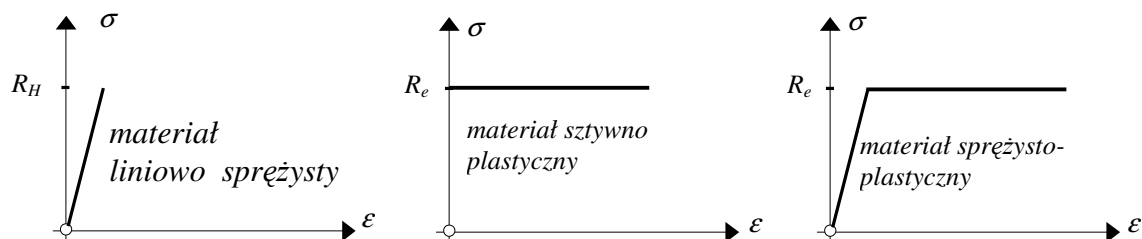


19. NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH USTROJÓW PRĘTOWYCH

19.1. Idealizacja wykresu rozciągania

Wykres rozciągania stali miękkiej, otrzymany ze statycznej próby rozciągania, daje obraz rzeczywistego zachowania się tego materiału przy osiowym rozciąganiu. Nieregularny i skomplikowany kształt tego wykresu sprawia, że w zastosowaniach aproksymuje się go odcinkowo możliwie dobrze przybliżającymi, prostymi funkcjami analitycznymi. Tej idealizacji dokonuje się w zależności od charakteru rzeczywistego wykresu i konkretnego zastosowania. Najczęściej stosowane aproksymacje pokazane są na rys.19.1.



Rys. 19.1

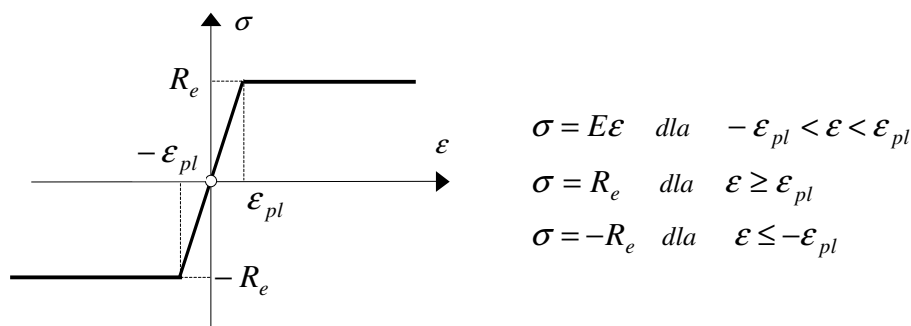
Model materiału liniowo sprężystego (ciało Hooke'a) stosowany jest w zagadnieniach, w których nie dopuszczamy wystąpienia odkształceń plastycznych. Takie ciało było przedmiotem naszych dotychczasowych rozważań.

Model materiału idealnie sztywno plastycznego (ciało de Saint-Venanta) używany jest w zagadnieniach technologicznej plastyczności, jak np. walcowanie lub przeciąganie, czyli w procesach w których odkształcenia plastyczne są dominujące i sprężyste mogą być pominięte.

Model ciała idealnie sprężysto-plastycznego (ciało Prandtla) stosowany jest do opisu zachowania się materiału, w którym występuje wyraźna platforma płynięcia i w zagadnieniach, w których dopuszczamy umiarkowane odkształcenia plastyczne. Stosowane też bywają bardziej skomplikowane modele materiału uwzględniające np. wzmocnienie plastyczne czy nieliniowe odkształcenia sprężyste.

19.2. Zginanie prętów z materiału sprężysto-plastycznego.

Rozważać będziemy zginanie poprzeczne prętów pryzmatycznych wykonanych z materiału o jednakowych własnościach na rozciąganie i ściskanie (materiał izonomiczny), opisanych modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego, którego wykres zależności $\sigma - \epsilon$ wraz z równaniami dla jednoosiowego stanu naprężenia pokazany jest na rys. 19.2.



