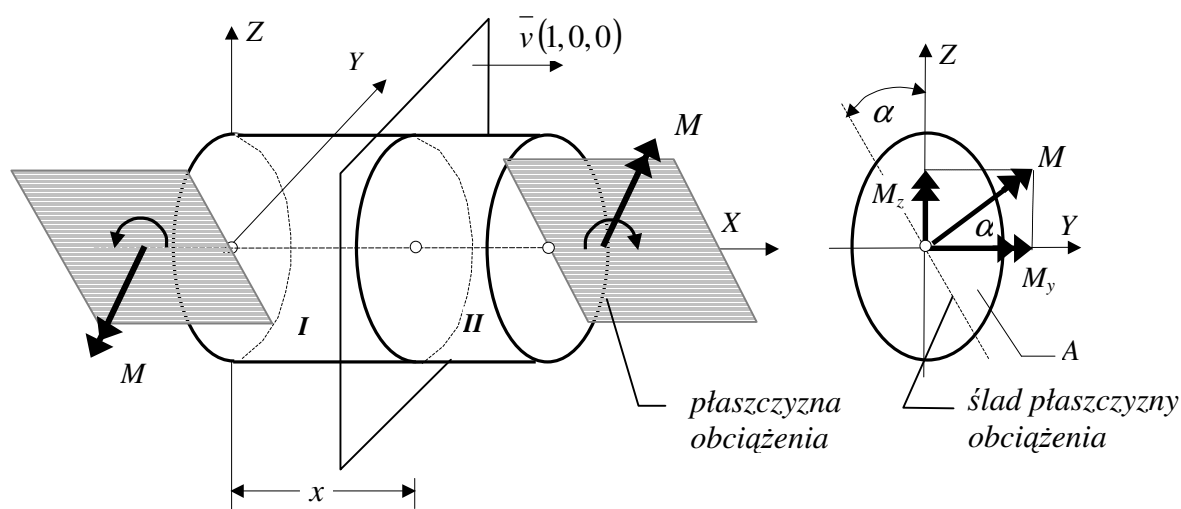


### 13. UKOŚNE ZGINANIE

#### 13.1. Naprężenia i odkształcenia

Ukośne zginanie pręta pryzmatycznego występuje wówczas gdy układ sił zewnętrznych po jednej stronie jego przekroju poprzecznego pręta redukuje się do momentu zginającego  $\bar{M}$ , którego wektor nie jest równoległy do żadnej z głównych, centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Będziemy się starali wyznaczyć elementy macierzy naprężeń i odkształceń oraz współrzędne wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie pręta.

Rozważmy więc, pokazany na rys. 13.1 pręt pryzmatyczny określony w układzie osi  $(X, Y, Z)$ , w którym oś  $X$  jest osią pręta, a osie  $(Y, Z)$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności jego przekroju poprzecznego. Materiał pręta jest izotropowy, liniowo sprężysty o stałych materiałowych  $E$  oraz  $\nu$ . W rozważanym przypadku moment zginający działa w płaszczyźnie zaznaczonej szarym kolorem na rysunku, a jego wektor jest nachylony pod kątem  $\alpha$  do osi  $Y$ .



Rys. 13.1

Przy rozwiązywaniu postawionego zadania wykorzystamy wyniki uzyskane dla przypadku zginania prostego.

Otóż zgodnie z zasadą de Saint-Venanta statycznie równoważne obciążenia wywołują jednakowe stany naprężenia i odkształcenia, a jeśli tak to moment  $M$  możemy zastąpić dwoma równoważnymi mu momentami  $M_y = M \cos \alpha$  i  $M_z = M \sin \alpha$ , których kierunki są równoległe do odpowiednich osi układu odniesienia (rys. 13.1). W ten nieskomplikowany sposób otrzymaliśmy dwa proste zginania względem osi  $Y$  i  $Z$ , dla których macierze naprężeń są już nam znane. W obu przypadkach jedynym niezerowym elementem macierzy naprężeń jest naprężenie normalne  $\sigma_x$ . Proste sumowanie, zgodnie z zasadą superpozycji, daje wzór określający te naprężenia, dla rozważanego pręta, w postaci:

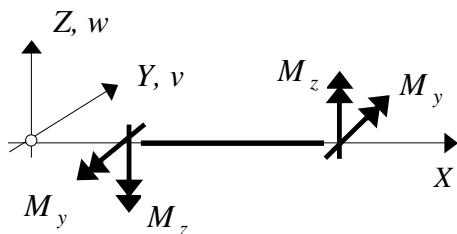
$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \quad (13.1)$$

lub, po wykorzystaniu zależności między  $M$ ,  $M_y$  i  $M_z$  w formie:

$$\sigma_x = M \left( \frac{\cos \alpha}{J_y} z - \frac{\sin \alpha}{J_z} y \right). \quad (13.2)$$

Wzory określające krzywiznę osi pręta po deformacji w wyniku działania momentów  $M_y$  i  $M_z$ , mają postać:

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{E J_y} \text{ oraz } \frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{E J_z}. \quad (13.3)$$



Rys.13.2

Ugięcia punktów osi pręta w kierunku osi Y i Z obliczamy od każdego momentu zginającego osobno, korzystając z równań różniczkowych, które przy zwrotach momentów i układu odniesienia pokazanych na rys.13.2 są następujące:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E J_y} \text{ oraz } \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{E J_z} \quad (13.4)$$

Całkowite ugięcie osi belki jest geometryczną sumą ugięć od składowych momentów zginających.

