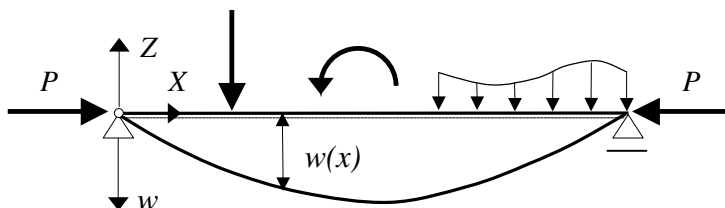


18. ZGINANIE POPRZECZNE ZE ŚCISKANIEM

18.1. Postawienie zagadnienia

Przy omawianiu zagadnienia mimośrodowego ściskania bardzo mocno zostało podkreślone, że otrzymane wzory mogą być stosowane tylko wówczas, gdy konstrukcja spełnia warunki pozwalające na przyjęcie zasady zeszywnienia. Teraz zajmiemy się przypadkiem, który pokazuje jak istotne są konsekwencje rezygnacji z przyjęcia zasady zeszywnienia i jak wysoce błędne byłyby wyniki obliczeń przy jej przyjęciu. Przypadek ten występuje, gdy do ściskanego osiowo pręta pryzmatycznego przyłożone jest jeszcze obciążenie powodujące jego poprzeczne zginanie (rys. 18.1). W pokazanej na poniższym rysunku belce, układ sił



Rys. 18.1

obciążających jest przyczyną jej ugięcia i łatwo zauważyć, że w konfiguracji aktualnej (po przyłożeniu obciążeń) równanie momentów zginających można zapisać, uwzględniając wpływ przemieszczeń osi belki na ich wartości, w postaci:

$$M_y(x) = M_y^0(x) + P w(x) \quad (18.1)$$

gdzie: $M_y^0(x)$ - moment zginający w belce nieodkształcalnej.

W przyjętym układzie odniesienia równanie różniczkowe ugiętej osi belki ma postać:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EJ_y}$$

Podstawienie do niego funkcji momentów (18.1) daje równanie:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k^2 w(x) = -\frac{M_y^0(x)}{EJ_y} \quad (18.2)$$

$$\text{gdzie: } k^2 = \frac{P}{EJ_y} \quad (18.3)$$

Rozwiązaniem niejednorodnego równania różniczkowego zwyczajnego (18.2) jest funkcja

$$w(x) = w_s(x) + A \sin kx + B \cos kx \quad (18.4)$$

gdzie: $w_s(x)$ - całka szczególna tego równania, A oraz B - stałe całkowania zależne od kinematycznych warunków brzegowych belki.

Znając funkcję $w(x)$, momenty zginające i siły poprzeczne w belce wyznaczamy z zależności:

$$M_y(x) = -EJ_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

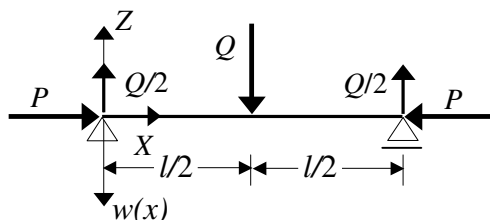
$$Q_z(x) = -EJ_y \frac{d^3 w(x)}{dx^3}.$$

Wartości naprężeń normalnych dla tego przypadku w przyjętych układach odniesienia wynoszą:

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{M_y(x)}{J_y} z. \quad (18.5)$$

18.2. Belka wolnopodparta obciążona siłą w środku rozpiętości

Rozważmy, pokazaną na rys.18.2 belkę wolnopodpartą obciążoną w środku siłą Q , prostopadłą do jej osi i ściskającą osiowo siłą P .



Rys. 18.2

Ze względu na symetrię belki rozpatrywać będziemy tylko jeden przedział $0 \leq x \leq l/2$

Ponieważ $M_y^0(x) = \frac{Qx}{2}$ więc łatwo zgadnąć i sprawdzić przez podstawienie, że:

$w_s(x) = -\frac{Qx}{2P}$ jest całką szczególną równania niejednorodnego (18.2), w związku z czym jego całka ogólna ma postać:

$$w(x) = -\frac{Qx}{2P} + A \sin kx + B \cos kx. \quad (18.6)$$

Z kinematycznych warunków brzegowych wyznaczmy stałe całkowania:

$$\begin{cases} 1/w(0) = 0 \\ 2/w'(l/2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ -\frac{Q}{2P} + kA \cos \frac{kl}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{B=0}{2kP \cos kl/2} \frac{1}{1},$$

a po ich wstawieniu do (18.6) otrzymamy funkcję ugięć belki:

$$w(x) = \frac{Q \sin kx}{2kP \cos kl/2} - \frac{Qx}{2P}. \quad (18.7)$$

Maksymalne ugięcie belki wystąpi w jej środku rozpiętości i ma wartość:

$$\max w = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Q \sin kl/2}{2kP \cos kl/2} - \frac{Ql}{4P} = \frac{Q}{2EJ_y} \left(\frac{\operatorname{tg} kl/2}{k^3} - \frac{l}{2k^2} \right).$$

Poprzez szereg przekształceń możemy ostatecznie zapisać:

$$\max w = \frac{Ql^3}{48EJ_y} \kappa_1(u), \quad (18.8)$$

$$\text{gdzie: } u = \frac{kl}{2}, \quad \kappa_1(u) = 3 \left(\frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3} \right).$$

