

16. HIPOTEZY WYĘŻENIOWE

16.1. Wyężenie i jego miara

Wykres rozciągania stali miękkiej pokazuje, że punkt materialny znajdujący się w jednoosiowym stanie napężenia przechodzi, w trakcie zwiększania napężenia, przez kolejne stany mechaniczne: liniowo-sprężysty, nieliniowo-sprężysty, sprężysto-plastyczny, plastyczny aż w końcu osiąga stan niszczący gdy spójność między punktami materialnymi zostanie zerwana. Jest rzeczą oczywistą, że ten ostatni stan jest stanem niebezpiecznym, a przejścia między stanami reprezentowane są poprzez odpowiednie napężenia graniczne R_H , R_S , R_e i R_m .

Należy jednak zauważyć, że nie wszystkie materiały mogą przejść przez te wyżej wspomniane stany mechaniczne. Materiał kruchy nie osiąga stanu plastycznego, a stan niszczący jest bardzo blisko stanu liniowo-sprężystego. Dla wielu materiałów stan plastyczny, w którym występują duże odkształcenia trwałe należy uznać za stan niszczący w sensie niemożności spełniania zadań użytkowania.

Możemy więc uznać, że przez niebezpieczny stan mechaniczny rozumiemy stan w którym zachodzą jakościowe zmiany własności materiału, najczęściej rozumiane jako wystąpienie dużych nieodwracalnych odkształceń lub zniszczenie, a granicą niebezpieczną R_K , napężenie, przy którym zmiany te się dokonują.

Jeśli wprowadzimy pojęcie wyężenia, które możemy zdefiniować jako stopień zbliżenia się materiału do granicy niebezpiecznej, to warunkiem bezpiecznego stanu będzie nierówność:

$$W \leq W_N,$$

gdzie: W - miara wyężenia, W_N - wartość miary wyężenia w stanie niebezpiecznym.

Postawimy teraz pytanie: jak określić (albo inaczej, czym zmierzyć) wyężenie w punkcie, w którym znamy macierz napężeń i ile wynosi wartość tej miary w stanie niebezpiecznym. Odpowiedź na to pytanie jest bardzo łatwa jedynie w przypadku gdy w punkcie panuje jednoosiowy stan napężenia.

Miarą wyężenia będzie wówczas napężenie σ , a jej wartością w stanie niebezpiecznym - granica niebezpieczna R_K , którą doświadczalnie wyznaczymy z próby rozciągania i ściskania. Zatem:

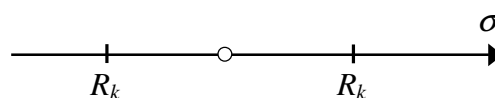
$$W^{(1)} = \sigma; \quad W_N^{(1)} = R_K,$$

a warunek bezpiecznego stanu ma postać:

$$|\sigma| \leq R_K,$$

jeśli przyjmiemy, że wartości granic niebezpiecznych przy rozciąganiu i ściskaniu są takie same $R_{K,r} = R_{K,c} = R_K$.

Graficzną reprezentację bezpiecznych stanów na osi napężeń σ , stanowią wówczas będą punkty wewnątrz odcinka $\langle -R_K, R_K \rangle$.



W przypadku gdy w punkcie panuje przestrzenny stan napężenia, odpowiedź się komplikuje, gdyż nieskończenie wiele stanów napężenia może spowodować w nim stan zniszczenia i dlatego, musimy posłużyć się hipotezami wyężeniowymi. Hipotezy wyężeniowe określają miarę wyężenia niezależnie od rodzaju stanu napężenia. Innymi słowy określają one, co decyduje o zniszczeniu materiału w danym punkcie ciała, niezależnie od tego, jaki rodzaj

stanu napężenia w nim występuje. Jeśli tak, to warunek bezpiecznego stanu mechanicznego sprowadza się do poniższej zależności:

$$W^{(3)} = W^{(2)} = W^{(1)} \leq W_N^{(1)}, \quad (16.1)$$

w której wskaźniki w nawiasach symbolicznie określają wymiarowość stanu napężenia. Powyższa relacja pokazuje zasadniczy cel hipotez wyężeniowych – jest nim odniesienie przestrzennego stanu napężenia do stanu jednoosiowego, w którym zarówno miara wyężenia jak jej wartość w stanie niebezpiecznym jest jasno zdefiniowana i łatwa do doświadczalnego wyznaczenia.

