

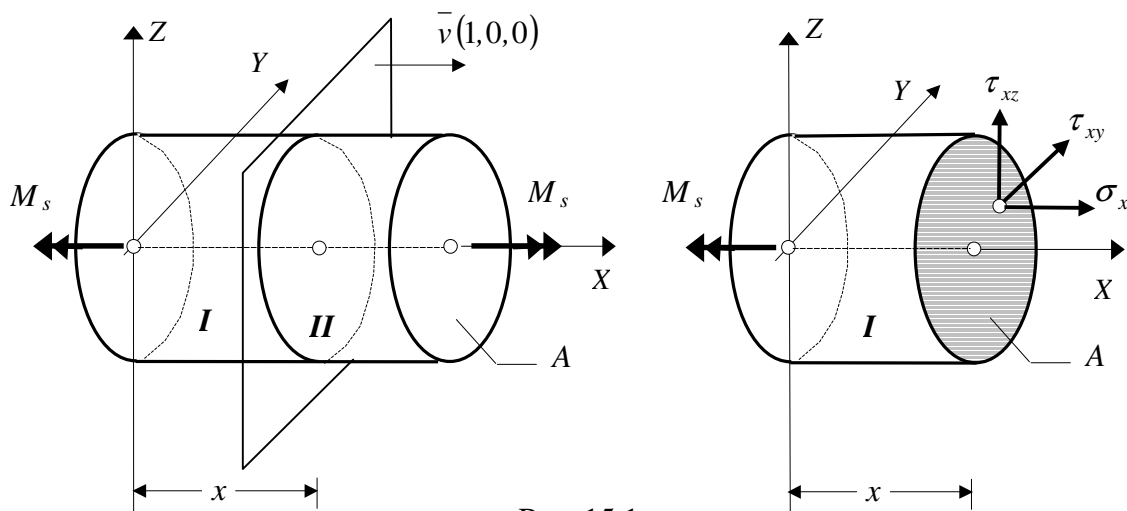
15. SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWO SYMETRYCZNYM I PROSTOKĄTNYM

15.1. Naprężenia i odkształcenia

Ze skręcaniem pręta pryzmatycznego mamy do czynienia wówczas, gdy układ sił zewnętrznych po jednej stronie jego przekroju poprzecznego redukuje się do momentu, którego płaszczyzna działania jest styczna do przekroju, a wektor jest równoległy do osi pręta. Moment ten \bar{M}_s nazywamy momentem skręcającym. Naszym zadaniem będzie przede wszystkim wyznaczenie macierzy naprężeń i odkształceń w dowolnym punkcie pręta.

Zagadnienie skręcania prętów pryzmatycznych daje się rozwiązać prostymi metodami wytrzymałości materiałów tylko w przypadku prętów o kołowo symetrycznym przekroju poprzecznym.

Rozważmy więc, pokazany na rys. 15.1 pręt pryzmatyczny o kołowym przekroju poprzecznym, którego pole jest równe A , określony w układzie osi (X, Y, Z) w którym oś X jest osią pręta a dwie pozostałe są osiami głównymi centralnymi jego przekroju poprzecznego. Materiał pręta jest liniowo sprężysty o stałych materiałowych E oraz ν .



Rys. 15.1

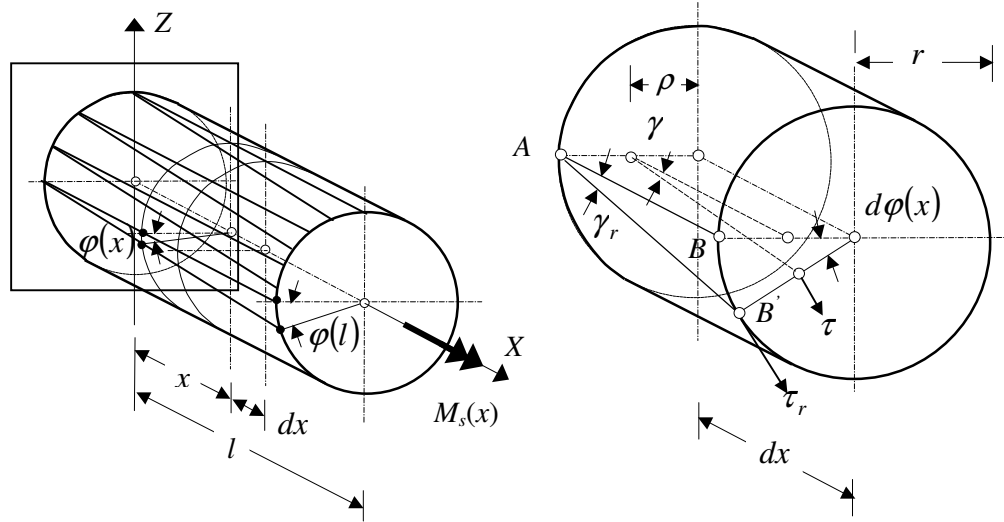
Postawione zadanie rozwiążemy postępując według kilkakrotnie już stosowanego algorytmu. Po dokonaniu myślowego przekroju pręta na dwie części, odrzuceniu części II i przyłożeniu do części I układu sił wewnętrznych rozważymy trzy komplety równań tzn. równania równowagi, geometryczne i fizyczne.

Równania równowagi wynikające z twierdzenia o równoważności odpowiednich układu sił wewnętrznych i zewnętrznych w tym przypadku przyjmą postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \sigma_x dA = 0, \quad \iint_A \tau_{xy} dA = 0, \quad \iint_A \tau_{xz} dA = 0, \\ \iint_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA = M_s(x), \quad \iint_A \sigma_x z dA = 0, \quad \iint_A -\sigma_x y dA = 0. \end{array} \right. \quad (15.1)$$

Równania geometryczne sformułujemy w oparciu o przypuszczony obraz deformacji pręta. Przyjęte założenia o własnościach materiału pręta, małych przemieszczeniach i zasada

płaskich przekrojów pozwalają przyjąć obraz jego deformacji po obciążeniu pokazany na rys. 15.2. Narysowana na powierzchni zewnętrznej pręta siatka prostokątnych do siebie linii po



Rys. 15.2

przyłożeniu momentu skręcającego deformuje się tak, że linie równoległe do osi pręta przechodzą w linie śrubowe a linie prostopadłe do osi pręta pozostają do niego prostopadłe. Można więc opisać mechanizm deformacji jako obroty wokół osi pręta płaskich kołowych, nie deformujących się przekrojów przy nie zmieniających się między nimi odległościach, zatem odkształcenia liniowe włókien równoległych do osi układu odniesienia są równe zero:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0,$$

$$\text{oraz } \gamma_{yz} = 0.$$

Kąt o jaki obracają się poszczególne przekroje nazywać będziemy kątem skręcenia i oznaczymy go $\varphi(x)$.

Dla dalszej analizy deformacji pręta wytnijmy z niego element o dowolnie małej długości dx (patrz rys. 15.2). Przyrost kąta skręcenia na tym odcinku oznaczmy przez $d\varphi(x)$.

Z rys.15.2 odczytujemy, że na pobocznicy zachodzą zależności:

$$BB' = dx \gamma_r \text{ i } BB' = d\varphi(x) r \text{ zatem } \gamma_r = r \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

gdzie: γ_r - odkształcenie kątowe na pobocznicy pręta.

Jeśli dalej przyjmiemy, że zależności zauważone na pobocznicy spełnione są również wewnątrz pręta to możemy napisać:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi(x)}{dx} \tag{15.2}$$

gdzie: γ - odkształcenie kątowe w punkcie o promieniu wodzącym ρ dwóch prostopadłych do siebie włókien, z których jedno jest równoległe do osi pręta a drugie prostopadłe do promienia wodzącego.

Po wprowadzeniu pojęcia jednostkowego kąta skręcenia określonego wzorem:

$$\theta(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}, \tag{15.3}$$

w miejsce zależności (15.2) dostajemy:

$$\gamma = \rho \theta(x). \quad (15.4)$$

Z równań fizycznych Hooke'a otrzymujemy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_y = 0$$

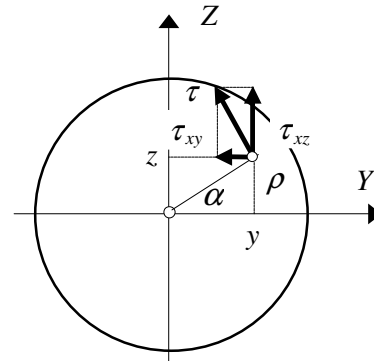
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_z = 0$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} \rightarrow \tau_{yz} = 0 \text{ oraz}$$

$$\tau = G \gamma = G \rho \theta(x) \quad (15.5)$$

Kierunek wektora tych ostatnich naprężeń stycznych τ , jest prostopadły do promienia wodzącego punktu ρ a jego zwrot jest taki, że kręci względem środka tak samo jak obciążający przekrój moment skręcający.

Jak widać z rys. 15.3 naprężenia styczne w rozważanym punkcie, równoległe do osi układu odniesienia, można wyrazić poprzez naprężenie styczne τ wzorami:



Rys.15.3

$$\tau_{xy} = -\tau \sin \alpha \quad \text{i} \quad \tau_{xz} = \tau \cos \alpha \quad (15.6)$$

a po podstawieniu (15.4) przyjmują postać:

$$\tau_{xy} = -G\theta(x)z \quad \text{i} \quad \tau_{xz} = G\theta(x)y. \quad (15.7)$$

Wracamy do równań równoważności (15.1). Pierwsze, piąte i szóste z uwagi na zerowania się naprężeń normalnych są spełnione tożsamościowo.

