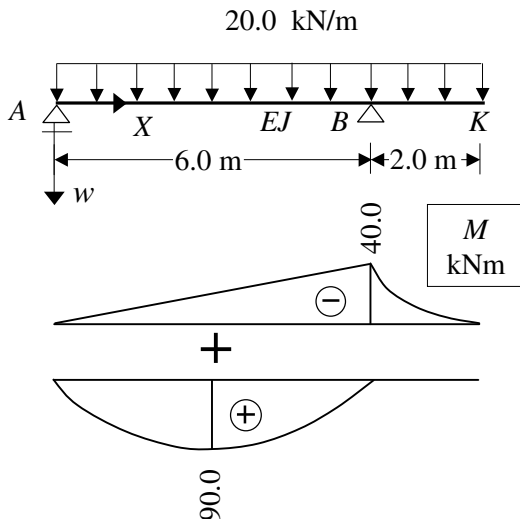
$$\varphi_B = Q_{fB} = -V_{fB} = -\frac{18.0 \text{ kNm}^2}{EJ}.$$

Zgodnie z przyjętym układem współrzędnych przekrój podporowy obróci się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Przykład 12.3.1.5. Wyznaczyć metodą Mohra ugięcie i kąt ugięcia punktu K belki jednostronnie przewieszanej.

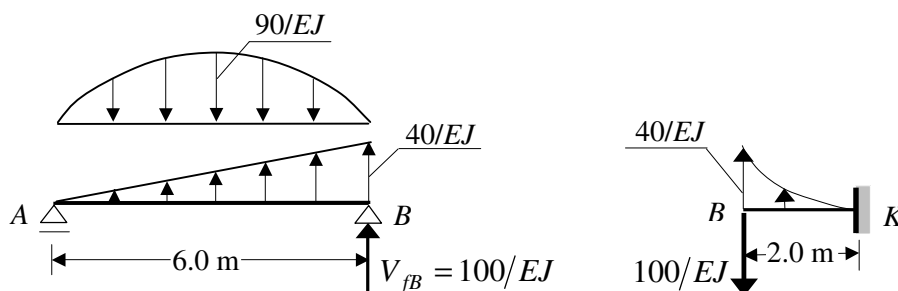


Rozwiązanie



Wykres momentów w belce rzeczywistej jest sumą momentów od obciążenia na przewieszeniu i obciążenia w prześle AB . Oba te momenty są bardzo proste do wyznaczenia i co bardzo ważne - ich pola powierzchni jak i położenie środków ciężkości są powszechnie znane.

Belka fikcyjna jest belką gerberowską, w której w schemacie obliczeniowym część AB jest belką drugorzędą. Ponieważ punkt K jest w dolnej belce, pierwszorzędnej więc najprościej będzie wpiery wyznaczyć fikcyjną reakcję w przegubie B , a potem obciążyć nią (ze zwrotem przeciwnym) dolny wspornik BK .



Obliczenie reakcji V_{fB} :

$$\sum M_{fA} = 0 \rightarrow -6V_{fB} - \frac{1}{2} \frac{40}{EJ} 6 * \frac{2}{3} 6 + \frac{2}{3} \frac{90}{EJ} 6 * 3 = 0 \rightarrow V_{fB} = \frac{100.0 \text{ kNm}^2}{EJ}.$$

Stąd kąt ugięcia i ugięcie punktu K belki rzeczywistej wynosi:

$$\varphi_K = Q_{fK} = -\frac{100}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{40}{EJ} 2 = -\frac{73.33 \text{ kNm}^2}{EJ},$$

$$w_K = M_{fK} = -\frac{100}{EJ} 2 + \frac{1}{3} \frac{40}{EJ} 2 * \frac{3}{4} 2 = -\frac{160.00 \text{ kNm}^3}{EJ}.$$

Często dla uproszczenia zapisów obliczenia prowadzimy bez pisania sztywności na zginanie w mianowniku obciążenia fikcyjnego i wstawiamy ją dopiero w końcowych rezultach tj. fikcyjnej sile poprzecznej i fikcyjnym momencie zginającym.