

## 17. STATECZNOŚĆ OSIOWO ŚCISKANYCH PRĘTÓW PROSTYCH

### 17.1. Stateczność pręta w zakresie liniowo sprężystym.

Jednym z podstawowych założeń przyjętych na początku naszych rozważań było to, że analizowane przez nas konstrukcje znajdują się w równowadze trwałej (inaczej statecznej) ale jak dotąd, prócz prostych objaśnień, nie zostały sformułowane żadne analityczne warunki gwarantujące taką równowagę lub jak powiemy w języku inżynierskim gwarantujące stateczność konstrukcji. Utrata stateczności konstrukcji jest zagadnieniem niezwykle ważnym i skomplikowanym - i co więcej - stanowi jedną z przyczyn wystąpienia stanu granicznego nośności. Konieczność uwzględnienia utraty stateczności w analizie mechanicznej zachowania się konstrukcji dobitnie obrazuje następujące zadanie<sup>1</sup>, w którym należy wyznaczyć dopuszczalną wysokość stalowego pręta prostego o polu przekroju poprzecznego  $A = 1\text{cm}^2$ , obciążonego tylko ciężarem własnym  $\gamma = 78.50\text{ kN/m}^3$ , wykonanego ze stali o wytrzymałości obliczeniowej przy ściskaniu  $R_c = 215\text{ MPa}$ .

Warunek stanu granicznego nośności związanego jedynie z nie przekroczeniem wytrzymałości obliczeniowej przy ściskaniu, daje niżej wyznaczoną, dopuszczalną wysokość pręta

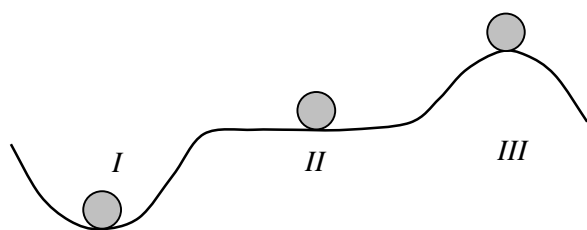
$$\frac{\gamma l A}{A} \leq R_c \quad \rightarrow \quad l \leq \frac{R_c}{\gamma} = \frac{215 \cdot 10^6}{78.5 \cdot 10^3} = 2.739 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

Jest rzeczą oczywistą, że nie ma możliwości realizacji konstrukcji o tych wymiarach z zachowaniem jej prostoliniowego kształtu (jak to jest założone w wykonanych obliczeniach) i w języku inżynierskim powiemy, że konstrukcja taka musi utracić swoją stateczność.

Zajmiemy się teraz podaniem analitycznych warunków zapewnienia równowagi statecznej dla bardzo prostej konstrukcji, jaką jest osiowo ściskany pręt pryzmatyczny, wykonany z materiału o własnościach fizycznych określonych prawem Hooke'a.

Zacznijmy od prostego „ideowego” objaśnienia trzech postaci równowagi w jakich konstrukcja może się znajdować.

Jeżeli po dowolnie małym wychyleniu z pierwotnego położenia równowagi ruch ciała jest taki, że wychylenia jego punktów nie są większe tych początkowych to taką równowagę nazywamy stateczną (trwałą).



Rys. 17.1

W przeciwnym przypadku równowaga jest niestateczna (nietrwała, chwiejna). Można jeszcze wyróżnić szczególne położenie równowagi zwane równowagą obojętną w której punkty ciała pozostają w położeniu po wychyleniu. Opisaną sytuację można zobrazować traktując konstrukcję jako ciężką kulkę w różnych warunkach podparcia znajdującą się w potencjalnym polu sił (rys. 17.1).

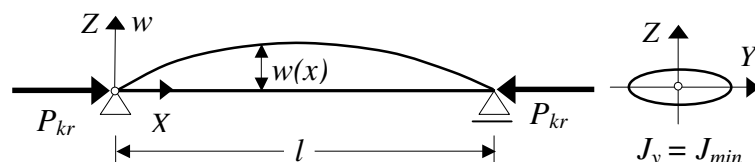
Równowadze statecznej *I* odpowiada minimum energii potencjalnej układu, a w równowadze chwiejnej *III* maksimum. W stanie równowagi obojętnej *II* wartość energii potencjalnej przy dowolnie małym wychyleniu pozostaje stała.

<sup>1</sup> Przykład wzięty z książki S.Piechnik. Wytrzymałość Materiałów dla Wydziałów Budowlanych. PWN 1972.

## 17.2. Siła krytyczna

Zagadnienie utraty stateczności ściskanego osiowo pręta pryzmatycznego rozwiążemy w sposób podany przez L.Eulera w 1744 r.

Rozważmy, pokazany na rys. 17.2, ściskany osiowo siłą  $P$  pręt przegubowo podparty na obu końcach, wykonany z materiału liniowo sprężystego o module Younga  $E$  i nadajmy mu



Rys. 17.2

jakimś impulsem poprzecznym dowolnie małe początkowe ugięcie w płaszczyźnie najmniejszej sztywności zginania. Jeżeli po usunięciu przyczyny ugięcia powróci on do swej początkowej prostoliniowej postaci, oznacza to, że znajduje się w równowadze statecznej.

Powtarzając rozumowanie wraz ze zwiększaniem wartości siły  $P$  dojdziemy do sytuacji, w której pręt po usunięciu przyczyny początkowego ugięcia pozostanie krzywoliniowy (nie powróci do swej pierwotnej prostoliniowej formy). Oznacza to, że tym razem pręt znajduje się w stanie równowagi obojętnej, a siłę, przy której to nastąpiło nazywać będziemy siłą krytyczną  $P_{kr}$ . Tak więc:

**siła krytyczna to siła przy której osiowo ściskany pręt znajduje się w stanie równowagi obojętnej.**

Wyliczmy tę siłę krytyczną. Równanie momentów w zakrzywionym pręcie przy obciążeniu siłą krytyczną ma postać:

$$M(x) = P_{kr} w(x), \quad (17.1)$$

a równanie różniczkowe jego ugiętej osi przyjmuje formę:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ_{min}}, \quad (17.2)$$

z której otrzymujemy równanie różniczkowe wiążące ugięcie z siłą krytyczną:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{P_{kr}}{EJ_{min}} w(x) = 0. \quad (17.3)$$

Przyjmując oznaczenie:

$$k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ_{min}}, \quad (17.4)$$

zapiszemy je w postaci:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k^2 w(x) = 0, \quad (17.5)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (17.6)$$

Stałe całkowania  $A$  oraz  $B$  wyznaczmy z kinematycznych warunków brzegowych:

$$w(0)=0 \text{ oraz } w(l)=0. \quad (17.7)$$

Pierwszy warunek daje  $B=0$ , natomiast drugi zależność  $0 = A \sin kl$ , z której przy założeniu że  $A \neq 0$  (rozważamy pręt zakrzywiony, więc równocześnie nie może być  $B=0$  i  $A=0$ ), dostajemy:

$$\sin kl = 0 \rightarrow k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Korzystając z (17.4), dla kolejnych liczb naturalnych otrzymujemy:

$$n = 1, \quad P_{kr,1} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}, \quad w(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x, \quad \text{[Diagram: pręt o długości } l \text{ z podporami w } x=0 \text{ i } x=l \text{, kształt przemieszczenia } w(x) \text{ dla } n=1 \text{]}$$

$$n = 2, \quad P_{kr,2} = \frac{4 \pi^2 EJ_{\min}}{l^2}, \quad w(x) = A \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad \text{[Diagram: pręt o długości } l \text{ z podporami w } x=0 \text{ i } x=l \text{, kształt przemieszczenia } w(x) \text{ dla } n=2 \text{]}$$

$$n = 3, \quad P_{kr,3} = \frac{9 \pi^2 EJ_{\min}}{l^2}, \quad w(x) = A \sin \frac{3\pi}{l} x, \quad \text{[Diagram: pręt o długości } l \text{ z podporami w } x=0 \text{ i } x=l \text{, kształt przemieszczenia } w(x) \text{ dla } n=3 \text{]}$$

.....,

co dowodzi, że każdej wartości siły krytycznej odpowiada inna forma deformacji pręta, albo - inaczej - inna postać wyobczonego pręta, ale wszystkie są sinusoidami.