Równanie drugie

$$\iint_A \tau_{xy} dA = \iint_A -G\theta(x)z dA = -G\theta(x) \iint_A z dA = 0,$$

jest spełnione, bo całka to moment statyczny względem osi centralnej Y.

Z analogicznego powodu spełnione jest trzecie równanie równoważności:

$$\iint_A \tau_{xz} dA = \iint_A G\theta(x)y dA = G\theta(x) \iint_A y dA = 0.$$

Przejdźmy do równania czwartego:

$$\iint_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA = M_s(x)$$

Podstawienie pod całkę zależności (15.7) i kolejne przekształcenia dają

$$\iint_A [G\theta(x)z^2 + G\theta(x)y^2] dA = M_s(x) \rightarrow G\theta(x) \iint_A (z^2 + y^2) dA = M_s(x)$$

$$\theta(x) = \frac{M_s(x)}{GJ_0} \quad (15.8)$$

gdzie: $J_0 = \iint_A (y^2 + z^2) dA = \iint_A \rho^2 dA$ to biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego względem jego środka ciężkości, a iloczyn GJ_0 nazywany jest sztywnością na skręcanie.

Wstawiając (15.8) do (15.5) otrzymujemy wzór określający rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym skręcanego pręta o przekroju kołowo-symetrycznym:

$$\tau = \frac{M_s(x)}{J_0} \rho. \quad (15.9)$$

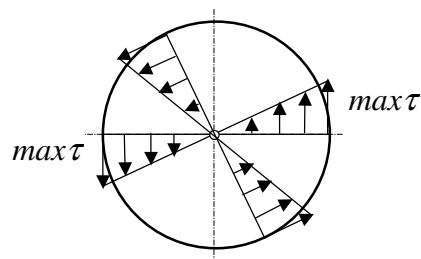
14.2. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia

W rozważanym przypadku na płaszczyznach prostopadłych do osi układu odniesienia nie ma naprężeń normalnych a występujące w płaszczyźnie przekroju poprzecznego naprężenia styczne określone wzorem (15.9) są liniowo zależne od odległości od jego środka ciężkości. Zatem swą największą wartość osiągają one w punktach leżących na obwodzie:

$$\max \tau = \frac{M_s(x)}{J_0} r = \frac{M_s(x)}{W_0} \quad (15.10)$$

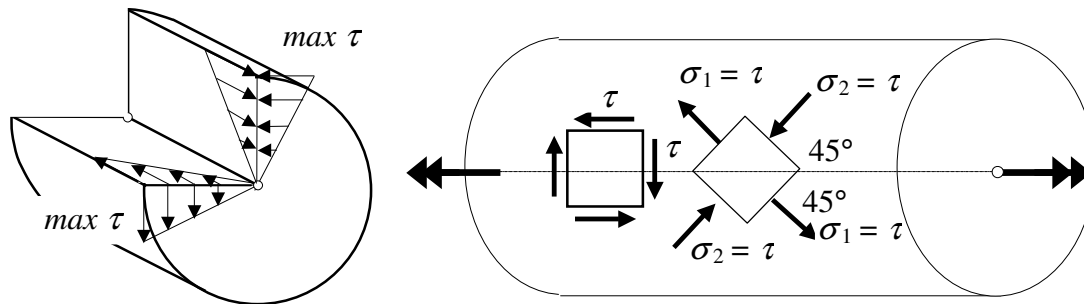
gdzie: $W_0 = \frac{J_0}{r}$ - wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu (lub biegunowy wskaźnik wytrzymałości)

Rozkład tych naprężeń stycznych pokazany jest na rys.15.4 i jak już powiedziano wyżej ich kierunek jest prostopadły do wektora wodzącego punktu a zwrot taki, że kręcą one względem środka ciężkości tak samo jak obciążający przekrój moment skręcający. Kołowa symetria przekroju powoduje, że taki liniowy rozkład występuje na każdym odcinku przechodzącym przez środek przekroju poprzecznego.



Rys. 15.4

Pokazuje to wyraźniej rys. 14.5, który może również ułatwić zrozumienie, że w omawianym przypadku w każdym punkcie pręta mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia (dokładniej z czystym ścinaniem) i że płaszczyzną tego stanu jest płaszczyzna prostopadła do przekroju poprzecznego i prostopadła do wektora wodzącego punktu. Naprężenia główne, z których jedno jest rozciągające a drugie ściskające o wartościach równych naprężeniom stycznym, nachylone są pod kątem 45° do osi pręta (rys.15.5).



Rys.14.5

Macierz odkształceń odpowiadającą wyznaczonym naprężeniom obliczamy korzystając ze związków fizycznych Hooke'a.

Z zależności (15.3) i (18.8) wynika, że kąt skręcenia dwóch przekrojów odległych o x jest równy:

$$\varphi(x) = \int_0^x \theta(x) dx = \int_0^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx. \quad (15.11)$$

Stąd, całkowity kąt skręcenia pręta o długości l , obciążonego stałym momentem skręcającym $M_s(x) = M_s$, wynosi:

$$\varphi = \frac{M_s l}{GJ_0}. \quad (15.12)$$

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na zależność (15.11), pokazuje ona, że funkcja momentów skręcających podzielona przez sztywność na skręcanie GJ_0 jest pochodną kąta skręcenia.

15.3. Energia sprężysta skręcanego pręta o kołowo symetrycznym przekroju

Podstawienie wyrażeń określających elementy macierzy naprężeń do wzorów (8.18) pozwala na wyznaczenie gęstości energii sprężystej i energii sprężystej dla skręcanego pręta o kołowo symetrycznym przekroju poprzecznym:

$$\Phi = \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2G} \left[\frac{M_s(x)}{J_0} \rho \right]^2,$$

i stąd energia sprężysta takiego pręta o długości l wynosi:

$$U = \iiint_V \Phi dV = \iiint_V \frac{1}{2G} \left[\frac{M_s(x)}{J_0} \rho \right]^2 dV = \int_0^l dx \iint_A \frac{1}{2G} \left[\frac{M_s(x)}{J_0} \rho \right]^2 dA = \int_0^l \frac{M_s^2(x)}{2GJ_0} dx.$$

W przypadku pręta, którego przekrój poprzeczny zmienia się na jego długości, energia sprężysta jest równa:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{si}^2(x)}{2GJ_{oi}} dx, \quad (15.13)$$

gdzie sumowanie należy wykonać po wszystkich przedziałach charakterystycznych.

15.4. Wymiarowanie skręcanych prętów o kołowo symetrycznym przekroju

Stan graniczny nośności wymaga aby największe naprężenia styczne w konstrukcji były mniejsze od naprężeń obliczeniowych przy ścinaniu R_t :

$$\max \tau \leq R_t$$

W przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym na całej jego długości największe naprężenia styczne wystąpią w przekroju maksymalnego momentu skręcającego we wszystkich punktach na obwodzie i warunek stanu granicznego nośności przyjmie formę:

$$\max \tau = \frac{\max M_s}{W_0} \leq R_t \quad (15.14)$$

Stan graniczny użytkowania nie dopuszcza zbyt dużego kąta skręcenia w konstrukcji i związany z nim warunek stawia wymóg, by największy jednostkowy kąt skręcenia był mniejszy od dopuszczalnego:

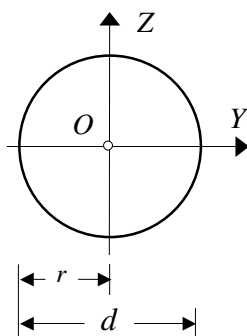
$$\max \theta \leq \theta_{dop} .$$

W przypadku pręta pryzmatycznego wykonanego z jednego materiału największy jednostkowy kąt skręcenia wystąpi w przekroju maksymalnego momentu skręcającego i warunek stanu granicznego użytkowania przyjmuje postać:

$$\frac{\max M_s}{GJ_0} \leq \theta_{dop} . \quad (15.15)$$

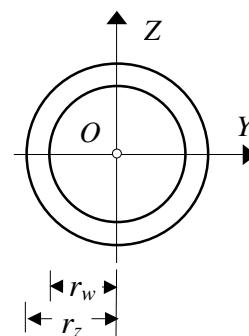
15.5. Przykłady

Przykład 15.5.1. Wyznaczyć biegunowy moment bezwładności i biegunowy wskaźnik wytrzymałości dla przekroju kołowego i rurowego.



$$J_0 = J_y + J_z = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

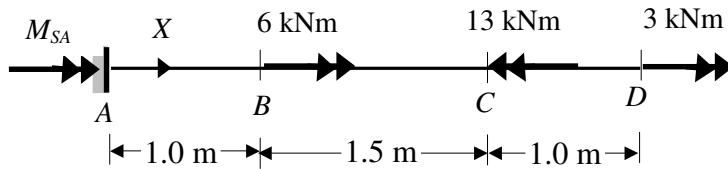
$$W_0 = \frac{J_0}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$



$$J_0 = \frac{\pi r_z^4}{2} - \frac{\pi r_w^4}{2} = \frac{\pi r_z^4}{2} \left[1 - \left(\frac{r_w}{r_z} \right)^4 \right]$$

$$W_0 = \frac{J_0}{r_z} = \frac{\pi r_z^3}{2} \left[1 - \left(\frac{r_w}{r_z} \right)^4 \right]$$

Przykład 15.5.2. Wyznaczyć potrzebną średnicę pręta skręcanego obciążonego jak na rysunku ze względu na stan graniczny nośności i użytkowania jeśli $R_t = 130 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $\theta_{dop} = 0.3^\circ/\text{m}$. Po przyjęciu średnicy wyznaczyć wykres kątów skręcenia poszczególnych przekrojów względem przekroju A.