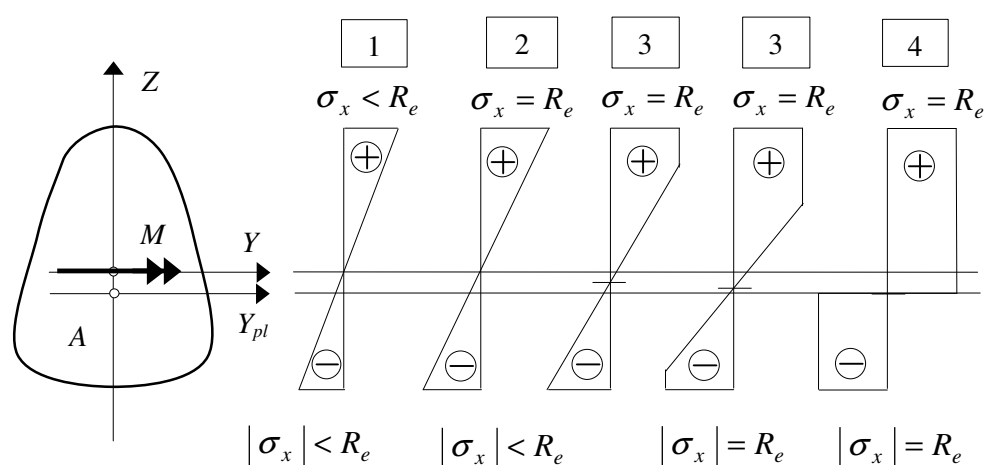
Rys. 19.2

Analizy zachowania się takich prętów dokonamy przyjmując następujące założenia:

- spełniona jest zasada płaskich przekrojów,
- obciążenie i przekrój poprzeczny belki spełnia warunki poprzecznego zginania,
- pomijalny jest wpływ sił poprzecznych na osiągnięcie stanu plastycznego.

Zacniemy od analizy wybranego przekroju pręta, pokazanego na rys. 19.3, w którym moment zginający, działający w jego płaszczyźnie symetrii, pręta jest równy M (dla uproszczenia zapisu opuszczony został dolny indeks). W zależności od wartości tego momentu zginającego mogą wystąpić następujące stany mechaniczne tego przekroju i odpowiadające im rozkłady naprężeń normalnych (patrz rys. 19.3):

- 1- stan sprężysty,
- 2- graniczny stan sprężysty,
- 3- stan sprężysto-plastyczny (częściowe uplastycznienie przekroju),
- 4- graniczny stan plastyczny (pełne uplastycznienie przekroju).



Rys. 19.3

Przy niewielkiej wartości momentu zginającego w przekroju występuje stan sprężysty, rozkład naprężeń normalnych jest liniowy, zerują się one na osi Y (osi obojętnej), a ich największa wartość jest mniejsza od granicy plastyczności R_e .

Zwiększaniu wartości momentu zginającego odpowiadać będzie wzrost odkształceń liniowych (zarówno tych dodatnich, jak i ujemnych) i stowarzyszony z tym wzrost naprężeń normalnych. Przy pewnej wartości \bar{M} – nazywanej granicznym momentem sprężystym punkty najbardziej oddalone od osi obojętnej zostaną uplastycznione, wystąpią w nich naprężenia o wartości równej R_e , i stan ten nazywamy granicznym stanem sprężystym.

Dalsze zwiększaniu momentu zginającego powoduje dalszy wzrost odkształceń i naprężeń, ale naprężenia mogą się zwiększać tylko w tych punktach, gdzie były one mniejsze od granicy plastyczności R_e . W tym stanie nazywanym stanem sprężysto-plastycznym w przekroju poprzecznym wystąpią obszary sprężyste, jak i uplastycznione.

Stan końcowy, w którym we wszystkich punktach przekroju naprężenia są równe granicy plastyczności, nazywamy granicznym stanem plastycznym, a moment zginający \bar{M} , przy którym ten stan się realizuje nazywamy - granicznym momentem plastycznym. Przekrój jest wówczas w pełni uplastyczniony i zgodnie z przyjętym modelem fizycznym materiału odkształcenia liniowe mogą wzrastać w nim nieograniczenie.

Zajmiemy się wpieryw granicznym stanem sprężystym.

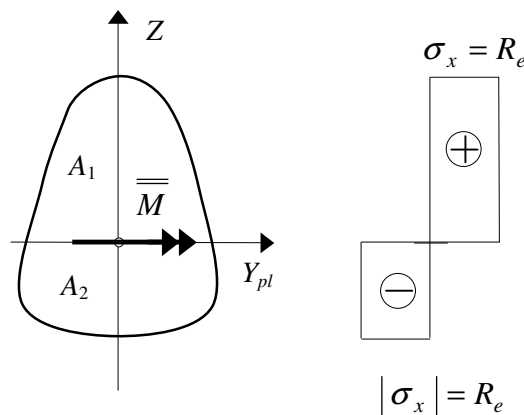
Zależności określające w stanie sprężystym rozkład naprężeń normalnych, krzywiznę osi belki i jej przemieszczenia są znane z poprzednich rozważań. Oś obojętna sprężystego zginania to główna centralna, oś bezwładności przekroju poprzecznego, równoległa do wektora momenty zginającego. Wartość granicznego momentu sprężystego \overline{M} , tj. momentu zginającego, który powoduje uplastycznienie skrajnego punktu (lub punktów) przekroju poprzecznego, wyznaczymy z zależności:

$$\max|\sigma_x| = R_e = \frac{\overline{M}}{W_{spr}} \rightarrow \overline{M} = R_e W_{spr}. \quad (19.1)$$

gdzie: $W_{spr} = W_y = \frac{J_y}{\max|z|}$ to wskaźnik wytrzymałości względem osi obojętnej sprężystego zginania.