Jest rzeczą oczywistą, że za siłę krytyczną uznamy tę najmniejszą, odpowiadającą  $n = 1$ . W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że impuls poprzeczny wywołujący to wstępne zakrzywienie potrzebny jest tylko w rozważaniach teoretycznych. W rzeczywistości odstępstwa od idealnych założeń, np. idealnej prostoliniowości pręta, osiowości przyłożenia siły czy jednorodności materiału, same zawsze spowodują wyobczenie pręta.

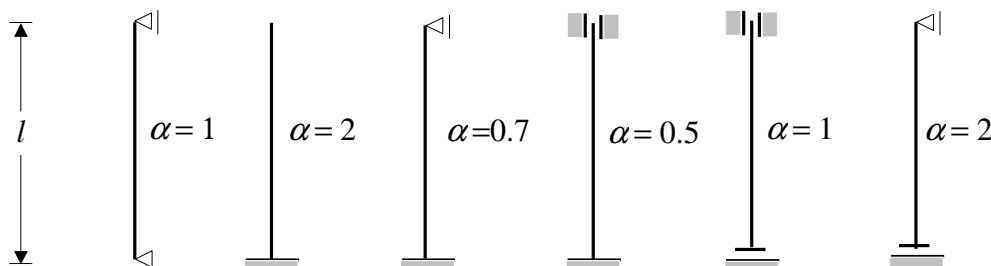
Wyniki analizy prętów o innych warunkach podparcia pozwalają napisać jednolity wzór na siłę krytyczną, nazywaną siłą krytyczną Eulera, w postaci:

$$P_{kr}^E = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_w^2}, \quad (17.8)$$

gdzie:  $l_w = \alpha l, \quad (17.9)$

nazywamy długością wyobczeniową.

Wartości współczynnika długości wyobczeniowej  $\alpha$  zależnego od warunków podparcia podano na rys. 17.3.



Rys. 17.3

### 17.3. Naprężenia krytyczne

Zakres ważności wzoru Eulera na siłę krytyczną jest ograniczony własnościami fizycznymi materiału ściskanego pręta. Ponieważ materiał analizowanego przez nas pręta był z założenia materiałem liniowo sprężystym to naprężenia normalne w pręcie nie mogą przekraczać  $R_H$  - granicy stosowalności prawa Hooke'a (granicy proporcjonalności).

W celu wyznaczenia zakresu stosowalności wzoru (17.8) dokonamy jego przekształcenia. Wpierw podzielimy obustronnie przez pole przekroju poprzecznego  $A$

$$\frac{P_{kr}^E}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{Al_w^2},$$

a następnie, definiując pojęcie naprężenia krytycznego:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A}, \quad (17.10)$$

i smukłości pręta:

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{\min}}, \quad (17.11)$$

gdzie:  $i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/A}$  - jest minimalnym promieniem bezwładności przekroju poprzecznego, możemy otrzymać zależność:

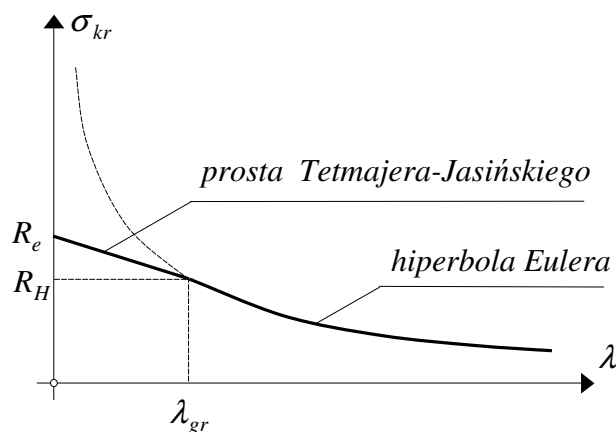
$$\sigma_{kr}^E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (17.12)$$

w której:

$$\sigma_{kr}^E = \frac{P_{kr}^E}{A} \text{ oznacza naprężenie krytyczne Eulera.}$$

Na wykresie zależności  $\sigma_{kr}$  od  $\lambda$  (rys. 17.4), wykresem funkcji  $\sigma_{kr}^E(\lambda)$  jest hiperbola, której zakres ważności jest ograniczony od góry, na osi rzędnych, wartością  $R_H$ . Odpowiadającą tej wartości naprężeń krytycznych  $\sigma_{kr}$ , smukłość nazwiemy smukłością graniczną i wyznaczmy z warunku:

$$R_H = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{gr}^2} \rightarrow \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}. \quad (17.13)$$



Rys. 17.4

Zatem wzór Eulera jest ważny dla smukłości  $\lambda \geq \lambda_{gr}$  i naprężenia krytyczne są opisane wówczas przez hiperbolę Eulera, a pręt pracuje w zakresie linii sprężystym.

W praktycznych zastosowaniach potrzebujemy, jednak często, analizować utratę stateczności również w zakresie nieliniowo sprężystym i sprężysto plastycznym, dla których smukłość spełnia nierówność  $0 \leq \lambda < \lambda_{gr}$ .

W stanach poza liniowo sprężystych posługiwać się będziemy zależnościami ustalonymi empirycznie, z których najbardziej znanymi są, prosta Tetmajera-Jasińskiego określona wzorem:

$$\sigma_{kr}^{T-J} = a - b \lambda, \quad (17.14)$$

oraz parabola Johnsona-Ostenfelda zdefiniowana równaniem:

$$\sigma_{kr}^{J-O} = A - B \lambda^2. \quad (17.15)$$

W obu powyższych zależnościach  $a$ ,  $b$ ,  $A$  oraz  $B$  to stałe materiałowe.

Aproksymacja krzywej teoretycznej prostą Tetmajera-Jasińskiego (patrz rys. 17.4) zakłada, że dla prętów, których smukłość  $\lambda \rightarrow 0$  (prętów krępych) stan graniczny nośności osiągną jest przez uplastycznienie a nie poprzez utratę stateczności i stąd stałe  $a$  i  $b$  we wzorze wyznaczone są z warunków :

$$\sigma_{kr}^{T-J} = R_e \text{ dla } \lambda = 0 \rightarrow a = R_e,$$

$$\sigma_{kr}^{T-J} = R_H \text{ dla } \lambda = \lambda_{gr} \rightarrow R_H = a - b \lambda_{gr} \rightarrow b = \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}} = \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}},$$

gdzie:  $R_e$  - wyraźna granica plastyczności. Zatem ostatecznie naprężenie krytyczne według Tetmajera-Jasińskiego można zapisać w postaci wzoru:

$$\sigma_{kr}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \lambda. \quad (17.16)$$

#### 17.4. Wymiarowanie osiowo ściskanych prętów z uwzględnieniem utraty stateczności

Poprawnie zaprojektowany osiowo ściskany pręt winien spełniać równocześnie dwa, niezależne od siebie warunki stanu granicznego nośności tzn. był wytrzymały i znajdował się w równowadze statecznej. Warunki te wymagają aby siła obciążająca  $P$  spełniała nierówności:

$$P \leq A * R_c \text{ i } P \leq P_{kr},$$

gdzie:  $A$  to pole przekroju poprzecznego pręta.