Rozwiązanie

Wykres momentów skręcających pozwoli określić maksymalny moment skręcający w konstrukcji. Aby go wyznaczyć w pierw wyliczymy moment skręcający w utwierdzeniu. Po przyjęciu jego zwrotu jak na rysunku warunek równowagi sił działających na pręt ma postać:

$$\sum M_x = 0 \quad \text{lub inaczej} \quad \sum M_s = 0, \quad \text{co pokazuje fizyczną interpretację tego warunku:}$$

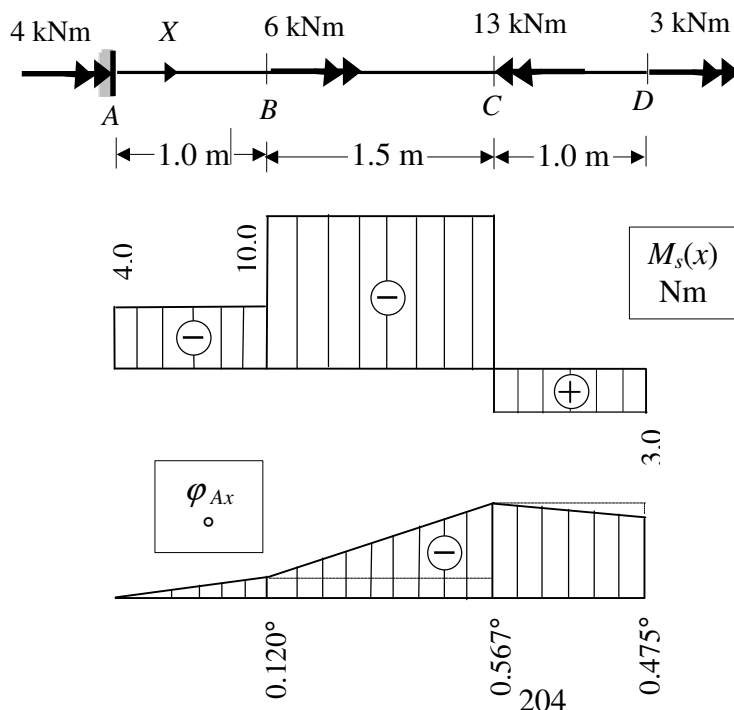
$$M_{SA} + 6 - 13 + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad M_{SA} = 4.0 \text{ kNm.}$$

Aby sporządzić wykres momentów skręcających wygodnie jest przyjąć lokalną umowę znakowania tych sił przekrojowych, która uwalniałaby nas od układu globalnego i informacji po której stronie przekroju dokonywana jest redukcja. Z podobnymi umowami mieliśmy już do czynienia - był to układ własny przekroju poprzecznego pręta przy znakowaniu sił poprzecznych i podłużnych czy też spody przy momentach zginających.

Umowę znakowania momentów skręcających pokazuje poniższy rysunek



Przy tej umowie wykres momentów skręcających w rozważanym pręcie pokazuje rysunek poniżej:



Maksymalny moment skręcający $\max M_s = 10.0$ kNm.

Wyznaczenie średnicy pręta.

Potrzebny wymiar ze względu na stan graniczny nośności:

$$\max \tau = \frac{\max M_s}{W_0} \leq R_t \rightarrow W_0 \geq \frac{\max M_s}{R_t} \rightarrow \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{10 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6} \rightarrow d \geq 7.23 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Potrzebny wymiar ze względu na stan graniczny użytkowania:

$$\max \theta = \frac{\max M_s}{GJ_0} \leq \theta_{dop} \rightarrow J_0 \geq \frac{\max M_s}{G \theta_{dop}} \rightarrow \frac{\pi d^4}{32} \geq \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ}{80 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0.3} \rightarrow d \geq 12.49 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

W warunku stanu granicznego użytkowania θ_{dop} podane w $^\circ/\text{m}$ należało wyrazić w $1/\text{m}$ a ponieważ $180^\circ = \pi$ - stąd forma zapisu tego warunku.

Przyjęto do wykonania $d = 12.5$ cm .

Biegunowy moment bezwładności pręta przy takiej średnicy wynosi:

$$J_0 = \frac{\pi \cdot 12.5^4}{32} = 2396.84 \text{ cm}^4.$$

Kąty skręcenia względem przekroju utwierdzenia wyznaczymy sumując kąty skręcenia poszczególnych przekrojów charakterystycznych względem siebie.

Ponieważ we wszystkich przedziałach charakterystycznych momenty skręcające są stałe, to kąty skręcenia możemy liczyć według wzoru:

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_0}.$$

Zatem:

$$\varphi_{AB} = \frac{-4.0 \cdot 10^3 \cdot 1.0}{80 \cdot 10^9 \cdot 2396.84 \cdot 10^{-8}} = -0.0021 \text{ rd} = -0.0021 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0.120^\circ,$$

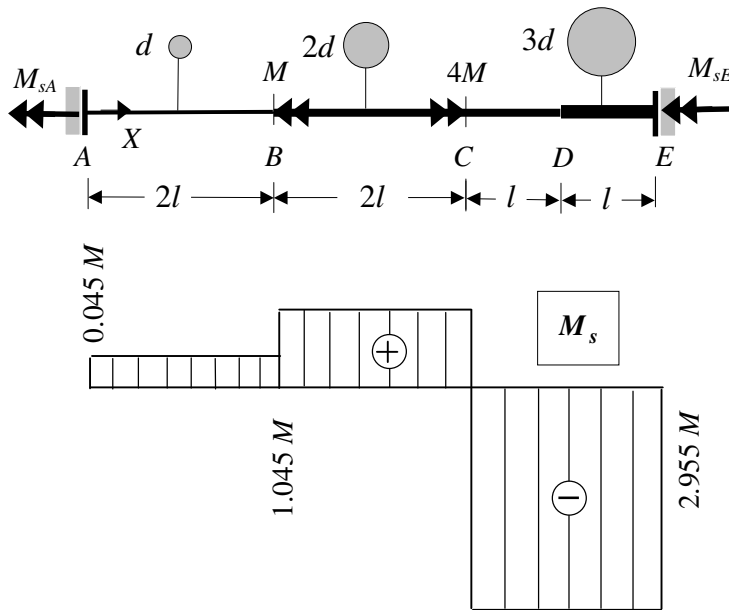
$$\varphi_{BC} = \frac{-10.0 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{80 \cdot 10^9 \cdot 2396.84 \cdot 10^{-8}} = -0.0078 \text{ rd} = -0.0078 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0.447^\circ,$$

$$\varphi_{CD} = \frac{3.0 \cdot 10^3 \cdot 1.0}{80 \cdot 10^9 \cdot 2396.84 \cdot 10^{-8}} = 0.0016 \text{ rd} = 0.0016 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0.092^\circ,$$

$$\varphi_{AD} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = -0.120 - 0.447 + 0.092 = -0.475^\circ.$$

Obliczone kąty pozwalają narysować wykres kątów skręcenia, który został pokazany na rysunku wyżej.

Przykład 15.5.3. Wyznaczyć maksymalne naprężenie styczne w przekroju poprzecznym dwustronnie zamocowanego pręta skręcanego o skokowo zmiennym przekroju kołowym jak na rysunku. Dane są: d , l , G oraz M .



Pręt jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny gdyż do wyznaczenia dwóch reakcji w postaci momentów skręcających w utwierdzeniach M_{sA} i M_{sE} dysponujemy tylko jednym równaniem równowagi, tj. $\sum M_s = 0$. Dodatkowego równania należy, jak zawsze w przypadku zadania statycznie niewyznaczalnego, poszukiwać w warunkach geometrycznych konstrukcji. W tym przypadku warunek geometryczny wynika z obustronnego zamocowania pręta, zatem kąt skręcenia skrajnych przekrojów jest równy zero co daje dodatkowe równanie w postaci $\varphi_{AE} = 0$.

Przy założonych jak na rysunku, zwrotach momentów skręcających w utwierdzeniach równania te mają postać:

- równanie równowagi

$$\sum M_s = 0 \rightarrow M_{sA} + M - 4M + M_{sE} = 0,$$

- równanie geometryczne

$$\varphi_{AE} = 0 \rightarrow \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = 0,$$

$$\frac{M_{sA} 2l}{GJ_{0AB}} + \frac{(M_{sA} + M) 2l}{GJ_{0BC}} + \frac{(M_{sA} + M - 4M) l}{GJ_{0CD}} + \frac{(M_{sA} + M - 4M) l}{GJ_{0DE}} = 0$$

Biegunowy moment bezwładności na odcinku AB jest równy:

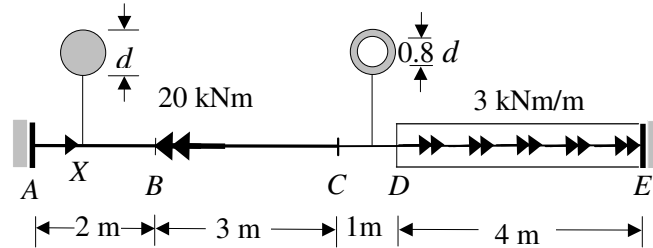
$J_{0AB} = \frac{\pi d^4}{32}$ i jeśli oznaczymy go przez J_0 , to biegunowe momenty bezwładności na pozostałych odcinkach pręta wynoszą: $J_{0BC} = J_{0CD} = 16J_0$, $J_{0DE} = 81J_0$. Przy tych oznaczeniach równanie geometryczne przyjmuje postać:

$$\frac{M_{sA} 2l}{GJ_0} + \frac{(M_{sA} + M) 2l}{G * 16J_0} + \frac{(M_{sA} + M - 4M) l}{G * 16J_0} + \frac{(M_{sA} + M - 4M) l}{G * 81J_0} = 0,$$

z którego wyliczamy $M_{sA} = 0.045M$, a po wstawieniu do równania równowagi otrzymujemy $M_{sE} = 2.955M$. Wykres momentów skręcających pokazany na rysunku i geometria przekrojów poprzecznych pręta pozwala sądzić, że największe naprężenia styczne wystąpią na odcinku CD w punktach na obwodzie przekroju poprzecznego i będą miały wartość:

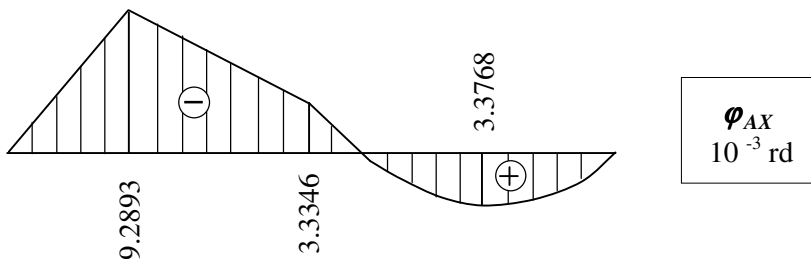
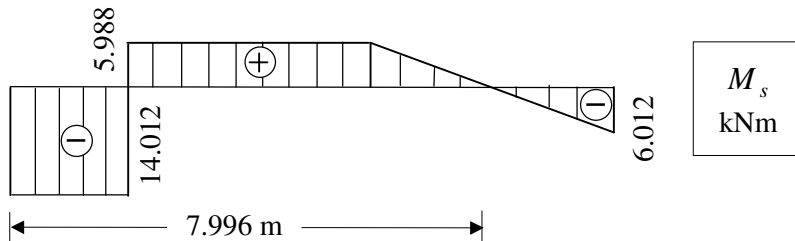
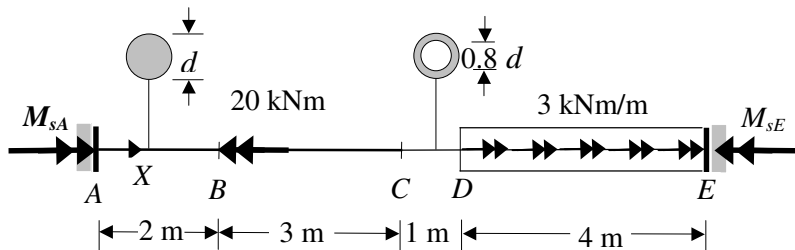
$$\max \tau = \frac{2.955 M}{\pi(2d)^4/32d} = 1.88 \frac{M}{d^3}.$$

Przykład 15.5.4. Wyznaczyć potrzebną średnicę pręta skręcanego, obciążonego jak na rysunku ze względu na stan graniczny nośności i użytkowania, jeśli $R_t = 110 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ MPa}$, $\theta_{dop} = 0.3^\circ / \text{m}$. Po przyjęciu średnicy wyznaczyć wykres kątów skręcenia poszczególnych przekrojów względem przekroju A.



Rozwiązanie

Pręt jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Do wyznaczenia dwóch reakcji w postaci momentów skręcających w utwierdzeniach M_{sA} i M_{sE} dysponujemy jednym równaniem równowagi i jednym równaniem geometrycznym.



Przy założonych jak na rys. zwrotach momentów skręcających w utwierdzeniach równania te mają postać:

- równanie równowagi
- $$\sum M_s = 0 \rightarrow -M_{sA} + 20 - 3 \cdot 4 + M_{sE} = 0$$
- równanie geometryczne

$$\varphi_{AE} = 0 \rightarrow \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = 0$$

$$\frac{-M_{sA} * 2}{GJ_{0AC}} + \frac{(-M_{sA} + 20) * 3}{GJ_{0AC}} + \frac{(-M_{sA} + 20) * 3}{GJ_{0CE}} + \frac{(-M_{sA} + 20 - 3 * 4) * 2}{GJ_{0CE}} = 0$$

W powyższym równaniu równowagi obciążenie, rozłożonym w sposób ciągły momentem skręcającym na odcinku DE zostało zastąpione równoważnym, skupionym w środku odcinka momentem skręcającym.

Biegunowy moment bezwładności na odcinku AC jest równy $J_{0AC} = \frac{\pi d^4}{32}$ i jeśli oznaczymy

go przez J_0 , to biegunowy moment bezwładności na pozostałym odcinku pręta ma wartość

$$J_{0CE} = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi (0.8d)^4}{32} = 0.5904 J_0. \text{ Po wykorzystaniu tej zależności i prostych}$$

rachunkach równanie geometryczne przyjmuje postać:

$$-13.4688M_{sA} + 188.7263 = 0$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy: $M_{sA} = 14.012 \text{ kNm}$, $M_{sE} = 6.012 \text{ kNm}$.

Równania momentów skręcających:

$$0 < x < 2.0 \text{ m}$$

$$2.0 < x < 6.0 \text{ m}$$

$$M_s(x) = -M_{sA} = -14.012 \text{ kNm},$$

$$M_s(x) = -M_{sA} + 20 = 5.988 \text{ kNm}$$

$$6.0 < x < 10.0 \text{ m}$$

$$M_s(x) = 5.988 - 3(x - 6); M_s(6) = 5.988 \text{ kNm}, M_s(7.996) = 0, M_s(10) = -6.012 \text{ kNm}.$$

W miejscu zerowania się momentu skręcającego, tj. dla $x = 7.996 \text{ m}$ wystąpi ekstremum kąta skręcenia w tym przedziale.

Wykres momentów skręcających pokazany jest wyżej.

Wyznaczenie wielkości potrzebnej średnicy pręta.

odcinek AC

$$\max M_s = 14.012 \text{ kNm}$$

- stan graniczny nośności

$$\frac{\max M_s}{W_0} \leq R_t \rightarrow W_0 \geq \frac{\max M_s}{R_t} \rightarrow \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{14.012 * 10^3}{110 * 10^6} \rightarrow d \geq 0.087 \text{ m},$$

- stan graniczny użytkowania

$$\frac{\max M_s}{GJ_0} \leq \theta_{dop} \rightarrow J_0 \geq \frac{\max M_s}{G \theta_{dop}} \rightarrow \frac{\pi d^4}{32} \geq \frac{14.012 * 10^3 * 180^\circ}{80 * 10^9 * 0.3 * \pi} \rightarrow d \geq 0.136 \text{ m}.$$

odcinek CE

$$\max M_s = 6.012 \text{ kNm}$$

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi (0.8d)^4}{32} = 0.5904 \frac{\pi d^4}{32} = 0.0580 d^4,$$

$$W_0 = \frac{J_0}{d/2} = 0.1159 d^3.$$

- stan graniczny nośności

$$\frac{\max M_s}{W_0} \leq R_t \rightarrow W_0 \geq \frac{\max M_s}{R_t} \rightarrow 0.1159 d^3 \geq \frac{6.012 * 10^3}{110 * 10^6} \rightarrow d \geq 0.078 \text{ m},$$

- stan graniczny użytkowania

$$\frac{\max M_s}{GJ_0} \leq \theta_{dop} \rightarrow J_0 \geq \frac{\max M_s}{G \theta_{dop}} \rightarrow 0.0580 d^4 \geq \frac{6.012 * 10^3 * 180^\circ}{80 * 10^9 * 0.3 * \pi} \rightarrow d \geq 0.125 \text{ m}.$$

Przyjęto do wykonania $d = 0.14 \text{ m}$.

Biegunowy moment bezwładności na odcinku AC wynosi 3771 cm^4 a na odcinku CE jest równy 2227 cm^4

Równania kątów skręcenia względem przekroju A :

$$0 < x < 2.0 \text{ m}$$

$$\varphi_{Ax} = \int_0^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx = \int_0^x \frac{-14.012 * 10^3}{80 * 10^9 * 3771 * 10^{-8}} dx = -4.6447 * 10^{-3} x; \quad \varphi_{AB} = -9.2893 * 10^{-3} \text{ rd}$$

$$2.0 < x < 5.0 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Ax} &= \varphi_{AB} + \int_2^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx = \varphi_{AB} + \int_2^x \frac{5.988 * 10^3}{80 * 10^9 * 3771 * 10^{-8}} dx = \\ &= -9.2893 * 10^{-3} + 1.9849 * 10^{-3} (x - 2); \quad \varphi_{AC} = -3.3346 * 10^{-3} \text{ rd} \end{aligned}$$

$$5.0 < x < 6.0 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Ax} &= \varphi_{AC} + \int_5^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx = \varphi_{AC} + \int_5^x \frac{5.988 * 10^3}{80 * 10^9 * 2227 * 10^{-8}} dx = \\ &= -3.3346 * 10^{-3} + 3.3610 * 10^{-3} (x - 5); \quad \varphi_{AD} = 0.0269 * 10^{-3} \text{ rd} \end{aligned}$$

$$6.0 < x < 10.0 \text{ m}$$

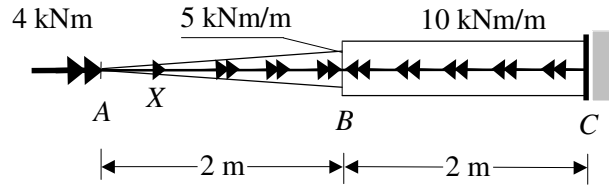
$$\begin{aligned} \varphi_{Ax} &= \varphi_{AD} + \int_6^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx = \varphi_{AD} + \int_6^x \frac{[5.988 - 3(x - 6)] * 10^3}{80 * 10^9 * 2227 * 10^{-8}} dx = \\ &= -50.4496 * 10^{-3} + 13.4643 * 10^{-3} x - 0.8420 * 10^{-3} x^2; \quad \varphi_{AE} = -0.5421 * 10^{-6} \text{ rd} \approx 0 \end{aligned}$$

Ekstremalny kąt skręcenia w tym przedziale: $\varphi_{Ax}(7.996) = 3.3768 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$.