Przejdźmy teraz do granicznego stanu plastycznego.

Oznaczmy przez A_1 uplastycznioną rozciąganą część przekroju, a przez A_2 uplastycznioną ścisną część przekroju (rys. 19.4). Rozdziela je oś obojętna zginania plastycznego, której położenie nie jest, na razie, znane.



Rys. 19.4

Chcemy wyznaczyć położenie osi obojętnej tego zginania i wartość granicznego momentu plastycznego \overline{M} , tj. momentu zginającego, który powoduje całkowite uplastycznienie przekroju poprzecznego.

Do dyspozycji mamy dwa równania równowagi układów sił wewnętrznych i zewnętrznych.

$$\iint_A \sigma_x dA = 0,$$

$$\iint_A \sigma_x z dA = \overline{M}.$$

Podstawiając do pierwszego równania wartości naprężeń w tym granicznym stanie dostajemy zależność

$$\iint_{A_1} R_e dA_1 + \iint_{A_2} (-R_e) dA_2 = 0 \rightarrow A_1 = A_2, \quad (19.2)$$

która dowodzi, że oś obojętna zginania plastycznego połowi przekrój poprzeczny. Z drugiego równania równowagi otrzymujemy wartość granicznego momentu plastycznego:

$$\iint_{A_1} R_e z dA_1 + \iint_{A_2} (-R_e) z dA_2 = \overline{\overline{M}} \rightarrow \overline{\overline{M}} = R_e W_{pl} \quad (19.3)$$

gdzie :

$$W_{pl} = |S_{ypl1}| + |S_{ypl2}| - \text{plastyczny wskaźnik wytrzymałości} \quad (19.4)$$

$$S_{ypl1} = \iint_{A_1} z dA_1, S_{ypl2} = \iint_{A_2} z dA_2 - \text{momenty statyczne odpowiednich części przekroju}$$

poprzecznego względem osi obojętnej plastycznego zginania.

Oba graniczne momenty zginające zależne są jedynie od materiału i kształtu przekroju poprzecznego.

Przejdźmy teraz do analizy belek z materiału Prandtla pracujących w warunkach zginania poprzecznego.

W ogólności na długości belki poszczególne jej przekroje mogą się znajdować we wszystkich wyżej opisanych stanach mechanicznych i zależność to będzie od wielkości przyłożonych obciążeń. W pewnej analogii do wyżej wprowadzonych określeń, dotyczących momentów zginających możemy obciążenia przyłożone do belki podzielić na:

- graniczne obciążenie sprężyste (graniczna nośność sprężysta)
- graniczne obciążenie plastyczne (graniczna nośność plastyczna)
- nośność graniczna.

Graniczne obciążenie sprężyste \overline{P} lub \overline{q} - to taka wielkość obciążenia danej belki, przy której choć w jednym jej przekroju wystąpi graniczny moment sprężysty $\overline{\overline{M}}$.

Graniczne obciążenie plastyczne $\overline{\overline{P}}$ lub $\overline{\overline{q}}$ - to taka wielkość obciążenia danej belki przy której choć w jednym jej przekroju wystąpi graniczny moment plastyczny $\overline{\overline{\overline{M}}}$.

Nośności graniczna P^* lub q^* - to taka wielkość obciążenia danej belki przy którym traci ona zdolność do jego przenoszenia (belka staje się geometrycznie zmienna).

W belkach statycznie wyznaczalnych graniczne obciążenie plastyczne jest tożsame z nośnością graniczną, gdyż pełne uplastycznienie przekroju jest równoważne powstaniu w nim przegubu plastycznego, co czyni belkę kinematycznie zmienną. Przegub $\overline{\overline{\overline{M}}}$ plastyczny, w

odróżnieniu od zwykłego przegubu przenosi graniczny moment plastyczny $\overline{\overline{\overline{M}}}$, ale obrót sąsiednich przekrojów jest w nim swobodny co daje belce dodatkowy stopień swobody.

W belkach statycznie niewyznaczalnych sytuacja jest trochę odmienna bo na ogół powstaniu jednego przegubu plastycznego nie czyni belki geometrycznie zmienną, a tylko obniża jej stopień statycznej niewyznaczalności. Stąd na w belce n-krotnie statycznie niewyznaczalnej maksymalna liczba przegubów plastycznych, potrzebna do zamiany belki w mechanizm wynosi $n+1$.