W praktyce inżynierskiej przy projektowaniu konstrukcji stalowych korzystamy z jednego warunku, występującego w Polskich Normach Budowlanych, spełniającego równocześnie oba te kryteria. Warunek ten można otrzymać wychodząc z nierówności zapewniającej równowagę stateczną :

$$P \leq P_{kr} \rightarrow P \leq \sigma_{kr}(\lambda) A. \quad (17.17)$$

Utożsamiając na wykresie zależności  $\sigma_{kr}(\lambda)$  (rys. 17.4) wyraźną granicę plastyczności  $R_c$  z wytrzymałością obliczeniową przy ściskaniu  $R_c$  możemy na mocy definicji napisać:

$$\sigma_{kr}(\lambda) = \varphi(\lambda) R_c$$

by po wstawieniu do nierówności (17.17) dostać:

$$\frac{P}{\varphi(\lambda) A} \leq R_c \quad (17.18)$$

gdzie :

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_{kr}(\lambda)}{R_c} \text{ współczynnik wyboczeniowy.} \quad (17.19)$$

Współczynnik wyboczeniowy przyjmuje wartości  $\varphi(\lambda) \leq 1$ , i fizycznie spełnia rolę współczynnika redukcyjnego pola przekroju poprzecznego  $A$  (czyli tym samym współczynnika redukcyjnego nośności obliczeniowej pręta), jest funkcją smukłości oraz stałych materiałowych i w przedziale  $\lambda \geq \lambda_{gr}$  wynosi:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\pi^2 E}{R_c \lambda^2},$$

a przedziale  $0 \leq \lambda < \lambda_{gr}$ , przy zastosowaniu wzoru Tetmajera-Jasińskiego, przyjmuje postać:

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{R_c - R_H}{\pi R_c} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \lambda.$$

Współczynniki wyboczeniowe, podane w formie tablic w Polskiej Normie PN-90/B-03200 dotyczącej obliczeń statycznych i projektowania konstrukcji stalowych, uwzględniają jeszcze inne, dodatkowe niezwykle ważne dla zagadnienia utraty stateczności parametry, takie jak początkowe zniekształcenia osi lub przekroju poprzecznego prętów (tzw. imperfekcje). Stąd wartości tych współczynników zależne są od tzw. smukłości względnej  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_p$ , gdzie  $\lambda_p$  jest smukłością porównawczą:

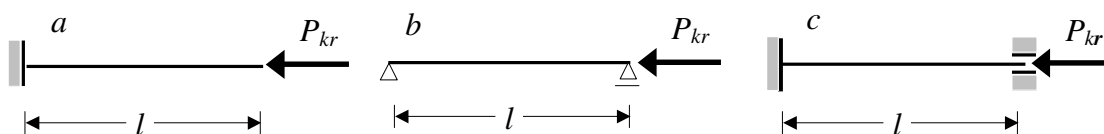
$$\lambda_p = \frac{\pi}{1.15} \sqrt{\frac{E}{R_c}}, \quad (17.20)$$

oraz od technologii wytwarzania (spawany, walcowany) i kształtu przekroju elementu.

Koncepcja współczynnika wyboczeniowego funkcjonuje również przy wymiarowaniu prętów ściskanych w konstrukcjach drewnianych.

### 17.5. Przykłady

**Przykład 17.5.1.** Wyznaczyć siły krytyczne dla ściskanych osiowo prętów stalowych o długości  $l = 1 \text{ m}$ , wymiarach przekroju poprzecznego  $3 \times 6 \text{ cm}$  podpartych jak na rysunkach, jeśli  $R_H = 200 \text{ MPa}$ ,  $R_e = 215 \text{ MPa}$ ,  $R_c = 195 \text{ MPa}$ ,  $E = 205 \text{ GPa}$ .



**Rozwiązanie**

Przyjmujemy, że warunki podparcia w obu płaszczyznach są takie same, więc wyboczenie wystąpi w płaszczyźnie minimalnej sztywności zginania i minimalny moment oraz promień bezwładności są równe:

$$J_{\min} = \frac{6 \cdot 3^3}{12} = 13.50 \text{ cm}^4, \quad A = 3 \cdot 6 = 18.0 \text{ cm}^2, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{13.5}{18.0}} = 0.866 \text{ cm}.$$

$$\text{Smukłość graniczna: } \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{205 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} = 100.6$$

*Przypadek a*

$$\text{Smukłość pręta: } \lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 100.0}{0.866} = 230.946 > \lambda_{gr}$$

$$\text{Obowiązuje wzór Eulera: } P_{kr}^E = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 13.5 \cdot 10^{-8}}{2^2} = 68.285 \text{ kN}.$$

*Przypadek b*

$$\text{Smukłość pręta } \lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} = \frac{100.0}{0.866} = 115.473 > \lambda_{gr}$$

$$\text{Obowiązuje wzór Eulera: } P_{kr}^E = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 13.5 \cdot 10^{-8}}{1^2} = 273.141 \text{ kN}.$$

*Przypadek c*

$$\text{Smukłość pręta } \lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} = \frac{0.5 \cdot 100.0}{0.866} = 57.737 < \lambda_{gr}$$

Utrata stateczności wystąpi w zakresie poza liniowo sprężystym i nie obowiązuje wzór Eulera.

Przyjmując aproksymację prostą Tetmajera-Jasińskiego otrzymamy:

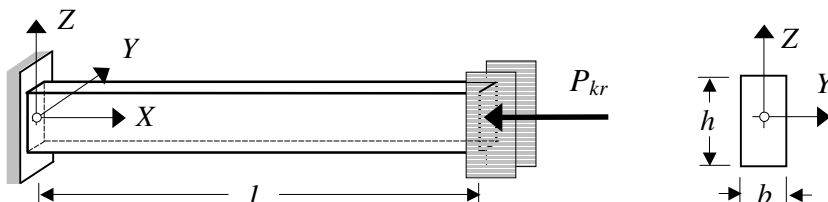
$$\sigma_{kr}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \lambda = 215 - \frac{215 - 200}{\pi} \sqrt{\frac{200 \cdot 10^6}{205 \cdot 10^9}} 57.737 = 206.389 \text{ MPa}$$

$$P_{kr}^{T-J} = A \cdot \sigma_{kr}^{T-J} = 18 \cdot 10^{-4} \cdot 206.389 \cdot 10^6 = 371.500 \text{ kN}.$$

Warunek wytrzymałości we wszystkich trzech przypadkach daje dopuszczalną siłę obciążającą

$$P \leq A R_c = 18 \cdot 10^{-4} \cdot 195 \cdot 10^6 = 351.0 \text{ kN}.$$

**Przykład 17.5.2.** Wyznaczyć siłę krytyczną dla ściskanego osiowo pręta stalowego o długości  $l = 1 \text{ m}$ , wymiarach przekroju poprzecznego  $b \times h = 3 \times 6 \text{ cm}$  podpartego jak na rysunku, jeśli  $R_H = 200 \text{ MPa}$ ,  $R_e = 215 \text{ MPa}$ ,  $E = 205 \text{ GPa}$ .