W zależności od tego co przyjmiemy za miarę wyężenia W , otrzymamy wzór na tzw. napężenie zredukowane (lub zastępcze) σ_0 , charakteryzujące dowolny stan napężenia pod względem wyężenia.

Z pośród wielu dotychczas postawionych hipotez wyężeniowych, które ze względu na postulowaną miarę wyężenia bardzo ogólnie można podzielić na: napężeniowe, odkształceniowe i energetyczne omówimy tylko cztery.

16.2. Hipoteza Galileusza – hipoteza maksymalnych dodatnich napężeń normalnych

Postawiona w 1632 roku przez tego genialnego uczonego, cytowana obecnie tylko ze względów historycznych. Daje, w wielu przypadkach, wyniki sprzeczne z doświadczeniami.

W myśl tej hipotezy:

o wyężeniu materiału w danym punkcie ciała decyduje wartość maksymalnego, dodatniego napężenia głównego, niezależnie od rodzaju stanu napężenia:

$$W_G = \max(\langle \sigma_1 \rangle, \langle \sigma_2 \rangle, \langle \sigma_3 \rangle), \quad (16.2)$$

gdzie: $\langle \cdot \rangle$ nawias Macauley'a, $\langle a \rangle = \begin{cases} a; & \text{dla } a > 0 \\ 0; & \text{dla } a \leq 0 \end{cases}$.

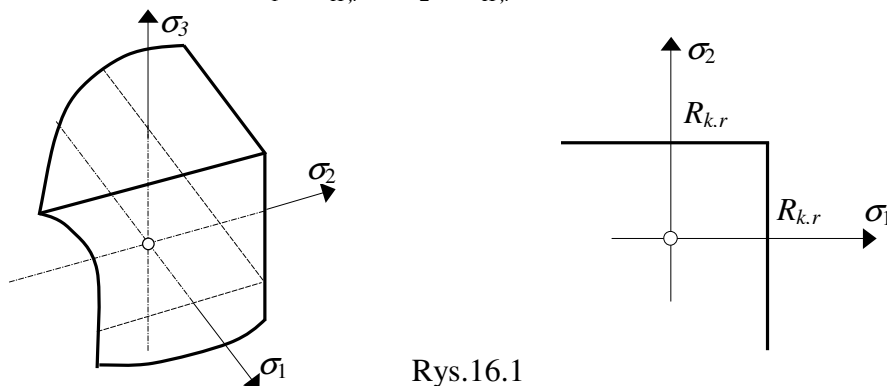
Zatem warunek bezpiecznego stanu ma postać:

$$\max(\langle \sigma_1 \rangle, \langle \sigma_2 \rangle, \langle \sigma_3 \rangle) = \langle \sigma \rangle \leq R_{K,r}. \quad (16.3)$$

Powyższą zależność możemy rozisać w postaci trzech nierówności:

$$\langle \sigma_1 \rangle \leq R_{K,r}, \quad \langle \sigma_2 \rangle \leq R_{K,r}, \quad \langle \sigma_3 \rangle \leq R_{K,r},$$

których graficzny obraz w trójwymiarowej przestrzeni napężeń $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, nazywanej przestrzenią Haigha – Beckera, przedstawia przestrzeń ograniczoną od strony dodatnich osi układu płaszczyznami $\sigma_1 = R_{K,r}$, $\sigma_2 = R_{K,r}$ i $\sigma_3 = R_{K,r}$, a w dwuwymiarowej przestrzeni obszar ograniczony prostymi $\sigma_1 = R_{K,r}$ i $\sigma_2 = R_{K,r}$ (rys.16.1).