Nośność graniczną można otrzymać w dwojaki sposób:

- pierwszy, polega na zwiększaniu obciążeń i analizie kolejnych wywołanych przez nie stanów konstrukcji od sprężystych aż do stanu nośności granicznej,
- drugi, polega na bezpośredniej analizie stanów nośności granicznej tzn. analizie konstrukcji w której wprowadzonych zostało tak wiele przegubów plastycznych (w ogólności obszarów uplastycznionych), że stała się geometrycznie zmienna i wykorzystaniu twierdzeń ekstremalnych teorii plastyczności.

W teorii plastyczności występują pojęcia pól statycznie i kinematycznie dopuszczalnych w konstrukcji, które definiujemy następująco:

- polem statycznie dopuszczalnym, nazywamy pole naprężeń, które spełnia warunki

równowagi i jest niesprzeczne z warunkiem plastyczności tzn. $\max M \leq \overline{M}$ ($\max |\sigma| \leq R_e$)

- polem kinematycznie dopuszczalnym nazywamy pole przemieszczeń, które jest niesprzeczne z istniejącymi więzami.

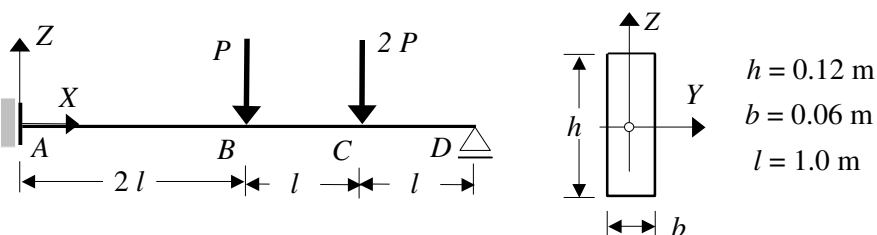
Twierdzenia ekstremalne teorii plastyczności możemy sformułować następująco:

- twierdzenie o oszacowaniu dolnym:
największe spośród statycznie dopuszczalnych obciążeń granicznych jest rzeczywistą nośnością graniczną,
- twierdzenie o oszacowaniu górnym:
najmniejsze spośród kinematycznie dopuszczalnych obciążeń granicznych jest rzeczywistą nośnością graniczną.

Stąd wnosimy, że wyznaczona metodą pól statycznie dopuszczalnych (podejście statyczne) nośność graniczna jest oszacowaniem od dołu rzeczywistej nośności granicznej, natomiast w przypadku pól kinematycznie dopuszczalnych (podejście kinematyczne) jest oszacowaniem od góry.

Można więc powiedzieć, że rezultat otrzymany podejściem statycznym jest bezpieczniejszy gdyż określona tą metodą nośność graniczna jest mniejsza od rzeczywistej i w istocie rzeczy konstrukcja może przenieść większe obciążenie.

Te dwa sposoby pokazane zostaną na przykładzie belki jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej o prostokątnym przekroju poprzecznym $b \times h = 0.06 \times 0.12$ m, obciążonej jak na rys. 19.5 i wykonanej z materiału, którego granica plastyczności $R_e = 225$ MPa.



Rys. 19.5

Wpierw obliczymy graniczne momenty sprężysty i plastyczny. Ponieważ przekrój jest bisymetryczny więc oś Y jest osią obojętną zginania zarówno sprężystego jak i plastycznego.

Wskaźnik wytrzymałości sprężystego zginania wynosi: $W_{spr} = bh^2 / 6 = 144 \text{ cm}^3$, natomiast wskaźnik wytrzymałości plastycznego zginania jest równy:

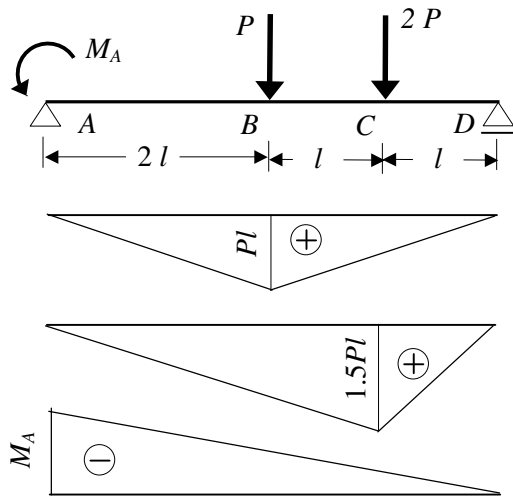
$$W_{pl} = 2 * bh^2 / 8 = bh^2 / 4 = 216 \text{ cm}^3.$$