Macierz odkształceń odpowiadając temu stanowi naprężenia łatwo wyznaczymy z równań Hooke'a, i będzie ona zawierała jedynie trzy odkształcenia liniowe, z których dwa są sobie równe.

### 13.2. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia

W tym przypadku wytrzymałości w pręcie występuje jednoosiowy niejednorodny stan naprężenia, przy czym wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$ , są liniową funkcją zmiennych  $y$  oraz  $z$  i nie zależą od zmiennej  $x$ . Ponieważ jedynym niezerowym elementem macierzy naprężeń jest  $\sigma_x$ , to wnioski z analizy stanu naprężenia i odkształcenia dla tego przypadku, dotyczące naprężeń i odkształceń głównych ich kierunków, jak i ekstremalnych naprężeń stycznych będą analogiczne do tych, jakie były w przypadku osiowego rozciągania i zginania prostego. Wzory (13.1) czy (13.2) pokazują, że końce wektorów naprężenia  $\sigma_x$  leżą na płaszczyźnie - płaszczyźnie naprężeń. Krawędź przecięcia się płaszczyzny naprężeń z płaszczyzną przekroju poprzecznego, tj. oś obojętna, stanowi miejsce geometryczne punktów, w których wartości naprężeń normalnych spełniają równanie:

$$\sigma_x = 0$$

Podstawiając do niego wyrażenie (13.2) dostajemy równanie osi obojętnej dla rozważanego przypadku:

$$z = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha y \quad (13.5)$$

Zatrzymajmy się chwilę przy równaniu tej prostej. Jego prosta analiza pokazuje, że przy ukośnym zginaniu:

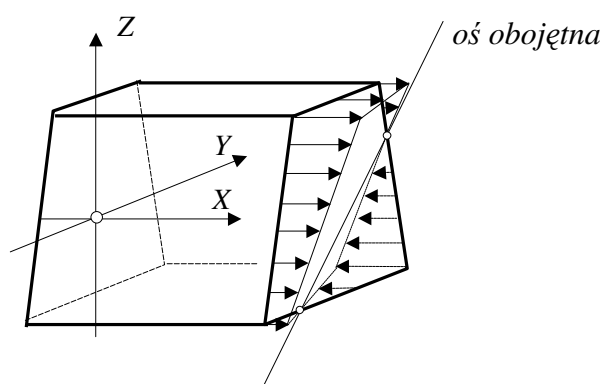
- oś obojętna przechodzi przez początek układu współrzędnych ale jej położenie (nachylenie) nie zależy od wartości momentu zginającego,

- położenie osi obojętnej zależy od wartości  $J_y$ ,  $J_z$  oraz  $\alpha$ , tzn. od geometrii przekroju poprzecznego i płaszczyzny działania obciążeń,
- oś obojętka nie pokrywa się z kierunkiem wektora momentu zginającego (tak było w przypadku prostego zginania), odchyła się ona od niego w kierunku „minimalnej” głównej centralnej osi bezwładności przekroju poprzecznego.

Wyjątek mogłyby stanowić przekroje dla których  $J_y = J_z$ , ale wobec zerowania się momentu dewiacji  $J_{yz}$ , każda oś centralna jest osią główną centralną i w takim przypadku zawsze występować będzie proste zginanie.

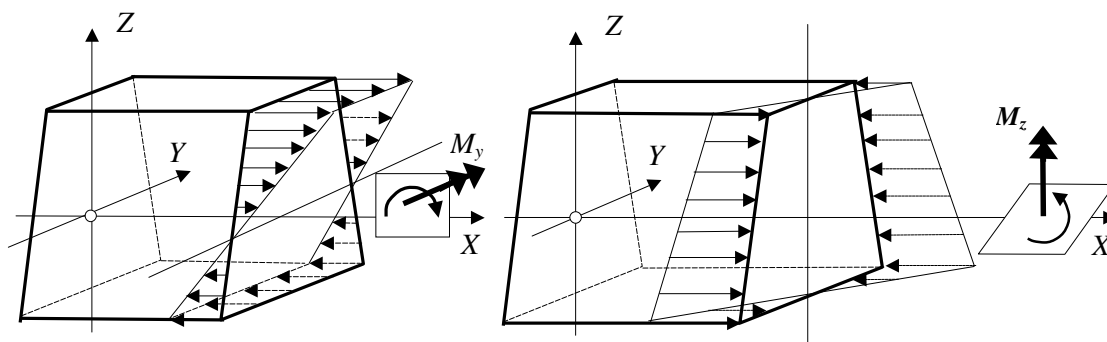
Powyższe spostrzeżenia są bardzo istotne z punktu widzenia wymiarowania, bo pozwalają łatwo wyznaczyć punkty przekroju poprzecznego, w których naprężenia normalne  $\sigma_x$  osiągają wartości ekstremalne. Punkty te położone są najdalej od osi obojętnej co wynika to z liniowości wzoru określającego wartości naprężeń normalnych.

Rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_x$  w przekroju poprzecznym pręta pokazuje rys.13.3.



Rys. 13.3

Rozkład ten jest wynikiem dodania do siebie rozkładów z dwóch prostych zginaniań, tj. zginania w płaszczyźnie (X, Z) i w płaszczyźnie (X, Y) (rys.13.4).



Rys.13.4

Jak już zostało powiedziane, największe co do bezwzględnej wartości naprężenia wystąpią w punktach najodleglejszych od osi obojętnej. Wyznaczenie położenia tych punktów przy znajomości położenia osi obojętnej nie powinno sprawiać trudności.

Kolejny raz należy podkreślić, że wyprowadzone wzory obowiązują przy przyjętych zwrotach osi układu odniesienia i wektora momentu zginającego. W przypadku innych zwrotów należy we wzorach uwzględnić korektę znaków.

### 13.3. Wymiarowanie prętów ukośnie zginanych

Tak jak w przypadku prostego zginania ograniczymy się teraz tylko do wymiarowania ze względu na stan graniczny nośności, przyjmując, że będzie on osiągnięty, jeśli przynajmniej w jednym punkcie przekroju poprzecznego wielkość naprężenia normalnego będzie równa wytrzymałości obliczeniowej.

Jeśli pręt wykonany jest z materiału którego wytrzymałości obliczeniowe przy rozciąganiu  $R_r$  i ściskaniu  $R_c$ , są różne to warunek stanu granicznego nośności stanowią nierówności:

$$\max \sigma_{xr} \leq R_r \quad \text{i} \quad \max |\sigma_{xc}| \leq R_c$$

gdzie:  $\max \sigma_{xr}$  i  $\max |\sigma_{xc}|$  - największe naprężenia rozciągające i ściskające w przekroju poprzecznym.

W przypadku materiału o tej samej wytrzymałości obliczeniowej na rozciąganie i ściskanie (materiał izonomiczny) warunek wymiarowania będzie jeden:

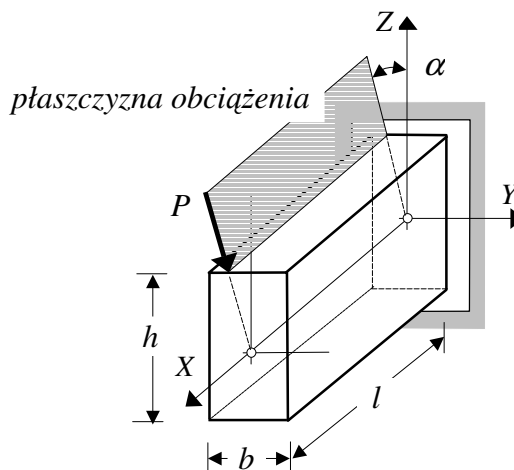
$$\max |\sigma_x| \leq R.$$

Gdy przekrój poprzeczny pręta ma dwie osie symetrii i obrys zewnętrzny jego kształtu jest prostokątny np. dwuteownik, prostokąt z wyciętymi otworami itp. to maksymalne naprężenia normalne wystąpią w narożach i mają wartość:

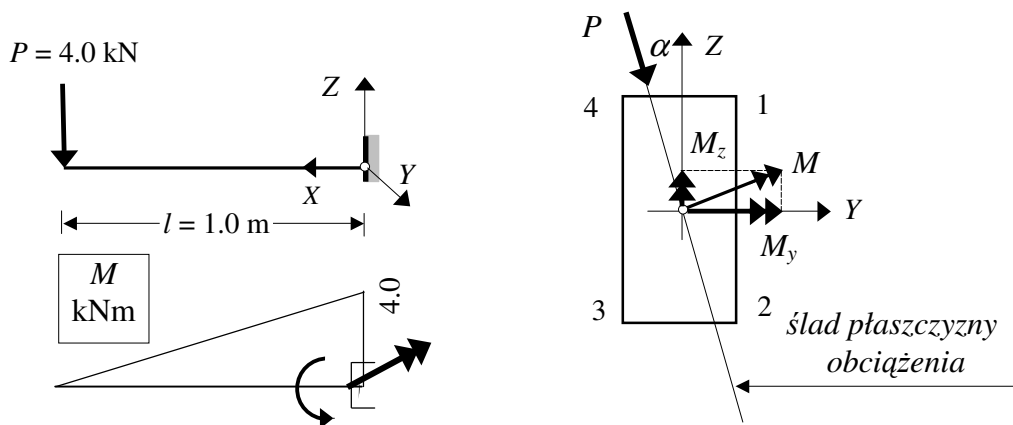
$$\max \sigma_{xr} = \max |\sigma_{xc}| = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}.$$

### 13.4. Przykłady

**Przykład 13.4.1.** Drewniana belka wspornikowa o długości  $l = 1.0$  m i prostokątnym przekroju poprzecznym  $b = 12$  cm,  $h = 24$  cm obciążona jest na końcu siłą  $P = 4.0$  kN nachyloną pod kątem  $\alpha = 20^\circ$  do osi pionowej (rysunek obok). Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju utwierdzenia i położenie osi obojętnej.