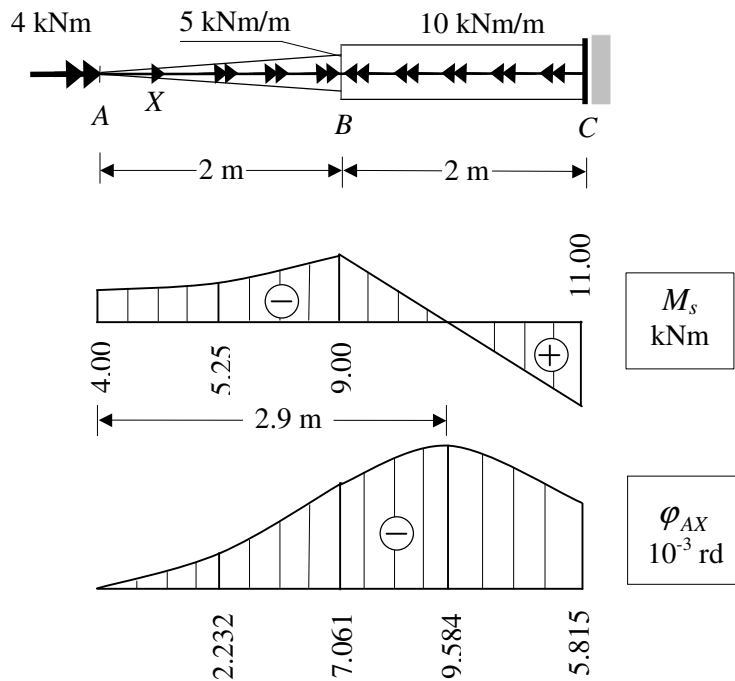
Wykres kątów skręcenia względem przekroju A jest wyżej pokazany.

Przykład 15.5.5. W skręcanym pręcie kołowym o średnicy $d = 12 \text{ cm}$ obciążonym jak na rys.

wyznaczyć: wykres momentów skręcających, wykres kątów skręcenia poszczególnych przekrojów względem przekroju A oraz ekstremalne naprężenia główne i odkształcenia główne jeżeli stałe materiałowe wynoszą $E = 205 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.



Rozwiązanie



Równania momentów skręcających:

$$0 < x < 2.0 \text{ m}$$

$$M_s(x) = -4.0 - \frac{1}{2} 2.5x * x = -4.0 - 1.25x^2,$$

$$M_s(0) = -4.00 \text{ kNm}, \quad M_s(1) = -5.25 \text{ kNm}, \quad M_s(2) = -9.00 \text{ kNm}.$$

$$2.0 < x < 4.0 \text{ m}$$

$$M_s(x) = -9 + 10(x - 2) = 10x - 29$$

$$M_s(2) = -9.00 \text{ kNm}, \quad M_s(4) = 11.00 \text{ kNm}, \quad M_s(2.9) = 0.00 \text{ kNm}.$$

Biegunowy moment bezwładności przekroju pręta wynosi: $J_0 = \frac{\pi * 12^4}{32} = 2035.75 \text{ cm}^4$.

$$\text{Sztywność na skręcanie } GJ_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} J_0 = \frac{205 \cdot 10^9}{2(1+0.3)} 2035.75 \cdot 10^{-8} = 1.6051 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2.$$

Równania kątów skręcenia względem przekroju A:

$$0 < x < 2.0 \text{ m}$$

$$\varphi_{Ax} = \int_0^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx = \int_0^x \frac{-(4 + 1.25x^2) \cdot 10^3}{1.6051 \cdot 10^6} dx = -(2.492x + 0.2596x^3) \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

$$\varphi_{Ax}(1) = -2.232 \cdot 10^{-3} \text{ rd}, \quad \varphi_{Ax}(2) = \varphi_{AB} = -7.061 \cdot 10^{-3} \text{ rd}.$$

$$2.0 < x < 4.0 \text{ m}$$

$$\varphi_{Ax} = \varphi_{AB} + \int_2^x \frac{M_s(x)}{GJ_0} dx = \varphi_{AB} + \int_2^x \frac{(10x - 29) \cdot 10^3}{1.6051 \cdot 10^6} dx = (16.613 + 3.115x^2 - 18.067x) \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

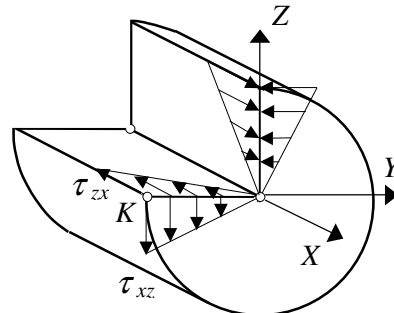
$$\varphi_{Ax}(2) = \varphi_{AB} = -7.061 \cdot 10^{-3} \text{ rd}, \quad \varphi_{Ax}(3) = -9.553 \cdot 10^{-3} \text{ rd}, \quad \varphi_{Ax}(4) = \varphi_{AC} = -5.815 \cdot 10^{-3} \text{ rd}.$$

$$\text{Ekstremalny kąt skręcenia: } \varphi_{Ax}(2.9) = -9.584 \cdot 10^{-3} \text{ rd}.$$

Ekstremalne naprężenia główne i odkształcenia główne wystąpią w przekroju największego momentu skręcającego w dowolnym punkcie na obwodzie przekroju poprzecznego pręta.

Jeśli wybierzemy punkt K, to przy przyjętym układzie współrzędnych, wystąpią w nim jedynie naprężenia styczne:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{M_s}{W_o} = -\frac{11.0 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0.12^3 / 16} = -32.420 \text{ MPa}.$$



W wybranym punkcie występuje płaski stan naprężenia (czyste ścinanie), który w płaszczyźnie stanu naprężenia (tzn. płaszczyźnie (X, Z)) jest reprezentowany przez macierz:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -32.42 \\ -32.42 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

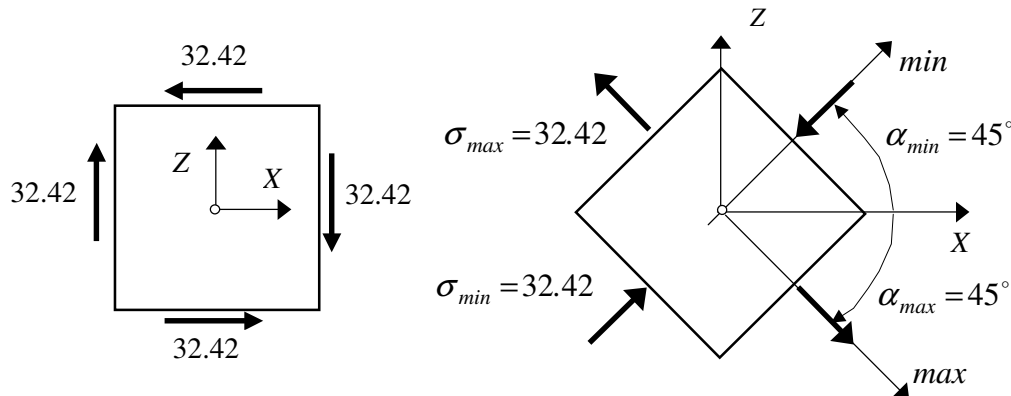
Naprężenia główne mają wartości:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 32.42 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = -32.42 \text{ MPa}.$$

a ich kierunki określają kąty:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{-\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_{\max}} = -1.0 \rightarrow \alpha_{\max} = -45^\circ, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{-\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_{\min}} = 1.0 \rightarrow \alpha_{\min} = 45^\circ$$



Wartości ekstremalnych odkształceń głównych wyznaczamy, korzystając z równań Hooke'a

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E}(\sigma_{\max} - \nu\sigma_{\min}) = \frac{32.42(1+0.3) \cdot 10^6}{205 \cdot 10^9} = 0.206 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_{\min} = \frac{1}{E}(\sigma_{\min} - \nu\sigma_{\max}) = \frac{-32.42(1+0.3) \cdot 10^6}{205 \cdot 10^9} = -0.206 \cdot 10^{-3}.$$

Kierunki włókien, które mają ekstremalne odkształcenia liniowe (a odkształcenia kątowe są równe zero) pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

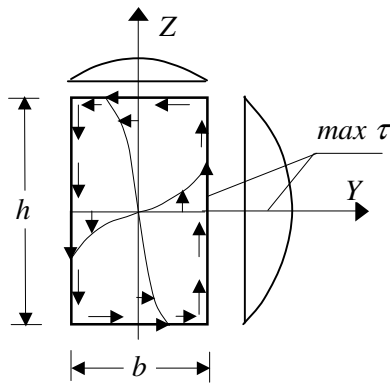
15.6. Naprężenia styczne w skręcanym pręcie o przekroju prostokątnym

Przy skręcaniu prętów o przekroju poprzecznym każdym innym niż kołowo symetrycznym, nie jest prawdziwe założenie jakoby przekrój płaski przed przyłożeniem obciążenia pozostał taki po obciążeniu i jego przemieszczenia polegały jedynie na obrocie wokół osi pręta. Swobodnemu skręcaniu takich prętów towarzyszy deplanacja (wypaczanie) ich przekroju poprzecznego, tzn. punkty przekroju poprzecznego mogą się swobodnie przemieszczać w kierunku równoległym do jego osi i naprężenia normalne w przekroju poprzecznym są równe zero.