Stąd graniczny moment sprężysty: $\overline{M} = R_e W_{spr} = 225 * 10^6 * 144 * 10^{-6} = 32400 \text{ Nm}$, a

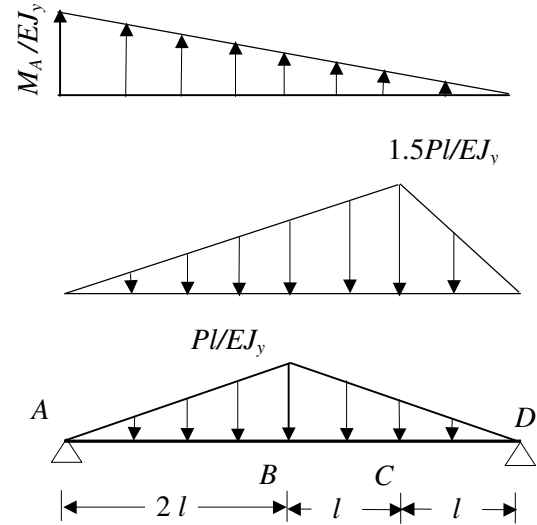
graniczny moment plastyczny wynosi: $\overline{M} = R_e W_{pl} = 225 * 10^6 * 216 * 10^{-6} = 48600 \text{ Nm}$.

Pierwsza metoda określenia nośności granicznej wymaga wyznaczenia momentów w tej jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej belce. Aby to uczynić musimy znać reakcje, których wyznaczenie z samych równań równowagi nie jest możliwe. Gdybyśmy jednak znali jedną z nich to pozostałe łatwo wyznaczymy z równań równowagi. Wyznaczymy więc wartość momentu w utwierdzeniu M_A . W tym celu zastąpimy daną belkę statycznie niewyznaczalną równoważną jej wolnopodpartą belką statycznie wyznaczalną obciążoną prócz sił skupionych, momentem M_A . Wartość M_A wyliczymy z warunku zerowania się kąta ugięcia na podporze A w belce wolnopodparzej. Możemy to uczynić korzystając np. z metody Mohra obliczania ugięć.

belka rzeczywista



belka fikcyjna



$$\sum M_{fD} = 0 \rightarrow V_{fA} * 4l + \frac{1}{2} \frac{M_A}{EJ_y} 4l \frac{2 * 4l}{3} - \frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ_y} 4l * 2l - \frac{1}{2} \frac{1.5 Pl}{EJ_y} 3l * 2l - \frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ_y} l * \frac{2l}{3} = 0$$

$$V_{fA} = \frac{27Pl^2 - 16M_A}{12EJ_y},$$

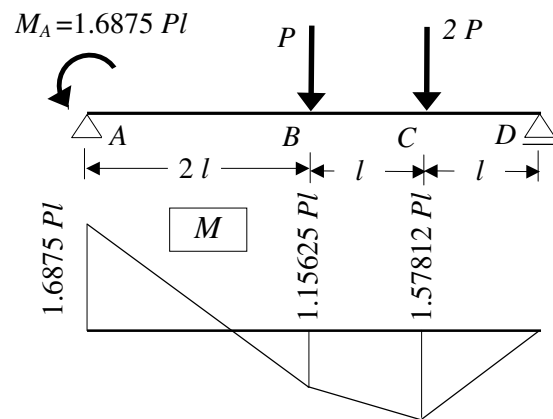
$$V_{fA} = \varphi_A = \frac{27Pl^2 - 16M_A}{12EJ_y} = 0 \rightarrow M_A = \frac{27}{16} Pl = 1.6875 Pl.$$

Znajomość momentu utwierdzenia M_A pozwala na wyznaczenie wykresu momentów zginających w zastępczej statycznie wyznaczalnej belce wolnopodpartej, który jest równocześnie wykresem momentów w danej belce statycznie niewyznaczalnej. Widać z niego, że największy co do bezwzględnej wartości moment zginający występuje w utwierdzeniu, więc graniczne obciążenie sprężyste obliczymy z zależności:

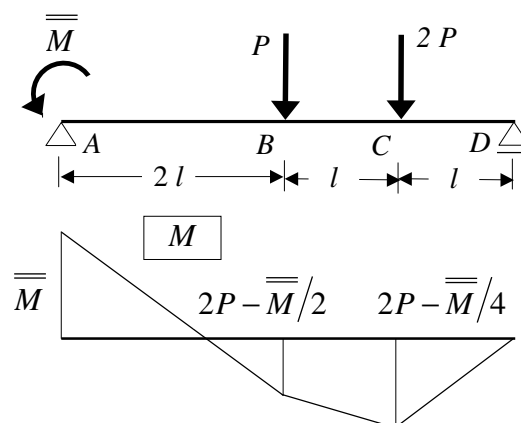
$$\bar{M} = 1.6875 \bar{P}l \rightarrow \bar{P} = 19200 \text{ N.}$$