Rys.16.1

16.3. Hipoteza Rankine'a – Clebscha – hipoteza maksymalnych naprężeń normalnych

Zaproponowana przez Rankina (1856 r.) i Clebscha (1862 r.). Nie została dostatecznie dobrze potwierdzona doświadczeniami. Według tej hipotezy:

o wyężeniu materiału w danym punkcie ciała decyduje maksymalna bezwzględna wartość naprężenia głównego, niezależnie od rodzaju stanu naprężenia:

$$W_{R-C} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (16.4)$$

Stąd warunek bezpiecznego stanu ma postać:

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = |\sigma| \leq R_K, \quad (16.5)$$

jeśli przyjmiemy, że granice niebezpieczne przy rozciąganiu i ściskaniu są sobie równe $R_{K,r} = R_{K,c} = R_K$.

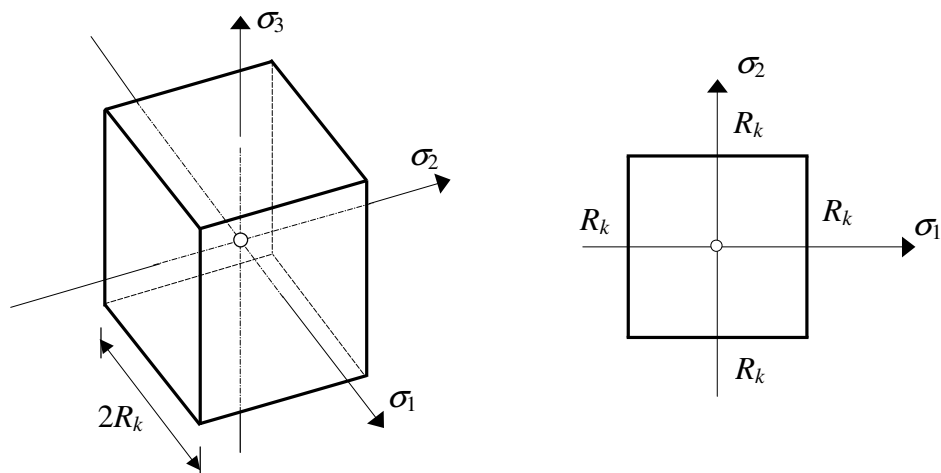
Powyższą zależność możemy rozpisać w postaci nierówności:

$$|\sigma_1| \leq R_K \rightarrow -R_K \leq \sigma_1 \leq R_K,$$

$$|\sigma_2| \leq R_K \rightarrow -R_K \leq \sigma_2 \leq R_K,$$

$$|\sigma_3| \leq R_K \rightarrow -R_K \leq \sigma_3 \leq R_K,$$

których graficzny obraz w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń Haigha – Beckera, przedstawia przestrzeń ograniczoną sześcianem o boku $2R_K$, a w dwuwymiarowej przestrzeni - kwadrat o takim samym boku (rys. 16.2).



Rys. 16.2

16.4. Hipoteza Coulomba – Tresca – Guesta – hipoteza maksymalnych naprężeń stycznych

Przedstawiona przez Coulomba (1776 r.), Trescę (1872 r.) i Guesta (1900 r.), znajduje zastosowanie w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych.

Ta hipoteza postuluje, że:

o wyężeniu materiału w danym punkcie ciała decyduje maksymalna bezwzględna wartość ekstremalnych naprężeń stycznych, niezależnie od rodzaju stanu naprężenia:

$$W_{C-T-G} = \max \left(\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \right) \quad (16.6)$$

Tym razem warunek bezpiecznego stanu określa nierówność:

$$\max \left(\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \right) = \left| \frac{\sigma}{2} \right| \leq \frac{R_K}{2}, \quad (16.7)$$