Otrzymanie ścisłych wyników dla takich przypadków wymaga użycia bardziej niż dotąd złożonych metod analizy matematycznej i niżej ograniczymy się jedynie do podania końcowych wyników ścisłego rozwiązania zagadnienia skręcania pręta o przekroju prostokątnym uzyskanych przez de Saint-Venanta w 1855 r.

Rozkład naprężeń stycznych w skręcanym przekroju prostokątnym pokazany jest na rys.15.6. Należy przede wszystkim zauważyć, że naprężenia te są styczne do konturu i osiągają największą wartość w połowie dłuższego boku, a zerują się w narożach. Zwrot naprężeń jest taki, że kręcą względem środka tak samo jak obciążający moment skręcający.

Wartości największych naprężeń stycznych oraz jednostkowego kąta podają wzory:



$$\max \tau = \frac{M_s}{\alpha h b^2}, \quad (15.16)$$

$$\theta = \frac{M_s}{G \beta h b^3}. \quad (15.17)$$

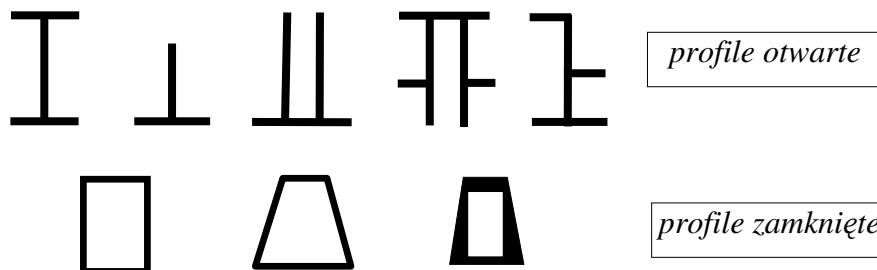
Rys. 15.6

Współczynniki α oraz β występujące we wzorach (15.16) i (15.17) zależą są od stosunku boków h/b (b jest z umowy krótszym bokiem) i podane są w tabelce poniżej

h/b	1.0	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

15.7. Przybliżony sposób wyznaczania naprężeń stycznych w skręcanych prętach o dowolnym przekroju

Ten przybliżony sposób stosujemy najczęściej przy skręcaniu prętów cienkościennych. Pręty takie charakteryzują się niewielką grubością ścianki w stosunku do pozostałych wymiarów. Ze względu na kształt przekroju możemy je podzielić na profile otwarte i profile zamknięte (rys.15.7). Zajmiemy się każdym z tych rodzajów prętów oddzielnie a głównym naszym celem będzie wyznaczenie największych naprężeń stycznych w przekroju.

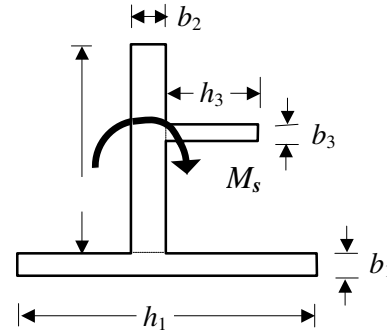


Rys. 15.7

Zacniemy od profili otwartych. Pierwszym krokiem, który musimy dokonać w tym podejściu jest podział i aproksymacja całkowitego przekroju na części składowe, każda o przekroju prostokątnym (rys. 15.8). Dalej ten aproksymowany przekrój traktowany jest jako zbiór prostokątów, każdy obciążony jakimś swoim momentem skręcającym. Dla takiego przybliżonego przekroju przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- suma momentów skręcających poszczególne prostokątne części składowe jest równa momentowi skręcającemu przyłożonemu do całego profilu
- jednakowy jest jednostkowy kąt skręcania wszystkich poszczególnych elementów składowych.

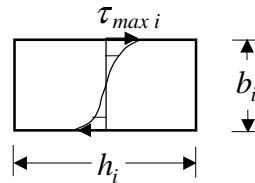
Rozważmy pokazany na rys.15.8 przekrój i podzielmy go trzy prostokątne elementy (zatem w dalszych wzorach $n = 3$) o wymiarach $b_i \times h_i$, gdzie szerokość b_i jest mniejszym wymiarem danego prostokąta. Podział na elementy składowe w zasadzie jest dowolny ale wskazane jest „zdroworozsądkowe” podejście w tym zakresie.



Rys. 15.8

Dla każdego składowego „i-tego” elementu obowiązują zależności i rozkład naprężeń stycznych jak w prostokącie:

$$\max \tau_i = \frac{M_{si}}{\alpha_i h_i b_i^2}, \quad \theta_i = \frac{M_{si}}{G \beta_i h_i b_i^3}$$



Pierwsze założenie upraszczające daje równanie (możemy je nazwać równaniem równowagi):

$$M_s = \sum_{i=1}^n M_{si}, \quad (15.18)$$

a drugie założenie upraszczające pozwala napisać zależności (możemy je nazwać geometrycznymi):

$$\theta_i = \theta. \quad (15.19)$$

Ze wzorów dla prostokąta i zależności geometrycznych otrzymujemy związki :

$M_{si} = \theta_i G \beta_i h_i b_i^3 = \theta G \beta_i h_i b_i^3$, które po wstawieniu do równania (15.18) dają zależność:

$$M_s = \sum_{i=1}^n M_{si} = \theta G \sum_{i=1}^n \beta_i h_i b_i^3,$$

z której możemy wyznaczyć jednostkowy kąt skręcenia przekroju:

$$\theta = \frac{M_s}{G J_s} \quad (15.20)$$

$$\text{gdzie: } J_s = \sum_{i=1}^3 \beta_i h_i b_i^3 \quad (15.21)$$

Wstawiając wyrażenie na jednostkowy kąt skręcenia (15.20) do wzoru na moment skręcający w „i-tym” prostokącie:

$$M_{si} = \theta G \beta_i h_i b_i^3 = \frac{M_s}{G J_s} G \beta_i h_i b_i^3 = \frac{M_s}{J_s} \beta_i h_i b_i^3$$

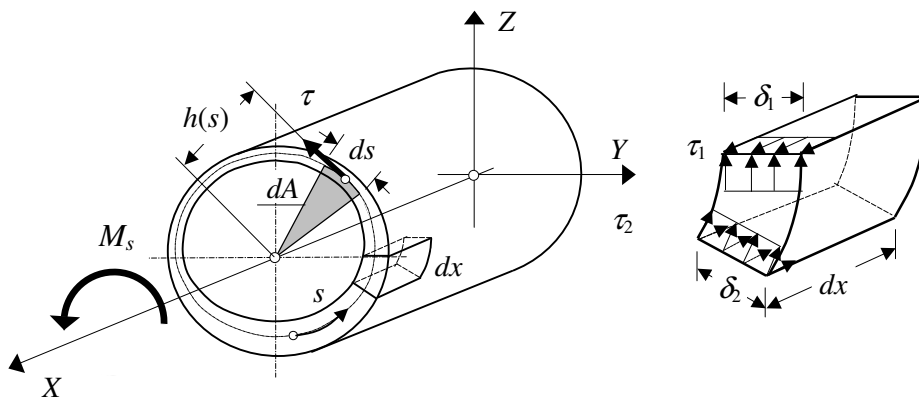
a dalej do wzoru na naprężenia styczne, otrzymujemy wzór określający wielkość maksymalnych naprężeń stycznych w nim występujących:

$$\max \tau_i = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta_i}{\alpha_i} b_i. \quad (15.22)$$

Za maksymalne naprężenie styczne w przekroju uznajemy największe naprężenie ze wszystkich składowych prostokątów.

Tablica wartości współczynników α oraz β pokazuje, że dla prostokątów, których wysokość h jest znacznie większa od szerokości b iloraz β_i/α_i jest bliski jedności i gdy przekrój „składa” się właśnie z takich prostokątów to największe naprężenie styczne wystąpi w prostokącie o największej szerokości.

Zajmijmy się teraz największymi naprężeniami stycznymi w przekroju poprzecznym profili zamkniętych i w dodatku tylko jednokomorowych (rys.15.9).



Rys. 15.9

W tym przypadku założeniem upraszczającym będzie przyjęcie, że naprężenia styczne rozkładają się równomiernie na grubości ścianki. Ponieważ naprężenia styczne na dwóch do siebie prostopadłych płaszczyznach są sobie równe, to warunek równowagi wyciętego dowolnie małego elementu pręta dowodzi:

$$\sum X = 0 \rightarrow \tau_1 \delta_1 dx - \tau_2 \delta_2 dx = 0 \rightarrow \tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2,$$

że iloczyn grubości ścianki i panujących w tym miejscu naprężeń stycznych jest stały
 $\tau \delta = const$

Z kolei z twierdzenia o równoważności układów sił zewnętrznych i wewnętrznych wynika:

$$M_s = \oint \tau(s) \delta(s) ds h(s) = \tau \delta \oint h(s) ds.$$

Rys.15.9 pokazuje, że $h(s) ds / 2 = dA$, zatem:

$$M_s = \tau \delta 2 \iint_A dA = 2 \tau \delta A_0$$

gdzie: A_0 - pole obszaru ograniczonego linią środkową ścianki. Możemy więc napisać zależność:

$$\tau = \frac{M_s}{2 \delta A_0} \quad (15.23)$$

z której wynika, że maksymalne naprężenia styczne wystąpią w miejscu w którym grubość ścianki jest minimalna i wynoszą:

$$\max \tau = \frac{M_s}{2 A_0 \min \delta}. \quad (15.24)$$

Wyznamy teraz jednostkowy kąt skręcenia takiego pręta. W rozdziale 8 stwierdziliśmy, że w przypadku obciążeń statycznych w konstrukcji wykonanej z materiału sprężystego praca sił zewnętrznych jest równa energii sprężystej układu. Zatem dla pręta o rozważanym przekroju i jednostkowej długości obciążonego momentem skręcającym M_s możemy napisać:

$$\frac{1}{2} M_s \theta = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G} dV.$$