**Rozwiązanie**

W płaszczyźnie (X, Z) pręt jest jednym końcem zamocowany, a drugi koniec ma wolny, natomiast w płaszczyźnie (X, Y) oba końce pręta są zamocowane.

$$A = 3 * 6 = 18.0 \text{ cm}^2, \quad J_y = \frac{3 * 6^3}{12} = 54.00 \text{ cm}^4, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{54.0}{18.0}} = 1.73 \text{ cm},$$

$$J_z = \frac{6 * 3^3}{12} = 13.50 \text{ cm}^4, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{13.5}{18.0}} = 0.866 \text{ cm}.$$

$$\text{Smukłość graniczna: } \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{205 * 10^9}{200 * 10^6}} = 100.6.$$

Wyboczenie w płaszczyźnie (X, Z)

$$\text{Smukłość pręta } \lambda = \frac{l_w}{i_y} = \frac{2 * 100.0}{1.73} = 115.607 > \lambda_{gr}$$

$$\text{Obowiązuje wzór Eulera } P_{kr}^E = \frac{\pi^2 EJ_y}{l_w^2} = \frac{\pi^2 205 * 10^9 * 54.0 * 10^{-8}}{2^2} = 273.141 \text{ kN}.$$

Wyboczenie w płaszczyźnie (X, Y)

$$\text{Smukłość pręta } \lambda = \frac{l_w}{i_z} = \frac{0.5 * 100.0}{0.866} = 57.737 < \lambda_{gr}$$

Utrata stateczności wystąpi w zakresie poza liniowo sprężystym.

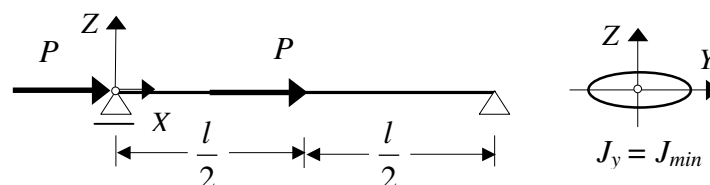
Przyjmując aproksymację prostą Tetmajera-Jasińskiego otrzymamy:

$$\sigma_{kr}^{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \lambda = 215 - \frac{215 - 200}{\pi} \sqrt{\frac{200 * 10^6}{205 * 10^9}} 57.737 = 206.389 \text{ MPa},$$

$$P_{kr}^{T-J} = A * \sigma_{kr}^{T-J} = 18 * 10^{-4} * 206.389 * 10^6 = 371.500 \text{ kN}.$$

Siła krytyczna dla rozważanego pręta wynosi  $P_{kr} = 273.141 \text{ kN}$ .

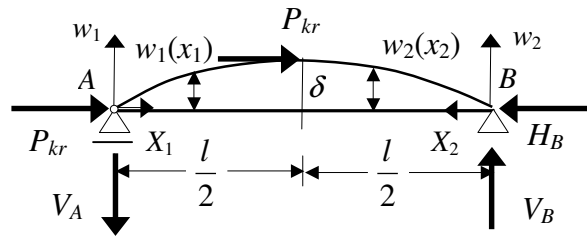
**Przykład 17.5.3.**<sup>2</sup> Wyznaczyć siłę krytyczną i współczynnik długości wyboczeniowej, pręta przegubowo podpartego obciążonego osiowo dwoma siłami ściskającymi jak na rysunku.



<sup>2</sup> W pierwszym wydaniu podręcznika był błąd w rozwiązaniu tego przykładu.



**Rozwiązanie**



Reakcje w zdeformowanym pręcie w stanie równowagi obojętnej wywołanej poprzecznym impulsem wyznaczone z warunków równowagi wynoszą (patrz rys. wyżej):

$$\sum X = 0 \rightarrow H_B = 2 P_{kr} ,$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B = \frac{P_{kr} \delta}{l} ,$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A = \frac{P_{kr} \delta}{l} .$$

Równania momentów zginających , równania różniczkowe osi wyobczonego pręta oraz ogólna postać ich rozwiązania w dwóch przedziałach charakterystycznym mają formę:

$$0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$$

$$M_1(x_1) = P_{kr} w_1(x_1) + P_{kr} \delta x_1 ,$$

$$M_2(x_2) = 2 P_{kr} w_2(x_2) - V_B x_2$$

$$\frac{d^2 w_1(x_1)}{dx_1^2} = - \frac{M_1(x_1)}{EJ_{min}} = - \frac{P_{kr} w_1(x_1) + V_A x_1}{EJ_{min}} ,$$

$$\frac{d^2 w_2(x_2)}{dx_2^2} = - \frac{M_2(x_2)}{EJ_{min}} = - \frac{2 P_{kr} w_2(x_2) - V_B x_2}{EJ_{min}} ,$$

$$\frac{d^2 w_1(x_1)}{dx_1^2} + k_1^2 w_1(x_1) = - \frac{V_A}{EJ_{min}} x_1$$

$$\frac{d^2 w_2(x_2)}{dx_2^2} + k_2^2 w_2(x_2) = \frac{V_B}{EJ_{min}} x_2$$

$$w_1(x_1) = w_{1s}(x_1) + A_1 \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1$$

$$w_2(x_2) = w_{2s}(x_2) + A_2 \sin kx_2 + B_2 \cos kx_2$$

$$w_{1s}(x_1) = - \frac{V_A}{P_{kr}} x_1$$

$$w_{2s}(x_2) = \frac{V_B}{2 P_{kr}} x_2$$

gdzie:  $k_1^2 = \frac{P_{kr}}{EJ_{min}}$  ,  $k_2^2 = \frac{2 P_{kr}}{EJ_{min}}$  ,  $w_{1s}(x_1)$  i  $w_{2s}(x_2)$  , całki szczególne równań niejednorodnych a  $A_1$  ,  $B_1$  ,  $A_2$  , i  $B_2$  to stałe całkowania , które należy wyznaczyć z kinematycznych warunków brzegowych.

Kinematyczne warunki brzegowe w tym zadaniu opisują zależności:

$$1/ w_1(0) = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

$$2/ w_2(0) = 0 \rightarrow B_2 = 0$$

i równania zdeformowanej osi pręta w poszczególnych przedziałach są następujące:

$$w_1(x_1) = -\frac{\delta}{l}x_1 + A_1 \sin k_1 x_1, \quad w_2(x_2) = \frac{\delta}{2l}x_2 + A_2 \sin k_2 x_2.$$

Pozostałe dwie stałe wyznaczamy z warunków zszycia:

$$3/ w_1(l/2) = w_2(l/2) = \delta,$$

$$4/ w_1'(l/2) = -w_2'(l/2).$$

Po wykorzystaniu dwóch pierwszych, trzeci warunek daje zależności:

$$A_1 = \frac{3\delta}{2} \frac{1}{\sin(k_1 l/2)}, \quad A_2 = \frac{3\delta}{4} \frac{1}{\sin(k_2 l/2)}, \quad (a)$$

a czwarty równanie:

$$-\frac{\delta}{l} + k_1 A_1 \cos(k_1 l/2) = -\left[ \frac{\delta}{2l} + k_2 A_2 \cos(k_2 l/2) \right],$$

które po wykorzystaniu (a) i relacji  $k_2 = \sqrt{2} k_1$  oraz podstawieniu  $\mu = k_1 l/2$  przyjmuje postać

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}(\sqrt{2}\mu)} + \frac{3}{\operatorname{tg}(\mu)} - \frac{1}{2\mu} = 0 \quad (b)$$

Numeryczne rozwiązanie równania (b) daje wynik:

$$\mu = 1.2783.$$

A ponieważ:

$$\mu^2 = \frac{k_1^2 l^2}{4}, \text{ to}$$

$$k_1^2 = \frac{4\mu^2}{l^2} \rightarrow P_{kr} = \frac{4\mu^2 EJ_{min}}{l^2} = \frac{6.5362 EJ_{min}}{l^2}.$$

Ten ostatni wynik możemy zapisać w formie:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(1.229l)^2},$$

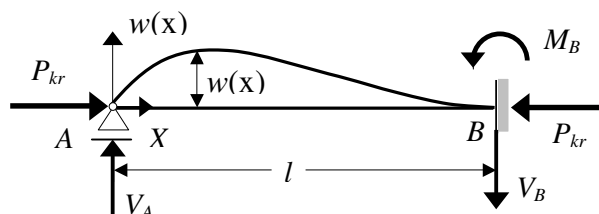
zatem współczynnik długości wyboczeniowej  $\alpha = 1.229$ .