Zwiększanie wartość sił powoduje rozwój obszarów uplastycznionych i skutkuje pojawieniem się pierwszego granicznego momentu plastycznego. Wystąpi on w utwierdzeniu bo tam jest największy moment zginający w tej belce. Zatem graniczne obciążenie plastyczne będzie miało wartość:

$$\bar{\bar{M}} = 1.6875 \bar{\bar{P}}l \rightarrow \bar{\bar{P}} = 28800 \text{ N.}$$



Pełne uplastycznienie przekroju w utwierdzeniu nie zamienia tej belki w mechanizm, powoduje jedynie wystąpienie w utwierdzeniu przegubu plastycznego czyniąc belkę statycznie wyznaczalną obciążoną siłami skupionymi i granicznym momentem plastycznym \overline{M} . Wykres momentów zginających w tym stanie mechanicznym belki pokazuje rysunek obok.



Belka stanie się kinematycznie zmienna gdy w wyniku dalszego zwiększenia sił obciążających pojawi się drugi przegub plastyczny i wystąpi on w przekroju C gdy zostanie on całkowicie uplastyczniony. Nośności graniczną tej belki wyznaczymy z zależności:

$$\overline{M} = 2P^*l - \frac{\overline{M}}{4} \rightarrow P^* = \frac{5\overline{M}}{8l} = 30375 \text{ N.}$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia nośności granicznej danej belki wykorzystując twierdzenia ekstremalne teorii plastyczności.

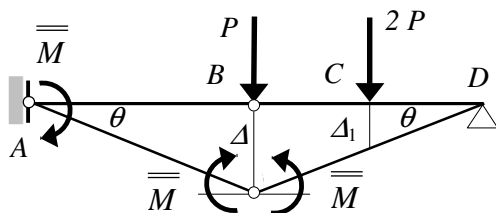
Wpierw wyznaczmy jej nośność graniczną metodą pól kinematycznie dopuszczalnych (podejście kinematyczne), a następnie metodą pól statycznie dopuszczalnych (podejście statyczne).

Metoda pól kinematycznie dopuszczalnych – podejście kinematyczne.

W tym podejściu rozważamy konstrukcję w stanie granicznym z odpowiednią liczbą przegubów plastycznych czyniącą ją geometrycznie zmienną. Następnie do takiej konstrukcji stosujemy zasadę prac wirtualnych mówiącą, że: suma prac wirtualnych sił zewnętrznych jest równa sumie prac wirtualnych sił wewnętrznych. Z równania prac wirtualnych wiążących zadane obciążenie zewnętrzne i graniczne momenty plastyczne w przegubach plastycznych jako siły wewnętrzne wyznaczamy nośność graniczną belki. Pewnym problemem tego podejścia jest konieczność określenia *a priori* położenia przegubów plastycznych. Dobrą wskazówką do określenia miejsca ich występowania jest wykres momentów zginających w stanie sprężystym, gdyż przeguby będą w miejscach ekstremalnych wartości lub załamania tych wykresów. Ale w ogólności, zwłaszcza w wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej i nieprostej w swej geometrii konstrukcji nie jest łatwo określić położenie przegubów odpowiadające rzeczywistemu stanowi granicznemu. Stąd konieczność rozważenia kilku schematów zniszczenia i wyznaczenia dla każdego odpowiadającej mu nośności granicznej. Najmniejszą z nich uznajemy za nośność graniczną i jak już wspomniano wyżej można dowiedzieć, że jest to górne oszacowanie rzeczywistej nośności granicznej konstrukcji. Kinematycznie dopuszczalne schematy zniszczenia.

Schemat pierwszy.

Zakładamy, że obciążenie spowoduje pełne uplastycznienie przekroju w utwierdzeniu i punkcie B (tzn. powstanie przegubów plastycznych), bo tam są lokalne ekstrema funkcji momentów w stanie sprężystym (załamania wykresu momentów). Z odpowiadającego przyjętemu schematowi zniszczenia planu przemieszczeń przygotowanych wynikają wyrażenia na pracę wirtualną sił zewnętrznych i wewnętrznych.