#### Rozwiązanie



Rysunek wyżej pokazuje wykres momentów zginający w płaszczyźnie obciążenia. W utwierdzeniu moment ma wartość  $M = 4.0$  kNm a jego wektor będąc prostopadły do płaszczyzny obciążenia nie jest równoległy do żadnej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Mamy do czynienia ze zginaniem ukośnym (dokładniej mówiąc wraz ze ścinaniem, ale naprężenie styczne, w tym przykładzie, nie są przedmiotem naszego zainteresowania).

Składowe tego wektora (pokazane na rysunku) w osiach głównych centralnych mają wartości:

$$M_y = M \cos \alpha = 4.0 * 0.9397 = 3.759 \text{ kNm}, \quad M_z = M \sin \alpha = 4.0 * 0.3420 = 1.368 \text{ kNm}.$$

Główne centralne momenty bezwładności wynoszą:

$$J_y = 12 * 24^3 / 12 = 13824 \text{ cm}^4, \quad J_z = 24 * 12^3 / 12 = 3456 \text{ cm}^4.$$

W przyjętym układzie odniesienia i zwrotach momentów rozkład naprężeń normalnych określa wzór:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = \frac{3.759 * 10^3}{13824 * 10^{-8}} z - \frac{1.368 * 10^3}{3456 * 10^{-8}} y = 2.72 * 10^7 z - 3.96 * 10^7 y$$

Wartości naprężeń normalnych w narożach przekroju wynoszą:

$$\sigma_{x1} = 2.72 * 10^7 (0.12) - 3.96 * 10^7 (0.06) = 3.26 * 10^6 - 2.38 * 10^6 = 0.88 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x2} = 2.72 * 10^7 (-0.12) - 3.96 * 10^7 (0.06) = -3.26 * 10^6 - 2.38 * 10^6 = -5.64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x3} = 2.72 * 10^7 (-0.12) - 3.96 * 10^7 (-0.06) = -3.26 * 10^6 + 2.38 * 10^6 = -0.88 \text{ MPa}$$

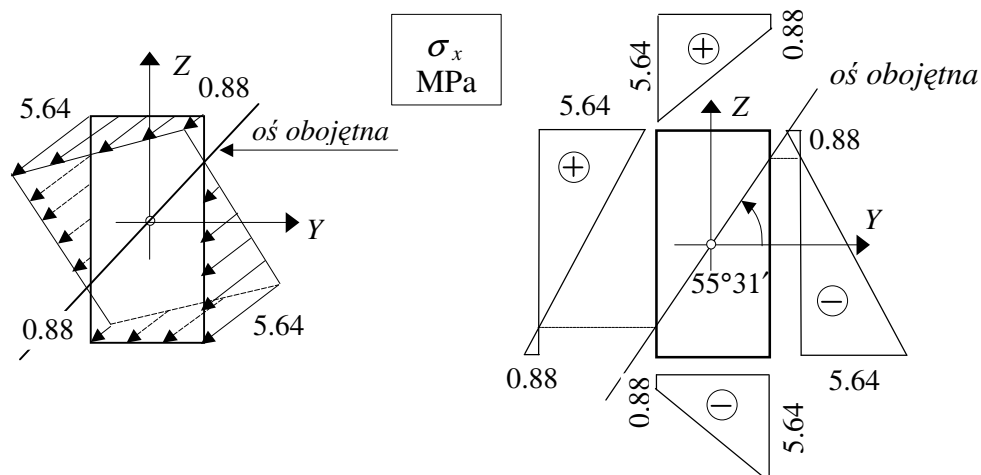
$$\sigma_{x4} = 2.72 * 10^7 (0.12) - 3.96 * 10^7 (-0.06) = 3.26 * 10^6 + 2.38 * 10^6 = 5.64 \text{ MPa}$$

Równanie osi obojętnej:

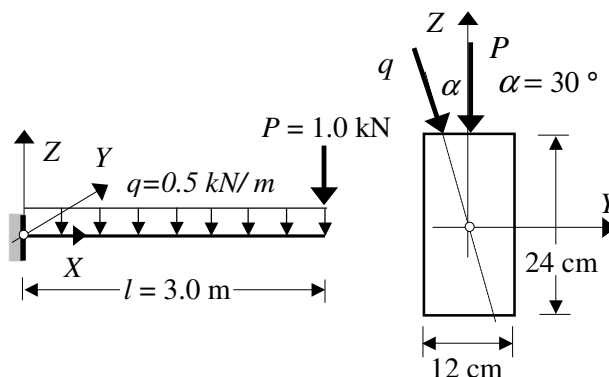
$$\sigma_x = 0 \rightarrow 2.72 * 10^7 z - 3.96 * 10^7 y = 0 \rightarrow z = 1.456 y.$$

Oś obojętna tworzy z osią  $Y$  kąt  $55^\circ 31'$ , widać jak wyraźnie odchyła się ona od wektora momentu gnącego, który tworzy z osią  $Y$  kąt  $20^\circ$ , w stronę głównej centralnej osi o mniejszym momencie bezwładności.