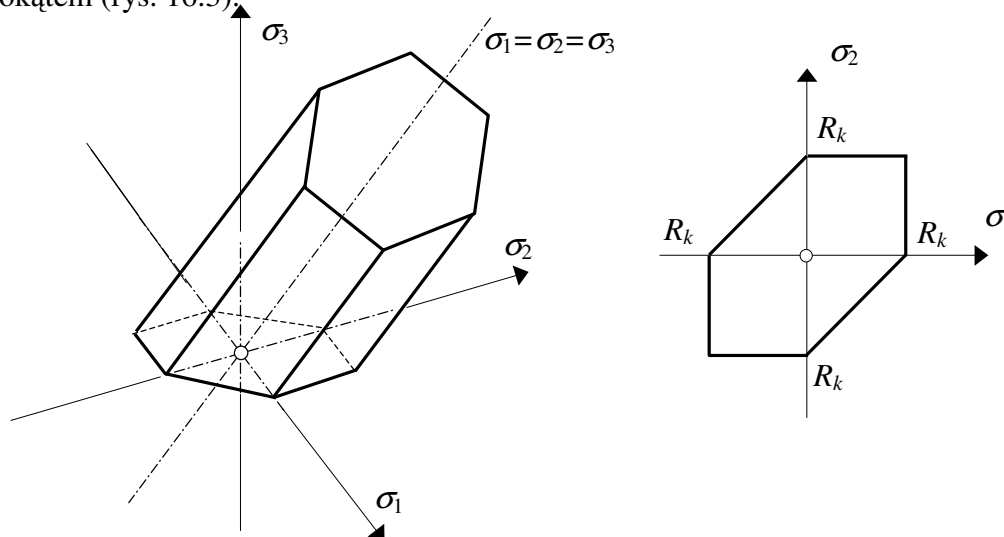
która jest równoważna trzem niżej napisanym warunkom:

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{R_K}{2} \quad \rightarrow \quad -R_K \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq R_K,$$

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| \leq \frac{R_K}{2} \quad \rightarrow \quad -R_K \leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq R_K,$$

$$\left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \leq \frac{R_K}{2} \quad \rightarrow \quad -R_K \leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq R_K.$$

W trójwymiarowej przestrzeni Haigha – Beckera powyższe nierówności wyznaczają przestrzeń ograniczoną nieskończenie długim graniastostupem o osi równo nachylonej do osi układu odniesienia (jest tzw. oś aksjatorów $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) i o przekroju poprzecznym w kształcie sześciokąta foremnego, a w dwuwymiarowej przestrzeni - obszar ograniczony sześciokątem (rys. 16.3).



Rys. 16.3

16.5. Hipoteza Hubera – Misesa – Hencky’ego – hipoteza energii odkształcenia postaciowego

Hipoteza ta została sformułowana niezależnie przez trzech autorów: Hubera (1904 r.), Misesa (1913 r.) i Hencky’ego (1924 r.). Pierwszy z nich Maksymilian Tytus Huber był Polakiem i jego wybitne osiągnięcia na trwale zapisały się w historii *mechaniki ośrodków ciągłych*. Hipoteza bardzo dobrze pokrywa się z danymi doświadczalnymi w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych i według niej:

o wyężeniu materiału w danym punkcie ciała decyduje gęstość energii odkształcenia postaciowego, niezależnie od rodzaju stanu napężenia:

$$W_{H-M-H} = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (16.8)$$

Zatem warunek bezpiecznego stanu mechanicznego przyjmuje formę:

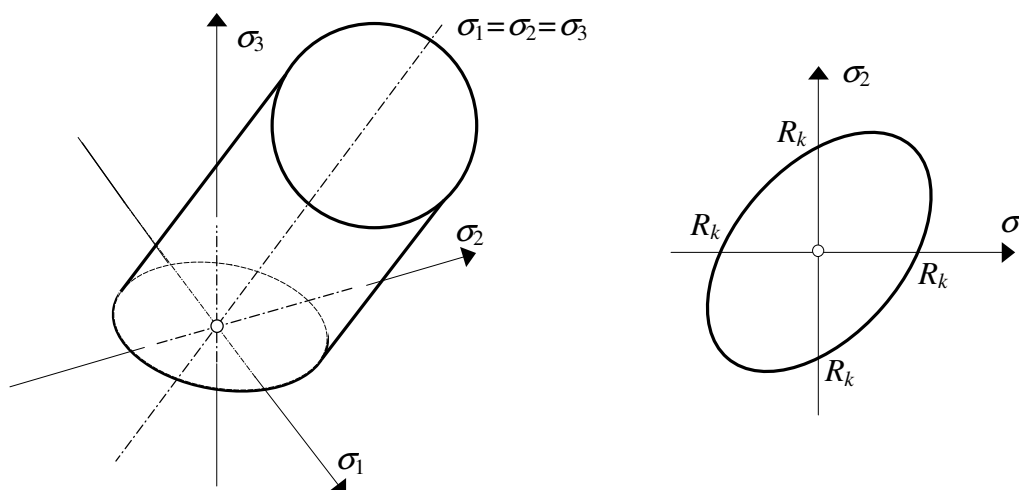
$$\frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2 \leq \frac{1+\nu}{3E} R_K^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R_K, \quad (16.9)$$

lub

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq R_K. \quad (16.10)$$

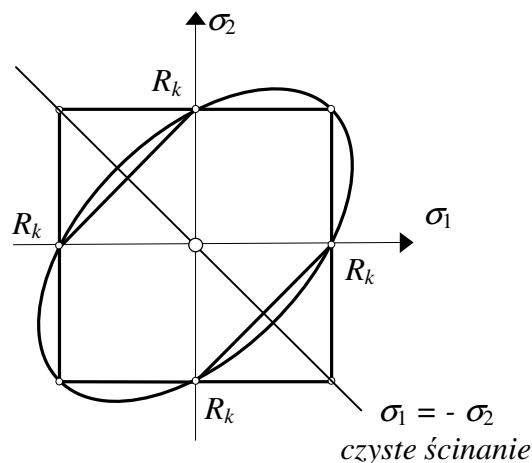
W trójwymiarowej przestrzeni Haigha – Beckera powyższy warunek określa przestrzeń wewnątrz nieskończenie długiego walca o osi pokrywającej się z osią aksjatorów a w przestrzeni dwuwymiarowej - obszar ograniczony elipsą (rys. 16.4).



Rys. 16.4

16.6. Porównanie hipotez

Porównanie zrobimy dla przypadku płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_3 = 0$) oraz trzech z wyżej omówionych hipotez a mianowicie maksymalnych naprężeń normalnych (*R-C*), maksymalnych naprężeń stycznych (*C-T-G*) i energii odkształcenia postaciowego (*H-M-H*). Krzywe graniczne dla tych trzech hipotez zestawione są na rys.16.5. Widać z niego wyraźnie, że największe rozbieżności między kwadratem *R-C*, a sześciobokiem *C-T-G* i elipsą *H-M-H* występują w drugiej i czwartej ćwiartce przestrzeni naprężeń na prostej $\sigma_1 = -\sigma_2$ tj. dla przypadku czystego ścinania.



Rys.16.5

16.7. Naprężenia zredukowane

Jeżeli uporządkujemy naprężenia główne wg relacji $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, to warunek bezpiecznego stanu mechanicznego wg poznanych hipotez możemy zapisać w następujący sposób:
wg hipotezy Galileusza

$$\langle \sigma_1 \rangle \leq R_K$$

wg hipotezy Rankine'a – Clebscha

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \leq R_K,$$

wg hipotezy Coulomba – Tresca – Guesta

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R_K,$$

wg hipotezy Hubera – Misesa – Hencky'go

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq R_K.$$

Lewe strony powyższych nierówności, obliczone w oparciu o wartości elementów dowolnej macierzy naprężeń, porównywane są z granicą niebezpieczną przy jednoosiowym stanie naprężenia. Stąd możemy je interpretować jako zastąpienie czy redukcję stanu przestrzennego do jednoosiowego i dlatego nazywane są naprężeniami zredukowanymi lub zastępczymi i zwykle oznaczane przez σ_0 . Stąd wzory na naprężenia zredukowane wg odpowiednich hipotez mają postać:

$$\sigma_0^G = \langle \sigma_1 \rangle,$$

$$\sigma_0^{R-C} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|),$$

$$\sigma_0^{C-T-G} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

$$\begin{aligned} \sigma_0^{H-M-H} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia, w którym macierz naprężeń zawiera jedynie dwa elementy σ_x oraz τ_{xz} , wzory na naprężenia zredukowane przyjmują formę:

$$\sigma_0^G = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2},$$

$$\sigma_0^{R-C} = \frac{|\sigma_x|}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2},$$

$$\sigma_0^{C-T-G} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2},$$

$$\sigma_0^{H-M-H} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}.$$

16.8. Przykłady

Przykład 16.8.1. Porównać naprężenia zastępcze dla przypadku czystego ścinania ($\sigma_1 = -\sigma_2$) określonego naprężeniem τ .

Rozwiązanie

Naprężenia zredukowane według przedstawionych hipotez wynoszą:

$$\sigma_0^G = \sigma_0^{R-C} = \tau, \quad \sigma_0^{C-T-G} = 2\tau, \quad \sigma_0^{H-M-H} = \sqrt{3}\tau.$$

Jeśli przyjąć, że hipoteza *H-M-H* daje wyniki najlepiej odpowiadające rzeczywistemu zachowaniu się materiałów, a tak pokazują doświadczenia dla materiałów sprężysto-plastycznych, to:

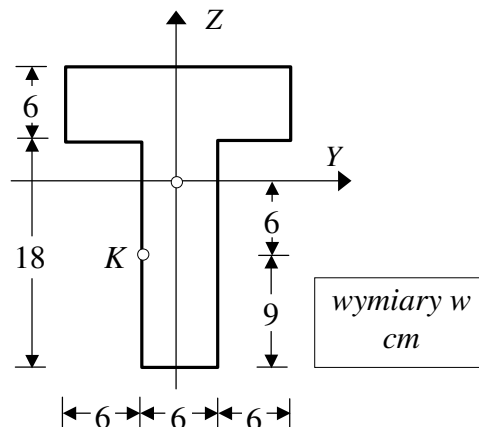
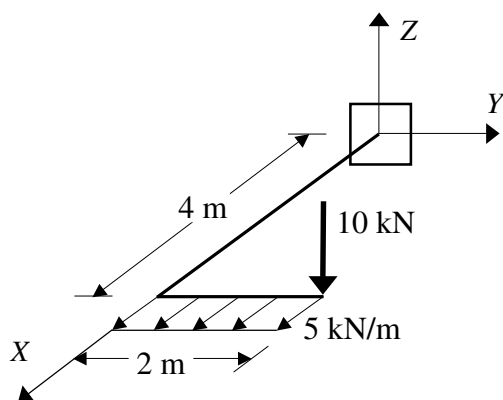
dwie pierwsze hipotezy zaniżają wartość wyężenia o:

$$(\sqrt{3} - 1)/\sqrt{3} = 42.26\%,$$

a trzecia zawyża wartość wyężenia o:

$$(2 - \sqrt{3})/\sqrt{3} = 15.47\%.$$

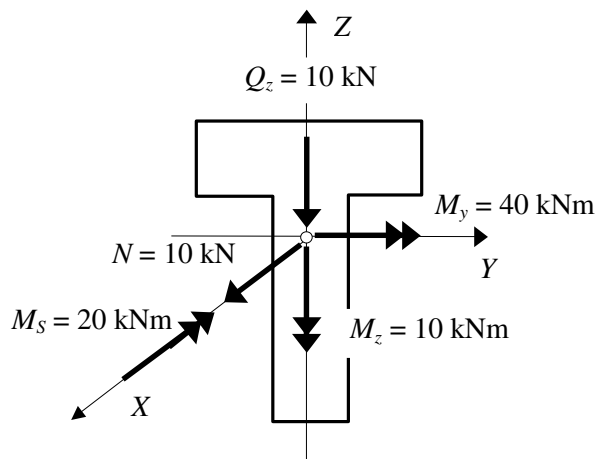
Przykład 16.8.2. Wyznaczyć naprężenia zredukowane wg omówionych hipotez w punkcie *K* przekroju utwierdzenia konstrukcji o schemacie jak na poniższym rysunku.