Praca wirtualna sił zewnętrznych:

$$L_z = 2P \Delta_1 + P \Delta.$$

Praca wirtualna sił wewnętrznych:

$$L_w = 3 \overline{M} \theta.$$

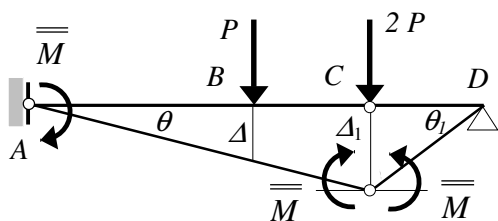
Ponieważ: $\Delta = 2l * \theta$, $\Delta_1 = l * \theta$,
to zasady prac wirtualnych

$$L_z = L_w \rightarrow 2P * l \theta + P * 2l \theta = 3 \overline{M} \theta$$

$$P_1 = 3 \overline{M} / 4l$$

Schemat drugi.

Tym razem zakładamy, że pełne uplastycznienie przekroju wystąpi w utwierdzeniu i punkcie C (tzn. powstanie przegubów plastycznych). Z odpowiadającego temu schematowi zniszczenia planu przemieszczeń przygotowanych wynikają wyrażenia na pracę wirtualną sił zewnętrznych i wewnętrznych.



$$L_z = P \Delta + 2P \Delta_1, \quad L_w = 2 \overline{M} \theta + \overline{M} \theta_1,$$

$$\Delta = 2l * \theta, \quad \Delta_1 = l * \theta_1, \quad 3l * \theta = l * \theta_1$$

$$L_z = L_w,$$

$$P * 2l \theta + 2P * l * 3\theta = 2 \overline{M} \theta + 3 \overline{M} \theta,$$

$$P_2 = 5 \overline{M} / 8l$$

Za nośność graniczną uznajemy mniejszą z tych dwóch sił,

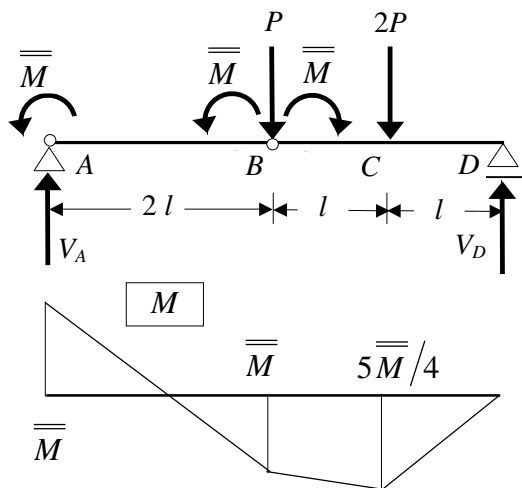
zatem $P^* = 5 \overline{M} / 8l = 30375 \text{ N}$, i jak wyżej zostało powiedziane rzeczywista nośność graniczna nie jest większa od tej wartości.

Metoda pól statycznie dopuszczalnych – podejście statyczne.

Potrzebujemy założyć (przyjąć) statycznie dopuszczalne schematy zniszczenia. Tak jak poprzednio pewnym problemem tego podejścia jest konieczność określenia *a priori* położenia przegubów plastycznych. I, jak poprzednio będziemy je zakładać w miejscach ekstremalnych wartości lub załamania wykresów momentów w stanie sprężystym. Dla każdego, założonego statycznie dopuszczalnego pola wyznaczmy odpowiadającą mu nośność graniczną. Największą z nich uznajemy za nośność graniczną i jak już wspomniano wyżej można dowiedzieć, że jest to dolne oszacowanie rzeczywistej nośności granicznej konstrukcji.

Schemat pierwszy.

Zakładamy, że obciążenie spowoduje pełne uplastycznienie przekroju w utwierdzeniu i punkcie B (tzn. powstanie przegubów plastycznych), bo tam są lokalne ekstrema funkcji momentów w stanie sprężystym (załamania wykresu momentów).



Należy teraz obliczyć wartości wszystkich sił działających na konstrukcję, które muszą spełniać warunki równowagi.

Z warunków równowagi otrzymujemy:

$$\sum M_B^L = 0 \rightarrow V_A * 2l - 2 * \bar{M} = 0 \rightarrow V_A = \bar{M}/l,$$

$$\sum M_B^P = 0 \rightarrow V_D * 2l - 2P * l - \bar{M} = 0 \rightarrow$$

$$V_D = P + \bar{M}/2l,$$

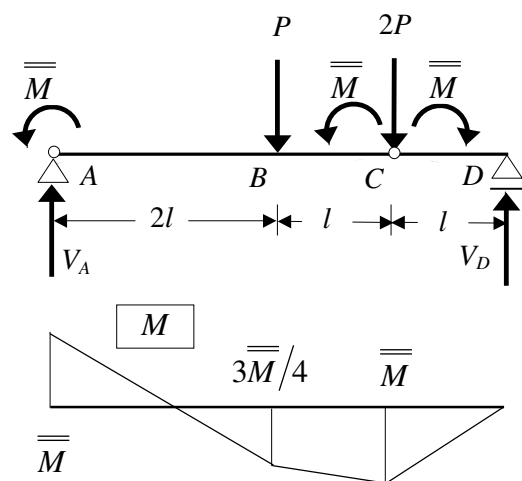
$$\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_D - 3 * P = 0 \rightarrow P_1 = 3\bar{M}/4l,$$