Podstawiając do powyższej zależności wzór (15.23) i uwzględniając geometrię przekroju poprzecznego pręta, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} M_s \theta = \oint \frac{M_s^2}{8G\delta^2 A_0^2} dA,$$

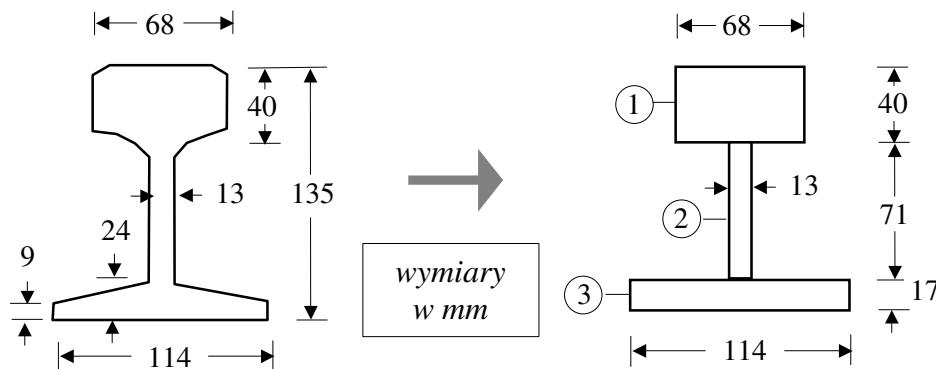
ale $dA = \delta ds$, więc ostatecznie, po prostym przekształceniu, dostajemy:

$$\theta = \frac{M_s}{4G A_0^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (15.25)$$

Wzory (15.24) i (15.25), określające przybliżone wartości maksymalnych naprężeń stycznych i jednostkowego kąta skręcenia dla profili zamkniętych nazywane bywają wzorami Bredta.

15.7.1. Przykłady

Przykład 15.7.1.1. Wyznaczyć największe naprężenie styczne w przekroju poprzecznym szyny kolejowej pokazanej na rys. skręcanej momentem o wartości $M_s = 1.0$ kNm.



Rozwiązanie

Po aproksymacji przekroju trzema prostokątami jak na rysunku potrzebujemy wyznaczyć współczynniki α_i oraz β_i dla każdego z nich. Interpolując wartości podane w tabelce otrzymujemy:

prostokąt 1: $h_1/b_1 = 68/40 = 1.70 \rightarrow \alpha_1 = 0.237, \beta_1 = 0.210$

prostokąt 2: $h_2/b_2 = 71/13 = 5.50 \rightarrow \alpha_2 = 0.295, \beta_2 = 0.295$

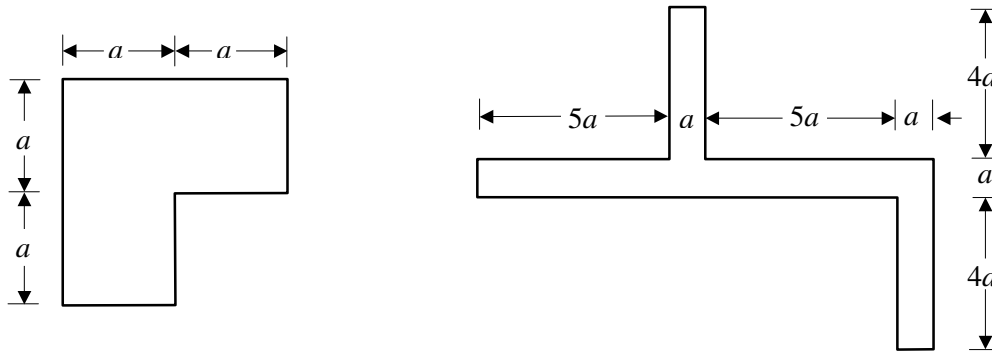
prostokąt 3: $h_3/b_3 = 114/17 = 6.70 \rightarrow \alpha_3 = 0.302, \beta_3 = 0.302$

$$J_s = \sum_{i=1}^3 \beta_i h_i b_i^3 = 0.210 * 6.8 * 4.0^3 + 0.295 * 7.1 * 1.3^3 + 0.302 * 11.4 * 1.7^3 = 112.91 \text{ cm}^4.$$

Największe naprężenie styczne wystąpi w prostokącie 1 (ma największą szerokość) i przyjmujemy, że jest to największe naprężenie styczne w rozważanym przekroju

$$\max \tau = \max \tau_1 = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta_1}{\alpha_1} b_1 = \frac{1 \cdot 10^3}{112.91 \cdot 10^{-8}} \frac{0.210}{0.237} 4 \cdot 10^{-2} = 31.39 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 31.39 \text{ MPa.}$$

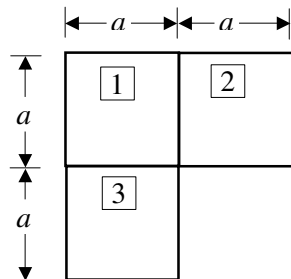
Przykład 15.7.1.2. Zbadać jaki wpływ na wielkość największego naprężenia stycznego w przekroju poprzecznym skręcanym momentem M_s ma sposób jego aproksymacji prostokątami w dwóch pokazanych na rysunku przekrojach.



Rozwiązanie

Pierwszy przekrój.

Podział na trzy prostokąty

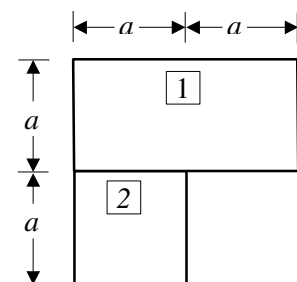


Współczynniki $\alpha_i = 0.208$, $\beta_i = 0.141$

$$J_s = \sum_{i=1}^3 \beta_i h_i b_i^3 = 3 \cdot 0.141 a^4 = 0.423 a^4$$

$$\max \tau = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta}{\alpha} b = \frac{M_s}{0.423 a^4} \frac{0.141}{0.208} a = 1.6026 \frac{M_s}{a^3}$$

Podział na dwa prostokąty



Współczynniki $\alpha_1 = 0.246$, $\beta_1 = 0.229$, $\alpha_2 = 0.208$, $\beta_2 = 0.141$

$$J_s = \sum_{i=1}^2 \beta_i h_i b_i^3 = 0.229 \cdot 2a \cdot a^3 + 0.141 a^4 = 0.599 a^4$$

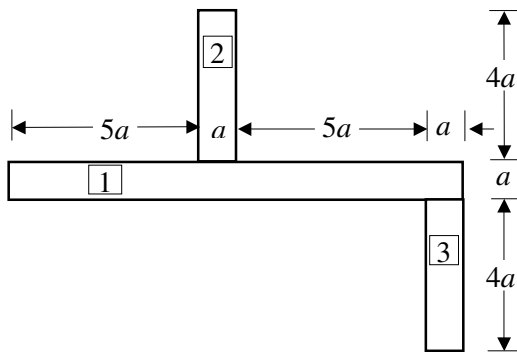
$$\max \tau_1 = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta_1}{\alpha_1} b_1 = \frac{M_s}{0.599 a^4} \frac{0.229}{0.246} a = 1.5541 \frac{M_s}{a^3}$$

$$\max \tau_2 = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta_2}{\alpha_2} b_2 = \frac{M_s}{0.599 a^4} \frac{0.141}{0.208} a = 1.1317 \frac{M_s}{a^3}$$

Jeśli przyjąć pierwszy podział za „miarodajny” to procentowy błąd wynikający z drugiego podziału wynosi $100(1.6026 - 1.5541)/1.6026 = 3.03\%$

Drugi przekrój.

Podział na trzy prostokąty



Współczynniki: $\alpha_1 = \beta_1 = 0.314, \alpha_2 = \alpha_3 = 0.282,$

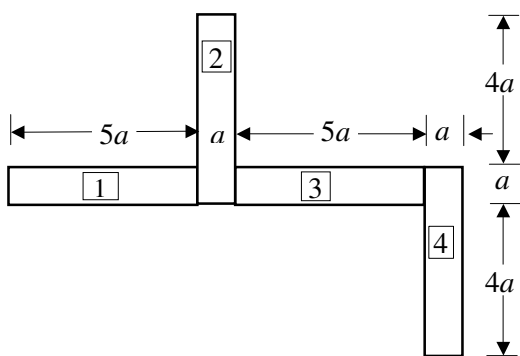
$$\beta_2 = \beta_3 = 0.281$$

$$J_s = \sum_{i=1}^3 \beta_i h_i b_i^3 = 0.314 * 12a * a^3 + 2 * 0.281 * 4a * a = 6.016 a^4$$

$$\max \tau_1 = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta_1}{\alpha_1} b_1 = \frac{M_s}{6.016 a^4} \frac{0.314}{0.314} a = 0.1662 \frac{M_s}{a^3}$$

$$\max \tau_2 = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta_2}{\alpha_2} b_2 = \frac{M_s}{6.016 a^4} \frac{0.281}{0.282} a = 0.1656 \frac{M_s}{a^3}$$

Podział na cztery prostokąty



Współczynniki

$\alpha = \beta = 0.290$ są takie same dla wszystkich czterech prostokątów

$$J_s = \sum_{i=1}^4 \beta_i h_i b_i^3 = 4 * 0.290 * 5a * a^3 = 5,80 a^4$$

Maksymalne naprężenie styczne w każdym prostokącie będzie równe

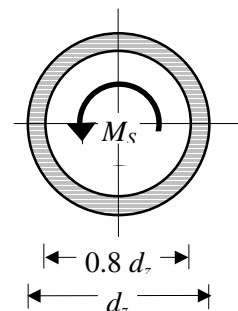
$$\max \tau = \frac{M_s}{J_s} \frac{\beta}{\alpha} b = \frac{M_s}{5.80 a^4} \frac{0.290}{0.290} a = 0.1724 \frac{M_s}{a^3}$$

Procentowy błąd wynikający z różnej aproksymacji prostokątami w tym przypadku wynosi $100 (0.1724 - 0.1662) / 0.1724 = 3.60 \%$

Te dwa przykłady dowodzą (choć zapewne nie jednoznacznie), że dowolny ale “rozsądny” podział przekroju na składowe prostokąty ma niewielki wpływ na wartość największego naprężenia stycznego w przekroju.