**Przykład 17.5.4.** Wyznaczyć siłę krytyczną i współczynnik długości wyboczeniowej ściskanego osiowo pręta pryzmatycznego obciążonego jak na rysunku.



### Rozwiązanie

Moment zginający w wyboczonym pręcie wynosi:



$$M(x) = P_{kr} w(x) - V_A x.$$

Reakcja pionowa  $V_A$  jest konsekwencją utwierdzenia na podporze  $B$  w wyniku czego występuje tam moment zginający (moment utwierdzenia).

Zatem:

$$w''(x) = -\frac{P_{kr} w(x) - V_A x}{EJ_{\min}}.$$

Kolejne różniczkowania tego równania dają:

$$w'''(x) = -\frac{P_{kr} w'(x) - V_A}{EJ_{\min}}, \quad w^{IV}(x) = -\frac{P_{kr} w''(x)}{EJ_{\min}}.$$

To równanie różniczkowe czwartego rzędu zapiszemy w formie:

$$w^{IV}(x) + k^2 w''(x) = 0, \tag{a}$$

$$\text{gdzie: } k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ_{\min}}.$$

Całkę ogólną równania (a) można zapisać w postaci:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx.$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$1/ w(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_4 = 0 \rightarrow C_1 = -C_4,$$

$$2/ w''(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0,$$

$$3/ w(l) = 0 \rightarrow C_2 l + C_3 \sin kl = 0,$$

$$4/ w'(l) = 0 \rightarrow C_2 + C_3 k \cos kl = 0.$$

Pewnego objaśnienia wymaga drugi kinematyczny warunek brzegowy. Jego sens fizyczny, oznaczający zerowanie się momentu zginającego w punkcie  $A$  (podpora przegubowo przesuwna) staje się oczywisty, jeśli zauważymy, że:

$$M(x) = -w''(x)EJ_{\min}$$

Z dwóch ostatnich warunków otrzymujemy równanie:

$$kl = \operatorname{tg} kl,$$

którego najmniejszy dodatni, różny od zera pierwiastek ma wartość  $kl = 4.4934$ .

Tak więc:

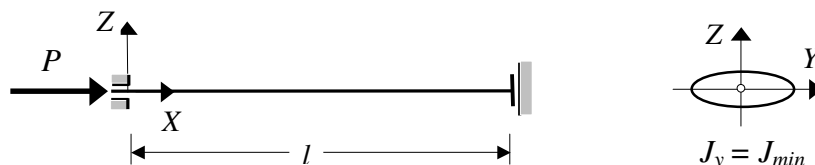
$$P_{kr} = \frac{4.4934^2 EJ_{\min}}{l^2} = 20.1906 \frac{EJ_{\min}}{l^2},$$

lub inaczej:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0.6992 * l)^2} \approx \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0.7l)^2}.$$

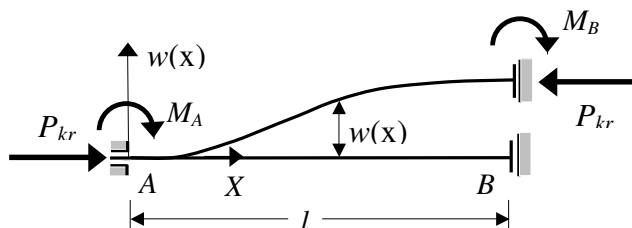
Współczynnik długości wybozeniowej dla takiego pręta wynosi  $\alpha = 0.7$ .

**Przykład 17.5.5.** Wyznaczyć siłę krytyczną i współczynnik długości wybozeniowej ściskanego osiowo pręta pryzmatycznego obciążonego jak na rysunku.



**Rozwiązanie**

Moment zginający w wyboczonym pręcie wynosi:



$$M(x) = P_{kr} w(x) - M_A.$$

Stąd równanie różniczkowe osi wybozonego pręta ma postać:

$$w''(x) = \frac{M_A - P_{kr} w(x)}{EJ_{\min}}$$

Tak jak w poprzednim przykładzie, kolejne różniczkowania tego równania dają:

$$w'''(x) = -\frac{P_{kr} w'(x)}{EJ_{\min}}, \quad w^{IV}(x) = -\frac{P_{kr} w''(x)}{EJ_{\min}},$$

$$w^{IV}(x) + k^2 w''(x) = 0, \tag{a}$$

gdzie:  $k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ_{\min}}.$

Całkę ogólną równania (a) można zapisać w postaci:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx.$$

Stałe całkowania wyznaczymy z warunków brzegowych, ale zanim je sformułujemy zwróćmy uwagę na zależność między trzecią pochodną ugięcia i siłą poprzeczną. Wiemy już, że:

$$M(x) = -w''(x)EJ_{\min},$$

więc po obustronnym różniczkowaniu otrzymamy:

$$M'(x) = -w'''(x)EJ_{\min},$$

ale  $M'(x) = Q(x)$ , zatem  $Q(x) = -w'''(x)EJ_{\min}.$

Indeks „min” przy momencie bezwładności w ogólnym przypadku zależności różniczkowych między momentem zginającym, siłą poprzeczną i odpowiednimi pochodnymi funkcji ugięcia winien być zastąpiony indeksem wskazującym oś zginania.

Kinematyczne warunki brzegowe w tym pręcie mają postać:

$$1/ w(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_4 = 0,$$

$$2/ w'(0) = 0 \rightarrow C_2 + kC_3 = 0 \rightarrow C_2 = -kC_3,$$

$$3/ w'(l) = 0 \rightarrow C_2 + kC_3 \cos kl - kC_4 \sin kl = 0,$$

$$4/ w''(l) = 0 \rightarrow -k^3 C_3 \cos kl + k^3 C_4 \sin kl = 0.$$

Czwarty kinematyczny warunek brzegowy mówi o zerowaniu się siły poprzecznej na podporze B.

Podstawienie do warunku trzeciego,  $C_2 = -kC_3$  z warunku drugiego i  $C_4 = C_3 \cos kl / \sin kl$  z warunku czwartego daje zależność:

$$C_3 \sin kl = 0.$$

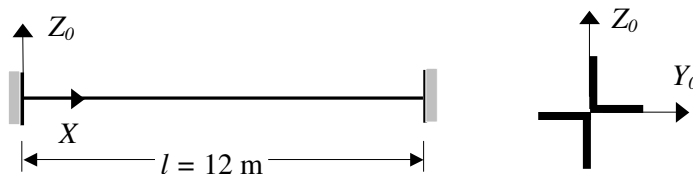
Stała całkowania  $C_3$  nie może być równa zero bo wówczas zerują się pozostałe stałe całkowania i  $w(x) = 0$ , co przeczy założonej krzywoliniowej formie wyboczonego pręta, więc:

$$\sin kl = 0 \rightarrow k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Najmniejszy pierwiastek tego równania daje siłę krytyczną o wartości:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}, \quad \text{z której wynika iż współczynnik długości wyboczeniowej dla takiego pręta} \\ \alpha = 1.$$

**Przykład 17.5.6.** O jaką wartość  $\Delta T$  musi wzrosnąć temperatura otoczenia obustronnie zamocowanego pręta stalowego, o długości  $l = 12$  m i przekroju złożonego z dwóch kątowników równoramiennych  $150 \times 150 \times 12$ , aby utracił on swoją stateczność. Stałe materiałowe pręta wynoszą: moduł Younga  $E = 205$  GPa, granica proporcjonalności  $R_H = 200$  MPa, współczynnik rozszerzalności cieplnej liniowej  $\varepsilon_T = 12 \times 10^{-6} / ^\circ C$ .