Rysunki poniżej pokazują rozkład naprężeń normalnych w przekroju utwierdzenia. Rysunek po lewej, często nazywany jest bryłą naprężeń, rysunek po prawej pokazuje rozkłady naprężeń na krawędziach przekroju, ale daje pełny obraz tego co się dzieje wewnątrz.



**Przykład 13.4.2.** Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju utwierdzenia belki wspornikowej o obciążeniu i przekroju poprzecznym jak na rysunku.



**Rozwiązanie**

Obciążenie ciągłe  $q$  działa w płaszczyźnie która odchyła się od płaszczyzny  $(X, Z)$  o kąt  $30^\circ$ , siła skupiona  $P$  działa w płaszczyźnie  $(X, Z)$ .

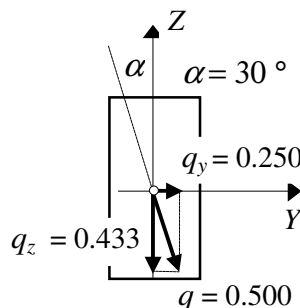
Zadanie w którym obciążenia działają w dowolnych płaszczyznach najprościej jest rozwiązywać wykorzystując zasadę superpozycji sumując momenty od poszczególnych obciążeń. Ponieważ momenty występują w różnych płaszczyznach sumowanie należy wykonać z uwzględnieniem ich własności wektorowych pamiętając, że wektory momentów są prostopadłe do płaszczyzn działania obciążeń które je wywołują.

Otrzymaną sumę należy potem rozłożyć na składowe równoległe do głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Z tego względu wydaje się, że najzgrabniej jest rozkładać obciążenie na składowe równoległe do tych osi bo otrzymane od nich momenty będą od razu tymi które należy wstawiać do wzoru na naprężenia normalne. I tak też będziemy postępować w tym przykładzie.

Składowe obciążenia ciągłego  $q$  wynoszą:

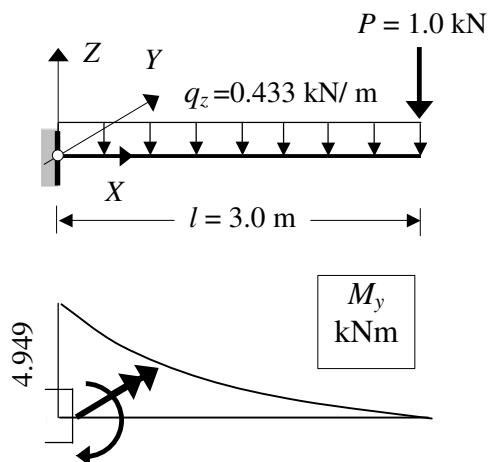
$$q_y = q \sin \alpha = 0.5 * 0.500 = 0.250 \text{ kN/m}$$

$$q_z = q \cos \alpha = 0.5 * 0.866 = 0.433 \text{ kN/m}$$

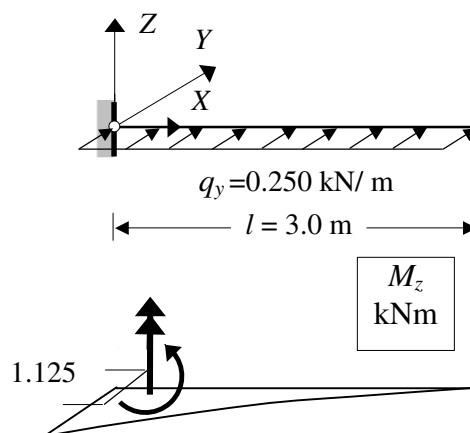


Wykresy momentów w płaszczyznach układu odniesienia

obciążenie w płaszczyźnie  $(X, Z)$

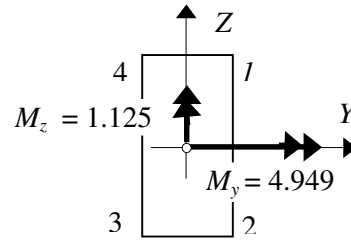


obciążenie w płaszczyźnie  $(X, Y)$



Składowe momentu zginającego w przekroju utwierdzenia pokazane są na rysunku obok, a rozkład naprężeń normalnych określa zależność:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y$$



Wartości naprężeń policzymy w narożach przekroju. W tym przypadku będą to punkty, których współrzędne są maksymalne, stąd możemy naprężenia policzyć korzystając ze wskaźników wytrzymałości:

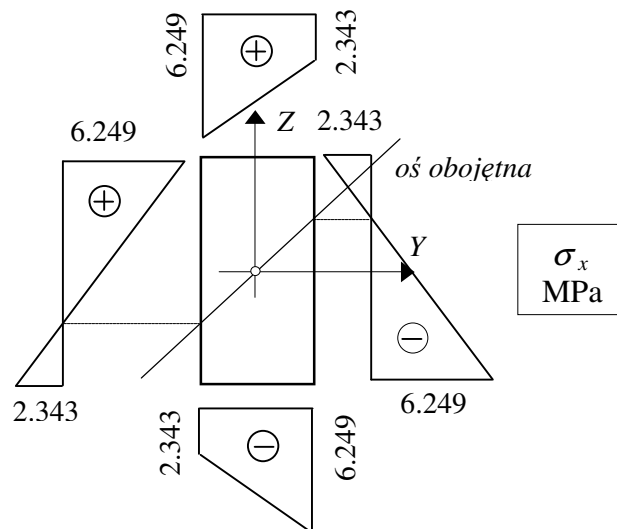
$$W_y = \frac{J_y}{\max|z|} = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 24^2}{6} = 1152 \text{ cm}^3, \quad W_z = \frac{J_z}{\max|y|} = \frac{hb^2}{6} = \frac{24 \cdot 12^2}{6} = 576 \text{ cm}^3.$$

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \frac{4.949 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} - \frac{1.125 \cdot 10^3}{576 \cdot 10^{-6}} = 2.343 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2.343 \text{ MPa},$$

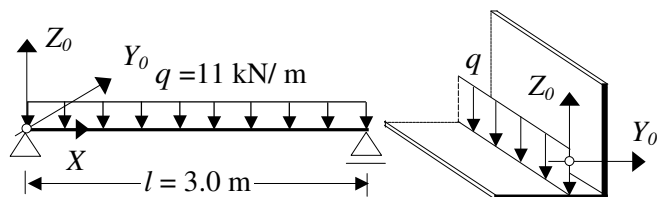
$$\sigma_{x2} = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{4.949 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} - \frac{1.125 \cdot 10^3}{576 \cdot 10^{-6}} = -6.249 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -6.249 \text{ MPa},$$

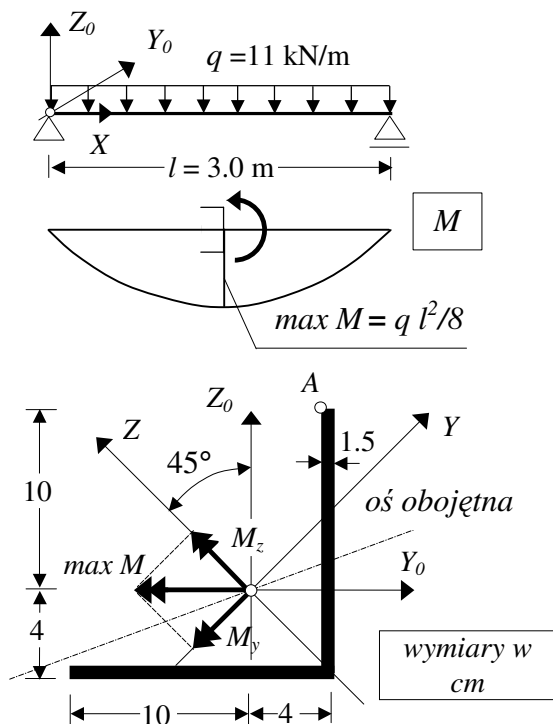
$$\sigma_{x3} = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = -\frac{4.949 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} + \frac{1.125 \cdot 10^3}{576 \cdot 10^{-6}} = -2.343 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -2.343 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x4} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4.949 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} + \frac{1.125 \cdot 10^3}{576 \cdot 10^{-6}} = 6.249 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 6.249 \text{ MPa}$$



**Przykład 13.4.3.** Dobrać potrzebne wymiary kątownika równoramiennego ze względu na naprężenia normalne dla belki obciążonej jak na rysunku jeśli  $R = 215 \text{ MPa}$ .



**Rozwiązanie**

Obciążenie działa w płaszczyźnie  $(X, Z_0)$  zatem wektor momentu zginającego jest równoległy do osi  $Y_0$ . Ponieważ jest ona tylko osią centralną a nie główną centralną występuje przypadek ukośnego zginania.

Osie główne centralne  $(Y, Z)$  w tym przekroju poprzecznym (oś  $Z$  jest osią symetrii) nachylone są pod kątem  $45^\circ$  do osi centralnych  $(Y_0, Z_0)$ . Maksymalny moment zginający występujący w środku rozpiętości belki wynosi:

$$\max M = \frac{ql^2}{8} = \frac{11 \cdot 3^2}{8} = 12.375 \text{ kNm},$$

a jego współrzędne w osiach głównych centralnych mają wartości:

$$M_y = M_z = \frac{\max M}{\sqrt{2}} = \frac{12.375}{\sqrt{2}} = 8.750 \text{ kNm}.$$

Przyjęto kątownik równoramienny  $\text{L } 140 \times 140 \times 15$ , którego główne centralne momenty bezwładności mają wartości  $J_y = 298 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 1150 \text{ cm}^4$ . Należy teraz sprawdzić czy spełniony jest warunek stanu granicznego nośności ze względu na naprężenia normalne, który wymaga aby:

$$\max |\sigma_x| \leq R.$$

Maksymalne naprężenia normalne wystąpią w punkcie najodleglejszym od osi obojętnej. Jej położenie jest łatwo naszkicować. Odchyła się ona od wektora momentu zginającego w stronę osi  $Y$ , bo względem tej osi moment bezwładności jest najmniejszy. Nietrudno teraz stwierdzić, że punkt  $A$  jest najodleglejszy od osi obojętnej i w osiach głównych centralnych ma współrzędne  $(8.84, 5.02) \text{ cm}$ .