Związek między momentem zginającym i drugą pochodną ugięcia daje:

$$M(x) = \frac{Q \sin kx}{2k \cos kl/2} \quad (18.9)$$

Maksymalny moment zginający występuje w środku rozpiętości belki i ma wartość:

$$\max M = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Ql}{4} \kappa_2(u), \quad (18.10)$$

$$\text{gdzie: } \kappa_2(u) = \frac{\operatorname{tg} u}{u}$$

Dokonajmy krótkiej analizy wzoru (18.8) podającego wartości maksymalnego ugięcia w postaci iloczynu maksymalnego ugięcia w belce przy przyjęciu zasady zeszywnienia i funkcji $\kappa_1(u)$. Jeśli zauważymy, że argument tej funkcji można wyrazić w zależności od wartości przyłożonej siły ściskającej P i siły krytycznej Eulera P_{kr}^E , gdyż

$$u = \frac{kl}{2} \rightarrow u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ_y}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}^E}},$$

to dla

$$P = 0, \quad \kappa_1(u) = 1 \quad \text{i} \quad \max w = \frac{Ql^3}{48EJ_y},$$

a dla

$$P \rightarrow P_{kr}^E, \quad \kappa_1(u) = \infty \quad \text{i} \quad \max w \rightarrow \infty.$$

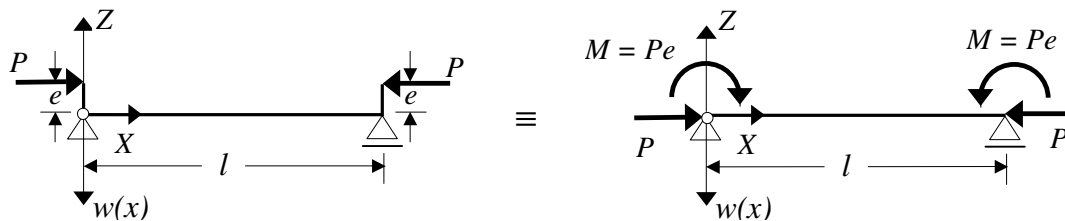
Otrzymany wynik pokazuje, że w przypadku przyłożenia siły krytycznej przemieszczenia belki będą wzrastać do nieskończoności przy dowolnie małym obciążeniu poprzecznym. Analogiczne wnioski daje analiza wzoru na maksymalny moment zginający. Niżej pokazane są wartości funkcji $\kappa_1(u)$ i $\kappa_2(u)$ w zależności od stosunku P/P_{kr}^E .

P/P_{kr}^E	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
$\kappa_1(u)$	1.110	1.248	1.423	1.658	1.983	2.479	3.301	4.943	9.871	∞
$\kappa_2(u)$	1.091	1.205	1.351	1.545	1.817	2.223	2.900	4.253	8.307	∞

Wyniki pokazane w tabelce mogą dowodzić, że przy sile ścisającej o wartości $0.1P_{kr}^E$ uwzględnienie zasady zeszywnienia może dawać 10% różnice w wartościach momentów zginających.

18.3. Belka wolnopodparta mimośrodowo ścisana

Teraz przedmiotem rozważań będzie belka wolnopodparta pokazana na rys. 18.3 obciążona siłami ścisającymi P równoległymi do jej osi zaczepionymi na mimośrodku e . Zasada de Saint Venanta pozwala na zastąpienie tej belki równoważną jej belką obciążoną momentami zginającymi $M = Pe$ na podporach i ścisającą osiowo siłą P .



Rys. 18.3

W tym przypadku $M_y^0(x) = Pe$, a całka szczególna równania niejednorodnego (18.2), równa się: $w_s(x) = -e$, więc jego całka ogólna przyjmuje postać:

$$w(x) = -e + A \sin kx + B \cos kx. \quad (18.11)$$

Stałe całkowania wyznaczone z kinematycznych warunków brzegowych są równe:

$$\begin{aligned} 1/w(0) = 0 &\rightarrow \begin{cases} B = e \\ -e + A \sin kl + e \cos kl = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{B - e}{\sin kl} = \frac{e - e \cos kl}{\sin kl}. \end{aligned}$$

Stąd funkcja ugięć osi belki przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} w(x) &= -e + \frac{(e - e \cos kl) \sin kx}{\sin kl} + e \cos kx = -e + e \frac{\sin kx - \cos k \sin kxl + \sin kl \cos kx}{\sin kl} = \\ &= e \left[\frac{\sin kx + \sin k(l-x)}{\sin kl} - 1 \right], \end{aligned}$$

a równanie momentów zginających przedstawia zależność:

$$M_y(x) = Pe + Pe \left[\frac{\sin kx + \sin k(l-x)}{\sin kl} - 1 \right]. \quad (18.12)$$

Maksymalne ugięcie belki wystąpi w środku jej rozpiętości i ma wartość:

$$\max w = w\left(\frac{l}{2}\right) = e\left(\frac{1}{\cos kl/2} - 1\right) = e(\sec kl/2 - 1), \quad (18.13)$$

stąd maksymalny moment zginający, który też wystąpi w środku rozpiętości, wynosi:

$$\max M_y = M_y\left(\frac{l}{2}\right) = Pe \sec kl/2. \quad (18.14)$$

Ponieważ :

$$\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}^E}},$$

to przy $P \rightarrow P_{kr}^E$, zarówno maksymalne ugięcie jak i maksymalny moment zginający w belce zmierzają do nieskończoności przy dowolnie małym mimośrodku e .

Inaczej mówiąc przyłożenie do belki siły krytycznej powoduje jej zniszczenie, gdyż praktycznie nie jest możliwe idealnie osiowe obciążenie pręta.