Siła krytyczna dla pręta obustronnie zamocowanego pracującego w zakresie liniowo sprężystym ma wartość:

$$P_{kr}^E = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_w^2}, \quad \text{gdzie: } l_w = 0.5 l$$

Pod wpływem podniesienia temperatury o  $\Delta T$  pręt podparty w sposób nieskrępowany może się wydłużyć o  $\Delta l = \varepsilon_T \Delta T l$ . Ponieważ pręt jest zamocowany to wydłużenie zredukowane jest do zera przez ściskającą siłę osiową  $P$  spełniającą zależność:

$$P = \frac{\Delta l EA}{l} \rightarrow P = \frac{\varepsilon_T \Delta T l EA}{l}.$$

Z porównania obu tych sił otrzymamy krytyczną wartość zmiany temperatury otoczenia, przy której pręt utraci swą stateczność:

$$\frac{\varepsilon_T \Delta T l EA}{l} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_w^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2}{\varepsilon_T \lambda^2},$$

gdzie:  $\lambda = \frac{l_w}{i_{\min}}$ .

Potrzebujemy wyliczyć minimalny promień bezwładności przekroju.

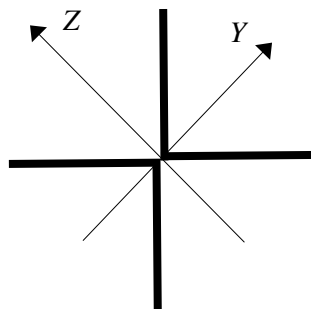
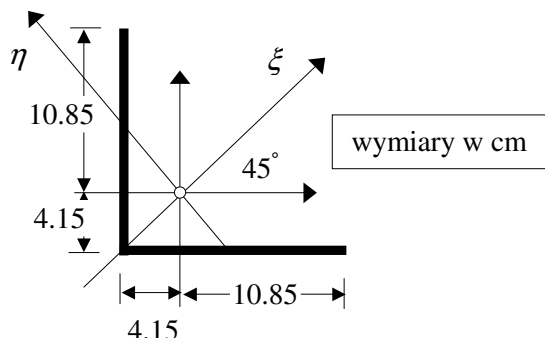
Z tablic profili walcowanych odczytujemy dane dla jednego kątownika

Z tablic profili walcowanych odczytujemy dane dla jednego kątownika

Pole przekroju:  $A = 34.9 \text{ cm}^2$ ,

główne centralne momenty bezwładności:

$$J_{\xi} = 1186 \text{ cm}^4, J_{\eta} = 305 \text{ cm}^4.$$



Główne centralne osie bezwładności przekroju tego pręta to jego osie symetrii. Momenty bezwładności względem tych osi mają wartość:

$$J_y = 2 * J_{\xi} = 2 * 1186 = 2372 \text{ cm}^4,$$

$$J_z = 2 [J_{\eta} + A (4.15 * \sqrt{2})^2] = 2 [305 + 34.9 (4.15 * \sqrt{2})^2] = 3014.261 \text{ cm}^4.$$

Minimalny promień bezwładności:

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{2372}{69.8}} = 5.829 \text{ cm}.$$

Smukłość:

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} = \frac{0.5 * 1200}{5.829} = 102.934.$$

Ponieważ do obliczeń przyjęto siłę krytyczną Eulera, należy sprawdzić czy smukłość pręta jest większa od smukłości granicznej.

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{205 * 10^3}{200}} = 100.58, \text{ zatem } \lambda > \lambda_{gr}.$$

Zmiana temperatury otoczenia powodująca utratę stateczności rozważanego pręta wynosi:

$$\Delta T = \frac{\pi^2}{\varepsilon_T \lambda^2} = \frac{\pi^2}{12 * 10^{-6} * 102.934^2} = 77.62 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Jeśli zmienione zostaną warunki podparcia pręta z zamocowanych na przegubowe, to wówczas jego smukłość będzie równa:

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1200}{5.829} = 205.867,$$

a krytyczna zmiana temperatury będzie wynosić:

$$\Delta T = \frac{\pi^2}{\varepsilon_T \lambda^2} = \frac{\pi^2}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 205.867^2} = 19.41^\circ\text{C}.$$

### 17.6. Zastosowanie metody energetycznej przy wyznaczaniu siły krytycznej

Rozwiązanie zagadnienia utraty stateczności drogą całkowania równania różniczkowego krzywoliniowej postaci pręta w bardziej złożonych przypadkach obciążenia czy jego geometrii, często prowadzi do skomplikowanych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach, których rozwiązanie wymaga złożonych metod matematycznych i bywa przyczyną braku zamkniętych rozwiązań analitycznych.

W takich przypadkach chętnie korzystamy z metod energetycznych, umożliwiających szybkie otrzymanie przybliżonego rozwiązania. Dalej omówimy metodę Timoshenki - Ritza wyznaczania siły krytycznej wykorzystującą twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej układu. Twierdzenie to mówi, że: w położeniu równowagi stałej całkowita energia potencjalna układu  $\Pi$  zdefiniowana wzorem:

$$\Pi = L_w - L_z, \quad (17.21)$$

gdzie:  $L_z$  - praca sił zewnętrznych,  $L_w$  - praca sił wewnętrznych, osiąga minimum.

We wspomnianej metodzie zakładamy równanie odkształconej osi pręta odpowiadające kinematycznym i statycznym warunkom brzegowym:

$$w(x) = \sum_{m=1}^n C_m f_m(x), \quad (17.22)$$

i dalej na podstawie założonego równania odkształconej osi pręta obliczamy pracę sił zewnętrznych oraz pracę sił wewnętrznych, a następnie rozpisujemy układ równań

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_m} = 0. \quad (17.23)$$

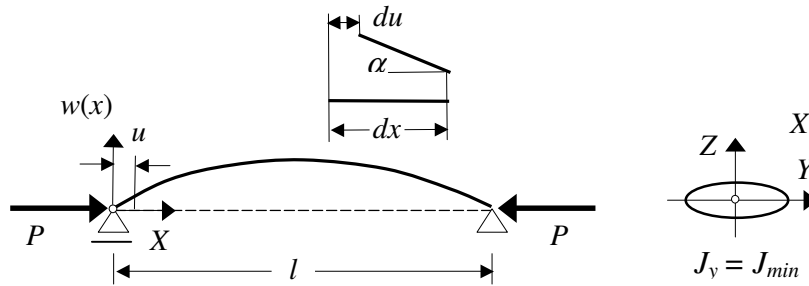
Otrzymany w ten sposób układ równań (17.23) jest układem równań liniowych jednorodnych ze względu na współczynniki  $C_m$ . Z przyrównania do zera wyznacznika tego układu wyznaczamy przybliżoną wartość siły krytycznej.

Uzyskana tą metodą siła krytyczna ma wartość zawsze większa od dokładnej, i tym bliższą dokładnej im bliższą rzeczywistości jest założona postać ugiętej osi pręta w stanie krzywoliniowej równowagi.

Jeżeli w miejsce skończonego szeregu funkcji (17.22) przyjmujemy, że zdeformowaną oś opisuje jedna funkcja:

$$w(x) = C f(x),$$

to w miejsce układu równań (17.23) otrzymujemy jedno równanie z którego wyznaczamy siłę krytyczną prostym wzorem zawierającym pierwszą i drugą pochodną funkcji  $f(x)$ . W celu jego wyprowadzenia rozważmy pręt pokazany niżej na rys.