Przykład 15.7.1.3. Wyznaczyć jak zmienią się największe naprężenia styczne i jednostkowy kąt skręcenia w rurze skręcanej momentem M_s po jej przecięciu na pobocznicę równoległą do jej osi.

Rozwiązanie



W przypadku rury nie rozciętej mamy do czynienia ze skręcaniem przekroju kołowo symetrycznego. Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia daje największe naprężenia styczne w dowolnym punkcie na obwodzie o wartości:

$$\max \tau = \frac{M_s}{W_0},$$

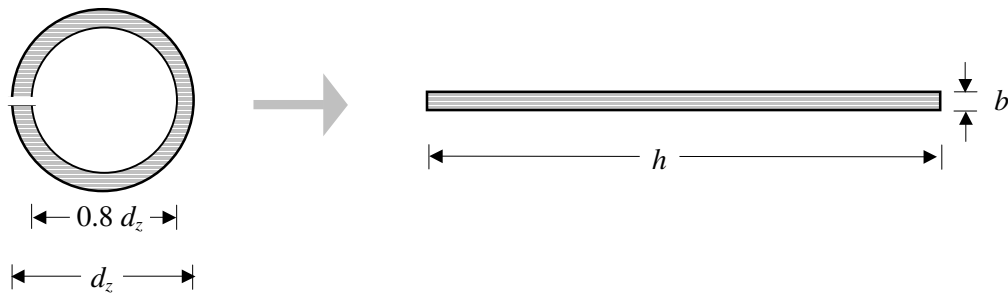
a jednostkowy kąt skręcenia wynosi:

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_0}.$$

Biegunowy moment bezwładności i biegunowy wskaźnik wytrzymałości w rozważanym przypadku są równe:

$$J_0 = \frac{\pi d_z^4}{32} (1 - 0.8^4) = 0.05796 d_z^4, \quad W_0 = \frac{J_0}{d_z/2} = \frac{\pi d_z^4 (1 - 0.8^4) / 32}{d_z/2} = 0.1159 d_z^3.$$

W przypadku rozciętej rury zastosujemy przybliżone rozwiązanie aproksymując przekrój prostokątem o wymiarach $b = 0.1 d_z$ oraz $h = \pi * 0.9 d_z = 2.827 d_z$



Największe naprężenia styczne i jednostkowy kąt skręcenia w przekroju prostokątnym wynoszą:

$$\max \tau = \frac{M_s}{\alpha b^2 h}, \quad \theta = \frac{M_s}{G \beta b^3 h}.$$

W rozważanym przypadku dla $h/b = 2.827/0.1 = 28.27$, współczynniki $\alpha = \beta = 0.333$.

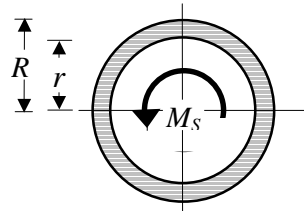
Stąd największe naprężenia styczne po rozcięciu rury wzrastają:

$$\frac{0.1159 d_z^3}{0.333 * (0.1 d_z)^2 * 2.827 d_z} = 12.312 \text{ razy,}$$

a jednostkowy kąt skręcenia wzrasta:

$$\frac{0.05796 d_z^4}{0.333 * (0.1 d_z)^3 * 2.827 d_z} = 61.568 \text{ razy.}$$

Przykład 15.7.1.4. Porównać wartości maksymalnych naprężeń stycznych jednostkowego kąta skręcenia obliczone według wzorów ścisłych i przybliżonych wzorów Bredta, w skręcanej rurze o różnej grubości ścianki.



Rozwiązanie

Potrzebujemy wyznaczyć pewne charakterystyki geometryczne rury o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r występujących we wzorach określających poszukiwane wielkości.

Grubość ścianki: $\delta = R - r = R(1 - \eta)$, gdzie: $\eta = r/R$.

Biegunowy moment bezwładności: $J_0 = \frac{\pi R^4}{2}(1 - \eta^4)$.

Biegunowy wskaźnik wytrzymałości: $W_0 = \frac{\pi R^3}{2}(1 - \eta^4)$.

Pole obszaru ograniczonego linią środkową ścianki: $A_0 = \pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}(1 + \eta)^2$.

Całka po linii środkowej ścianki: $\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{\pi R(1 + \eta)}{R(1 - \eta)} = \frac{\pi(1 + \eta)}{(1 - \eta)}$.

Maksymalne naprężenia styczne obliczone według wzorów otrzymanych z rozwiązania zagadnienia skręcania prętów kołowo symetrycznych wynoszą:

$$\max \tau_s = \frac{M_s}{W_0},$$

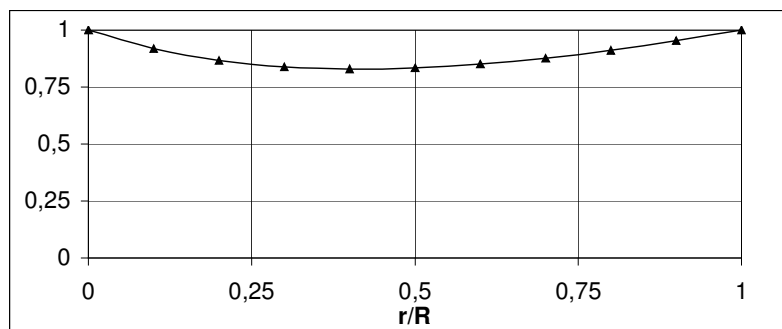
Maksymalne naprężenia styczne obliczone według przybliżonych wzorów dla cienkościennych profili zamkniętych są równe:

$$\max \tau_B = \frac{M_s}{2A_0 \min \delta},$$

Stosunek naprężeń wyznaczonych według wzorów przybliżonych i ścisłych wynosi:

$$\kappa = \frac{\max \tau_B}{\max \tau_s} = \frac{(1 - \eta^4)}{(1 - \eta)(1 + \eta)^2} = \frac{(1 - \eta^2)(1 + \eta^2)}{(1 - \eta^2)(1 + \eta)} = \frac{(1 + \eta^2)}{(1 + \eta)}$$

Wykres zależności współczynnika κ od η jest niżej pokazany.



Wyliczmy minimalną wartość współczynnika κ .

$$\frac{d\kappa}{d\eta} = \frac{2\eta}{1+\eta} - \frac{(1+\eta^2)}{(1+\eta)^2} = 0 \rightarrow \eta^2 + 2\eta - 1 = 0 \rightarrow \eta = 0.4142.$$

Stąd minimalna wartość κ wynosi:

$$\min \kappa = \frac{(1+0.4142^2)}{(1+0.4142)} = 0.8284$$

Maksymalne naprężenia styczne obliczone przybliżonym wzorem Bredta w skręcanej rurce, są niższe od ścisłych a największy procentowy błąd wynosi:

$$(1-0.8284) \cdot 100\% = 17.14\%.$$

Jednostkowy kąt skręcenia według wzorów otrzymanych z rozwiązania zagadnienia skręcania prętów kołowo symetrycznych jest równy:

$$\theta_s = \frac{M_s}{GJ_0}.$$

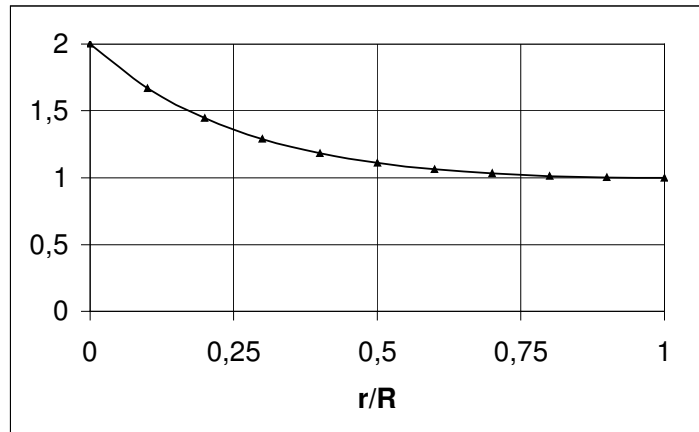
Jednostkowy kąt skręcenia według przybliżonego wzoru Bredta wynosi:

$$\theta_B = \frac{M_s}{4GA_0^2} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Stosunek jednostkowych kątów skręcenia wyznaczonych według wzorów przybliżonych i ścisłych jest równy:

$$\kappa_1 = \frac{\theta_B}{\theta_s} = \frac{2(1-\eta^4)}{(1-\eta)(1+\eta)^3} = \frac{2(1-\eta)(1+\eta)(1+\eta^2)}{(1-\eta)(1+\eta)^3} = \frac{2(1+\eta^2)}{(1+\eta)^2}.$$

Zależności współczynnika κ_1 od η pokazuje poniższy wykres.



Zatem obliczenia jednostkowego kąta skręcenia, przybliżonym wzorem Bredta, dają wyniki większe od dokładnych.