Rozwiązanie

Siły przekrojowe w przekroju utwierdzenia pokazane są na rysunku obok. W rozważanym przekroju poprzecznym występuje:

- rozciąganie i zginanie względem dwóch osi co implikuje powstanie naprężeń normalnych σ_x oraz
- ścinanie oraz skręcanie co wywołuje naprężenia styczne τ_{xz} .



Napężenia normalne:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y,$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^K &= \frac{10 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-4}} + \frac{40 \cdot 10^3}{11016 \cdot 10^{-8}} (-0.06) + \frac{10 \cdot 10^3}{3240 \cdot 10^{-8}} (-0.03) = \\ &= (0.463 - 21.786 - 9.259) \cdot 10^6 = -30.582 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -30.582 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

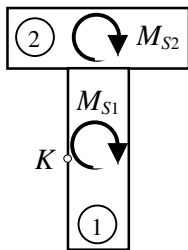
Napężenia stycznne

- od ścinania siłą poprzeczną Q_z

$$\tau_{xz}^K = -\frac{Q_z S_y(z_K)}{J_y b(z_K)} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot (9 \cdot 6 \cdot 10.5) \cdot 10^{-6}}{11016 \cdot 10^{-8} \cdot 0.06} = -0.858 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -0.858 \text{ MPa}.$$

- od momentu skręcającego M_s

Skorzystamy tutaj z przybliżonego sposobu obliczenia maksymalnej wartości napężenia stycznego w przekroju skręcanym aproksymowanym zbiorem prostokątów.



Ponieważ stosunek wysokości do szerokości w obu prostokątach jest taki sam to $M_{S1} = M_{S2} = M_s/2 = 10.000 \text{ kNm}$

$$h/b = 18/6 = 3 \rightarrow \alpha = 0.267$$

$$\tau_{xz}^K = \frac{M_{S1}}{\alpha b^2 h} = \frac{10 \cdot 10^3}{0.267 \cdot 0.06^2 \cdot 0.18} = 57.798 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 57.798 \text{ MPa}.$$

Stąd sumaryczne napężenie stycznne w punkcie K wynosi:

$$\tau_{xz}^K = -0.858 + 57.798 = 56.940 \text{ MPa},$$

i macierz napężeń ma postać:

$$T_\sigma^K = \begin{pmatrix} -30.582 & 0 & 56.940 \\ 0 & 0 & 0 \\ 56.940 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}.$$

Jak widać w punkcie K panuje płaski stan napężenia, którego płaszczyzną napężenia jest płaszczyzna (X, Z) .

Napężenia zredukowane mają wartości:

$$\sigma_0^G = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_{xz}^2} = \frac{-30.582}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-30.582)^2 + 4 \cdot 56.940^2} = 43.666 \text{ MPa},$$

$$\sigma_0^{R-C} = \frac{|\sigma_x|}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_{xz}^2} = \frac{|-30.582|}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-30.582)^2 + 4 \cdot 56.940^2} = 74.248 \text{ MPa},$$

$$\sigma_0^{C-T-G} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_{xz}^2} = \sqrt{(-30.582)^2 + 4 \cdot 56.940^2} = 117.915 \text{ MPa},$$

$$\sigma_0^{H-M-H} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2} = \sqrt{(-30.58)^2 + 3 * 56.940^2} = 103.256 \text{ MPa.}$$

Proszę zwrócić uwagę jak duże są rozbieżności wyników otrzymanych z hipotezy Galileusza i Coulomba-Tresca-Guesta.