Praca sił wewnętrznych, która równa się energii sprężystej układu, przy pominięciu wpływu sił podłużnych wynosi:

$$L_w = U = \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx.$$

Uwzględniając, związek różniczkowy między momentem zginającym i drugą pochodną linii ugięcia  $M_y = -EJ_y w''(x)$ , otrzymujemy:

$$L_w = U = \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx = \frac{EJ_y}{2} \int_0^l [w''(x)]^2 dx = C^2 \frac{EJ_y}{2} \int_0^l [f''(x)]^2 dx.$$

Aby obliczyć pracę sił zewnętrznych potrzebujemy wyznaczyć poziome przemieszczenia  $u$ . Wyliczymy je jako różnicę między długością pierwotną  $l$  a rzutem zdeformowanej osi pręta na oś  $X$ .

Z rysunku pokazanego wyżej, łatwo obliczymy zależność między dowolnie małym odcinkiem pręta  $dx$  i dowolnie małym przemieszczeniem jego końca  $du$ :

$$du = dx(1 - \cos \alpha).$$

Ponieważ kąt  $\alpha$  jest mały to:  $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = w'(x)$  i kolejno przekształcenia dają:

$$(1 - \cos \alpha) = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx 2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \approx 2 \left( \frac{1}{2} \alpha \right)^2 = 2 \left( \frac{1}{2} \tan \alpha \right)^2 = \frac{1}{2} [w'(x)]^2$$

Stąd całkowite przemieszczenie  $u$  wynosi:

$$u = \int_0^l (1 - \cos \alpha) dx = \frac{1}{2} \int_0^l [w'(x)]^2 dx = \frac{C^2}{2} \int_0^l [f'(x)]^2 dx, \text{ i}$$

i praca sił zewnętrznych jest równa:

$$L_z = Pu = P \frac{C^2}{2} \int_0^l [f'(x)]^2 dx.$$

Całkowita energia potencjalna analizowanego pręta jest równa:

$$\Pi = L_w - L_z = U = C^2 \frac{EJ_y}{2} \int_0^l [f''(x)]^2 dx - P \frac{C^2}{2} \int_0^l [f'(x)]^2 dx,$$

i przyrównanie do zera jej pochodnej względem stałego współczynnika  $C$  daje równanie



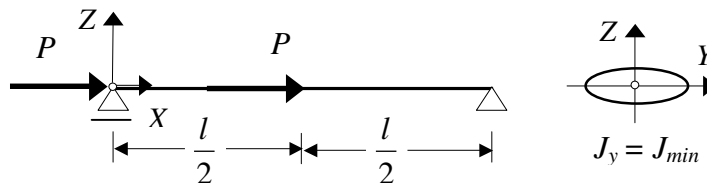
$$\frac{d\Pi}{dC} = C EJ_y \int_0^l [f''(x)]^2 dx - PC \int_0^l [f'(x)]^2 dx = 0,$$

z którego otrzymujemy poszukiwany wzór na siłę krytyczną:

$$P_{kr} = \frac{EJ_{\min} \int_0^l [f''(x)]^2 dx}{\int_0^l [f'(x)]^2 dx}. \quad (17.24)$$

### 17.6.1. Przykłady

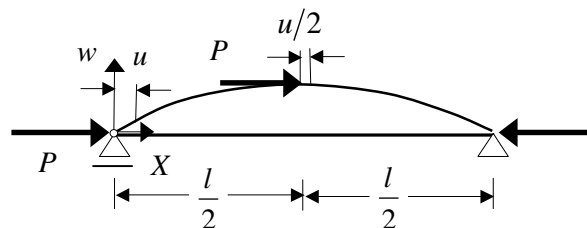
**Przykład 17.6.1.1.** Wyznaczyć siłę krytyczną i współczynnik długości wyboczeniowej, pręta przegubowo podpartego obciążonego osiowo dwoma siłami ściskającymi jak na rysunku.



Zakładamy równanie odkształconej osi pręta w postaci:

$$w(x) = C \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (a)$$

które spełnia kinematyczne warunki brzegowe - zerowanie się ugięcia na podporach oraz statyczne warunki brzegowe - zerowanie się tam momentów zginających.



Praca sił wewnętrznych wynosi:

$$L_w = U = \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx = \frac{EJ_y}{2} \int_0^l [w''(x)]^2 dx = \frac{EJ_y}{2} C^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ_y}{4} \frac{\pi^4}{l^3} C^2$$

Przemieszczenie punktu przyłożenia siły na lewej podporze jest równe:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^l [w'(x)]^2 dx = C^2 \frac{\pi^2}{2l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = C^2 \frac{\pi^2}{4l},$$

stąd całkowita praca sił zewnętrznych wynosi:

$$L_z = Pu + P\frac{u}{2} = \frac{3}{8}P\frac{\pi^2}{l}C^2.$$

Całkowita energia potencjalna analizowanego pręta jest równa:

$\Pi = L_w - L_z = EJ_y \frac{\pi^4}{4l^3} C_1^2 - \frac{3}{8}P\frac{\pi^2}{l} C_1^2$ , i przyrównanie do zera jej pochodnej względem współczynnika  $C$  daje równanie:

$$\frac{d\Pi}{dC} = \frac{EJ_y \pi^4}{2l^3} C - \frac{3}{4}P\frac{\pi^2}{l} C = 0,$$

z którego wyznaczamy poszukiwane wartości siły krytycznej i współczynnika długości wyboyczeniowej

$$P_{kr} = \frac{2\pi^2 EJ_{min}}{3l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(1.225l)^2}.$$

Siła krytyczna dla tego pręta otrzymana metodą całkowania równania różniczkowego (patrz przykład 17.5.3) wyniosła

$$P_{kr} = \frac{6.5362 EJ_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(1.229l)^2},$$

stąd błąd rozwiązania metodą energetyczną wynosi 0.67 %.

Policzmy ponownie to zadanie przy założonym innym równaniu odkształconej osi pręta. Przyjmijmy teraz równanie w formie:

$$w(x) = \frac{C}{l^2} x(l-x), \tag{b}$$

które spełnia kinematyczne warunki brzegowe ale nie daje zerowania się momentów zginających na podporach bo:

$$w'(x) = \frac{C}{l^2} (l-2x), \quad w''(x) = -\frac{2C}{l^2},$$

i druga pochodna jest różna od zera. Zatem równanie (b)

jest „gorsze” od równania (a) i zobaczymy jaki to będzie miało wpływ na wartość siły krytycznej.

Kolejno obliczamy:

$$\text{moment zginający: } M_y = -EJ_y w''(x) = EJ_y \frac{2C}{l^2},$$

$$\text{pracę sił wewnętrznych: } L_w = U = \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx = \frac{2EJ_y}{l^4} C^2 \int_0^l dx = \frac{2EJ_y}{l^3} C^2,$$

$$\text{przemieszczenie lewej podpory: } u = \frac{1}{2} \int_0^l [w'(x)]^2 dx = \frac{C^2}{2l^4} \int_0^l (l-2x)^2 dx = \frac{C^2}{6l},$$

pracę sił zewnętrznych:  $L_z = Pu + P\frac{u}{2} = \frac{3}{2}Pu = \frac{C^2}{4l}P$ ,

całkowitą energię potencjalną pręta:  $\Pi = L_w - L_z = \frac{2EJ_y}{l^3}C^2 - \frac{C^2}{4l}P$ ,

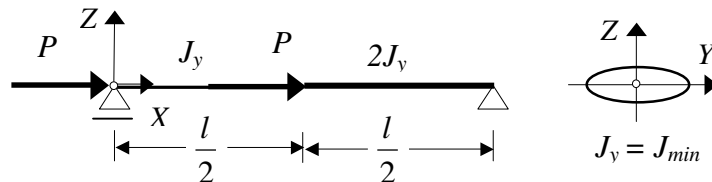
aby z zerowania się jej pochodnej:

$$\frac{d\Pi}{dC} = \frac{8EJ_y}{l^3}C - \frac{P}{4l} = 0, \text{ wyznaczyć siłę krytyczną:}$$

$$P_{kr} = \frac{8EJ_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(1.111l)^2}.$$

Tym razem błąd rozwiązania metodą energetyczną wynosi 18.30 %.