Rozkład naprężeń normalnych w tym przypadku określa zależność:

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y,$$

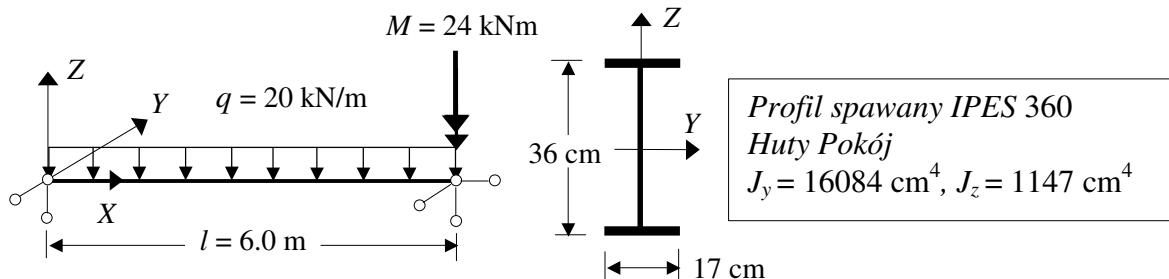
stąd

$$\sigma_x^A = -\frac{M_y}{J_y} z_A - \frac{M_z}{J_z} y_A = -\frac{8.75 \cdot 10^3}{298 \cdot 10^{-8}} \cdot 5.02 \cdot 10^{-2} - \frac{8.75 \cdot 10^3}{1150 \cdot 10^{-8}} \cdot 8.84 \cdot 10^{-2} = -214.66 \text{ MPa}$$

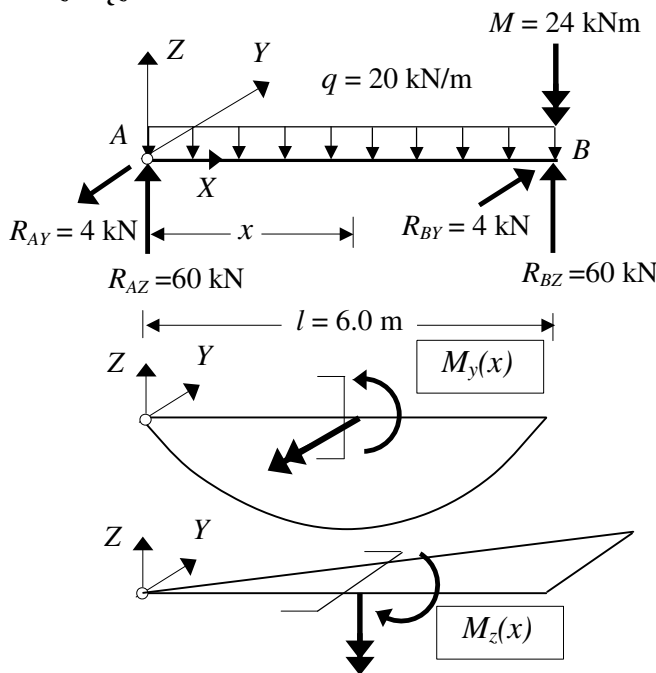
, a ponieważ:  $\sigma_x^A = \max |\sigma_x| = 214.66 < R = 215$ , więc przekrój został przyjęty prawidłowo.



**Przykład 13.4.4.** Wyznaczyć maksymalne naprężenia normalne w przekroju poprzecznym zadanej belki oraz maksymalne ugięcie jej osi jeśli  $E = 205 \text{ GPa}$ .



**Rozwiązanie**

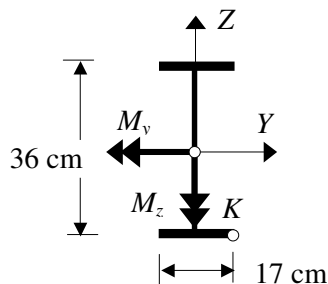


Łatwo dowiedzieć z równań równowagi, że działające w płaszczyźnie  $(X, Z)$  obciążenie  $q$  wywołuje reakcje  $R_{AZ} = R_{BZ} = 60.0 \text{ kN}$  a działający w płaszczyźnie  $(X, Y)$  moment powoduje reakcje  $R_{AY} = R_{BY} = 4.0 \text{ kN}$ .

Równania momentów zginających  $M_y(x)$  i  $M_z(x)$  napiszemy przyjmując za dodatnie momenty pokazane na wykresach obok. I tak  $M_y(x) = 60x - 20x^2/2$   
 $M_z(x) = 4x$

Rozkład naprężeń normalnych przy tych ustalonych zwrotach momentów i osi układu współrzędnych wyznacza zależność:

$$\sigma_x(x) = -\frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y$$



Z rozkładu momentów na belce można wnioskować, że maksymalne naprężenia wystąpią w punkcie K (jeśli mamy wątpliwości to można sprawdzić we wszystkich punktach narożnych). Zatem:

$$\begin{aligned} \sigma_x^K(x) &= -\frac{M_y}{16084 \cdot 10^{-8}} (-18 \cdot 10^{-2}) + \frac{M_z}{1147 \cdot 10^{-8}} (8.5 \cdot 10^{-2}) = \frac{10^6}{893} (M_y + 6.62 M_z) = \\ &= \frac{10^6}{893} (60x - 20x^2/2 + 26.48x) \end{aligned}$$

Warunek konieczny ekstremum funkcji jednej zmiennej daje równanie, z którego wyznaczymy położenie przekroju w którym naprężenie normalne jest maksymalne:

$$\frac{d\sigma_x^K(x)}{dx} = 60 - 20x + 26.48 = 0 \rightarrow x = 4.324 \text{ m.}$$

Momenty zginające w tym przekroju mają wartości:

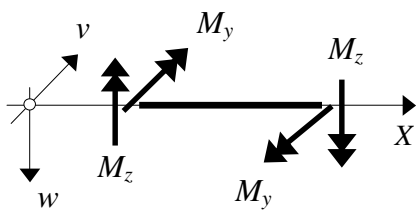
$$M_y(4.324) = 60 * 4.324 - 10 * 4.324^2 = 72.470 \text{ kNm,}$$

$$M_z(4.324) = 4 * 4.324 = 17.296 \text{ kNm.}$$

Stąd maksymalne naprężenia normalne w przekroju poprzecznym belki wynoszą:

$$\begin{aligned} \sigma_x^K(4.324) &= -\frac{72.470 * 10^3}{16084 * 10^{-8}} (-18 * 10^{-2}) + \frac{17.296 * 10^3}{1147 * 10^{-8}} (8.5 * 10^{-2}) = \\ &= (81.103 + 128.174) * 10^6 \text{ N/m}^2 = 209.277 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz obliczeniem maksymalnego ugięcia osi belki. Przekrój poprzeczny w którym oś belki przemieści się najwięcej nie musi się pokrywać z tym w którym występują największe naprężenia normalne.



Ugięcia punktów osi pręta w kierunku osi Y i Z obliczymy od każdego momentu osobno korzystając z równań różniczkowych, które przy zwrotach momentów i układu odniesienia pokazanych na rysunku obok są następujące:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E J_y} \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{E J_z}.$$

Obliczenie ugięcia w płaszczyźnie (X, Z).

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{E J_y}$$

$$E J_y w''(x) = 10x^2 - 60x$$

$$E J_y w'(x) = 10x^3/3 - 30x^2 + C_1$$

$$E J_y w(x) = 5x^4/6 - 10x^3 + C_1 x + D_1$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} 1/w(0) = 0 &\rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ 5 * 6^4/6 - 10 * 6^3 + 6C_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ C_1 = 180 \text{ kNm}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem funkcja ugięcia w płaszczyźnie (X, Z) ma postać:

$$w(x) = \frac{1}{E J_y} \left( \frac{5x^4}{6} - 10x^3 + 180x \right).$$

Obliczenie ugięcia w płaszczyźnie (X, Y).

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{Mz(x)}{EJ_z}$$

$$EJ_z v''(x) = -4x$$

$$EJ_z v'(x) = -2x^2 + C_2$$

$$EJ_z v(x) = -2x^3/3 + C_2x + D_2$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} 1/v(0) = 0 & \rightarrow \begin{cases} D_2 = 0 \\ -2 \cdot 6^3/3 + 6C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_2 = 0 \\ C_2 = 24 \text{ kNm}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd funkcje ugięcia w płaszczyźnie (X, Y) określa zależność:

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{-2x^3}{3} + 24x \right).$$

Całkowite ugięcie jest geometryczną sumą przemieszczeń w tych dwóch prostopadłych płaszczyznach określoną wzorem:

$$f(x) = \sqrt{v^2(x) + w^2(x)}.$$

Podstawiając za  $v(x)$  oraz  $w(x)$  wyżej otrzymane zależności dostajemy:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\left( \frac{24x - 2x^3/3}{EJ_z} \right)^2 + \left( \frac{5x^4/6 - 10x^3 + 180x}{EJ_y} \right)^2} = \\ &= 30.328 \cdot 10^{-6} \sqrt{196.635 (24x - 2x^3/3)^2 + (5x^4/6 - 10x^3 + 180x)^2} \end{aligned}$$

Miejsce wystąpienia maksymalnego ugięcia otrzymujemy z równania zerowania się pochodnej jego funkcji:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot 196.635 (24x - 2x^3/3)(24 - 2x^2) + 2 \cdot (5x^4/6 - 10x^3 + 180x)(20x^3/6 - 30x^2 + 180)}{\sqrt{196.635 (24x - 2x^3/3)^2 + (5x^4/6 - 10x^3 + 180x)^2}} = 0$$

którego rozwiązaniem jest  $x = 3.387$  m.

Maksymalne ugięcie wynosi:

$$\max f = f(3.387) = 30.328 \cdot 10^{-6} \cdot 844.148 = 0.0256 \text{ m} = 2.56 \text{ cm}.$$

Składowe tego przemieszczenia są równe:

$$v(3.387) = 2.355 \text{ cm} \text{ i } w(3.387) = 1.003 \text{ cm}.$$