**Przykład 17.6.1.2.** Wyznaczyć siłę krytyczną, pręta przegubowo podpartego, o skokowo zmiennym momencie bezwładności obciążonego osiowo dwoma siłami ściskającymi jak na rysunku.



Zakładamy równanie odkształconej osi pręta w postaci:

$$w(x) = C \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Równanie momentów zginających przyjmuje formę:

$$M_y = -EJ_y w''(x) = C EJ_y \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

pracę sił wewnętrznych jest równa:

$$\begin{aligned} L_w &= \frac{EJ_y}{2} C^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^{l/2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{2EJ_y}{2} C^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_{l/2}^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ_y}{2} C^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{4} + \frac{2EJ_y}{2} C^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{4} = \\ &= \frac{3 \pi^4 EJ_y}{8 l^3} C^2 \end{aligned}$$

Przemieszczenia zewnętrznych sił ściskających jak i praca tych sił są takie same jak w przykładzie 17.6.1.1.

$$L_z = Pu + P\frac{u}{2} = \frac{3}{8}P \frac{\pi^2}{l} C^2.$$

Stąd całkowita energia potencjalna analizowanego pręta wynosi:

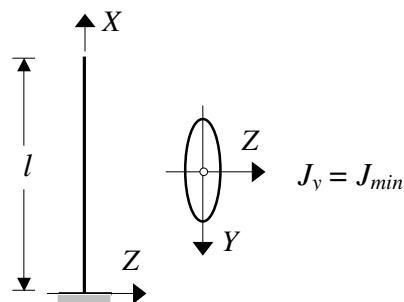
$$\Pi = L_w - L_z = \frac{3\pi^4 EJ_y}{8l^3} C^2 - \frac{3}{8} P \frac{\pi^2}{l} C^2.$$

Z przyrównanie do zera jej pochodnej względem stałego współczynnika  $C$  otrzymujemy:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}.$$

### Przykład 17.6.1.3.

Wyznaczyć krytyczną wartość obciążenia pręta wspornikowego, jak na rysunku obok, o przekroju  $A$  obciążonego tylko ciężarem własnym  $\gamma$ .



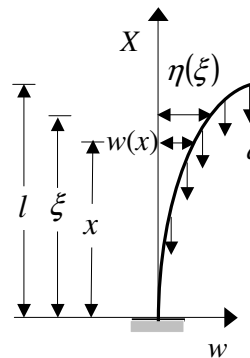
Mamy tutaj do czynienia z zagadnieniem utraty stateczności pręta ściskanego osiowo obciążeniem ciągłym  $q = \gamma A$  równomiernie rozłożonym wzdłuż jego osi.

Moment zginający w dowolnym przekroju pręta przy zdeformowanej jego osi (patrz rys. obok) wynosi:

$$M_y(x) = \int_x^l q[\eta(\xi) - w(x)] d\xi, \text{ gdzie: } q = \gamma A.$$

Równanie różniczkowe ugiętej osi pręta ma postać:

$$EJ_y \frac{d^2 w(x)}{d x^2} = \int_x^l q[\eta(\xi) - w(x)] d\xi.$$



Powyższe równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach można rozwiązać stosując nieskończone szeregi otrzymując (patrz np. S.P.Timoshenko, R.Gere: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963) w wyniku:

$$(ql)_{kr} = \frac{7.837 EJ_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(1.122 l)^2}. \quad (c)$$

Teraz przykład ten rozwiążemy stosując metodę energetyczną.

Przyjmijmy linię ugięcia w postaci:

$w(x) = C \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$ , która spełnia kinematyczne warunki brzegowe (zerowanie się ugięcia i kąta ugięcia w utwierdzeniu).

Przy przyjętej formie linii ugięcia moment zginający określa zależność:

$$\begin{aligned}
 M_y(x) &= \int_x^l q[\eta(\xi) - w(x)]d\xi = qC \int_x^l \left(1 - \cos \frac{\pi \xi}{2l}\right) d\xi - q \int_x^l w(x) d\xi = qC \left( \xi - \frac{2l}{\pi} \sin \frac{\pi \xi}{2l} \right) \Big|_x^l - \\
 &\quad - q w(x) \xi \Big|_x^l = qC \left[ (l-x) - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2l}\right) \right] - qC(l-x) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) = \\
 &= qC \left[ (l-x) \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2l}\right) \right]
 \end{aligned}$$

stąd praca sił wewnętrznych (równa energii sprężystej) wynosi:

$$L_w = U = \int_0^l \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx = C^2 \frac{q^2 l^3}{2EJ_y} \left( \frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} \right).$$

Praca wykonana przez ciągle rozłożone obciążenie osiowe wynosi (patrz wyrażenie na pionowe przemieszczenie punktów osi pręta wywołane założoną jej deformacją podane w przykładzie 17.6.1.1.):

$$L_z = \int_0^l q(l-x) \frac{1}{2} [w'(x)]^2 dx = \frac{q\pi^2}{8l^2} C^2 \int_0^l (l-x) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{q\pi^2}{8} C^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right).$$

Otrzymanie powyższe wyniku wymaga wykonania dość żmudnych całkowań.

Całkowita energia potencjalna zdeformowanego pręta jest równa:

$$\Pi = L_w - L_z = \frac{q^2 l^3}{2EJ_y} C^2 \left( \frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} \right) - \frac{q\pi^2}{8} C^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right)$$

Przyrównując do zera jej pochodną względem  $C$  otrzymujemy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C} = \frac{q^2 l^3}{EJ_y} C \left( \frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} \right) - \frac{q\pi^2}{4} C \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) = 0.$$

Stąd krytyczna wartość ciężaru pręta wynosi:

$$(ql)_{kr} = \frac{7.869 EJ_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(1.120l)^2}. \quad (d)$$

Porównanie zależności (c) i (d) pokazuje, że błąd między rozwiązaniem otrzymanym drogą całkowania równania różniczkowego a metodą energetyczną jest znikomy i wynosi około 0.41 %.

Policzmy krytyczną wysokość wspornikowego pręta przyjmując, że wykonany został ze stali o module Younga  $E = 205 \text{ GPa}$  i ciężarze własnym  $\gamma = 78.50 \text{ kN/m}^3$ , a jego przekrój poprzeczny jest kwadratowy o boku 1 cm. Aby ją wyznaczyć przekształcamy zależność (c) otrzymując:

$$(ql)_{kr} = \frac{7.837 EJ_{\min}}{l^2} \rightarrow l_{kr}^3 = \frac{7.837 EJ_{\min}}{q} \rightarrow l_{kr}^3 = \frac{7.837 EJ_{\min}}{\gamma A} \rightarrow l_{kr}^3 = \frac{7.837 E i_{\min}^2}{\gamma}.$$

Wstawienie wartości stałych materiałowych i wymiarów przekroju daje:

$$l_{kr}^3 = \frac{7.837 * 205 * 10^9 * 10^{-4}}{78.50 * 10^3 * 12} \rightarrow l_{kr} = 5.546 \text{ m.}$$

Przytoczony na początku tego rozdziału warunek nośności w postaci nie przekroczenia wytrzymałości obliczeniowej przy ściskaniu dał dopuszczalną wysokość takiego pręta równą  $2.739 * 10^3$  m. Pokazuje to, jak w tym przypadku decydujące znaczenie na nośność konstrukcji ma zjawisko utraty stateczności.