$$V_D = 5\bar{M}/4l.$$

Wykres momentów pokazuje, że założone pole nie jest statycznie dopuszczalne gdyż w punkcie C moment zginający $5\bar{M}/4 > \bar{M}$ i nie spełniony jest warunek plastyczności.

Schemat drugi.

Zakładamy, że obciążenie spowoduje pełne uplastycznienie przekroju w utwierdzeniu i punkcie C.



Warunki równowagi dają następujące wartości sił działających na konstrukcję przy tym założonym schemacie zniszczenia:

$$\sum M_C^L = 0 \rightarrow V_A * 3l - 2 * \bar{M} - l * P = 0 \rightarrow$$

$$V_A = (2\bar{M} + Pl)/3l,$$

$$\sum M_C^P = 0 \rightarrow V_D * l - \bar{M} = 0 \rightarrow V_D = \bar{M}/l,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_D - 3 * P = 0 \rightarrow P_2 = 5\bar{M}/8l$$

$$V_A = 7\bar{M}/8l.$$

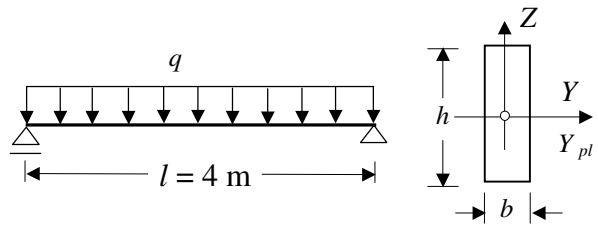
Odpowiadający będącym w równowadze siłom działającym na belkę wykres momentów pokazuje, że w konstrukcji spełniony jest warunek plastyczności. A więc założone pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne, i możemy przyjąć, że nośność graniczna rozważanej belki wynosi: $P^* = P_2 = 5\bar{M}/8l = 30375 \text{ N}$, i jak wyżej zostało powiedziane rzeczywista nośność graniczna nie jest mniejsza od tej wartości.

Ponieważ z podejścia kinematycznego otrzymaliśmy taki sam wynik więc

$P^* = 5\bar{M}/8l = 30375 \text{ N}$, jest rzeczywistą nośnością graniczną rozważanej konstrukcji.

19.2.1. Przykłady

Przykład 19.2.1.1. Dla podanej belki o przekroju prostokątnym $b \times h = 0.02 \times 0.06$ m wyznaczyć graniczne obciążenie sprężyste \bar{q} , graniczne obciążenie plastyczne $\overline{\overline{q}}$ oraz nośność graniczną q^* jeśli granica plastyczności $R_e = 300$ MPa.



Rozwiązanie

Maksymalny moment zginający w belce $\max M = \frac{q l^2}{8}$

Sprężysty wskaźnik wytrzymałości dla przekroju prostokątnego $W_{spr} = W_y = \frac{b h^2}{6}$

Plastyczny wskaźnik wytrzymałości dla przekroju prostokątnego $W_{pl} = 2 * b \frac{h h}{2 * 4} = \frac{b h^2}{4}$

Graniczny moment sprężysty $\bar{M} = W_{spr} R_e = \frac{2 * 6^2 * 10^{-6}}{6} * 300 * 10^6 = 3600$ Nm.

Graniczny moment plastyczny: $\overline{\overline{M}} = W_{pl} R_e = \frac{2 * 6^2 * 10^{-6}}{4} * 300 * 10^6 = 5400$ Nm.

Graniczne obciążenie sprężyste wyznaczmy z zależności:

$$\max M = \bar{M} \rightarrow \frac{\bar{q} l^2}{8} = \bar{M} \rightarrow \bar{q} = \frac{8 \bar{M}}{l^2} = \frac{8 * 3600}{4^2} = 1800 \text{ N/m.}$$

Graniczne obciążenie plastyczne wynosi:

$$\max M = \overline{\overline{M}} \rightarrow \frac{\overline{\overline{q}} l^2}{8} = \overline{\overline{M}} \rightarrow \overline{\overline{q}} = \frac{8 \overline{\overline{M}}}{l^2} = \frac{8 * 5400}{4^2} = 2700 \text{ N/m.}$$

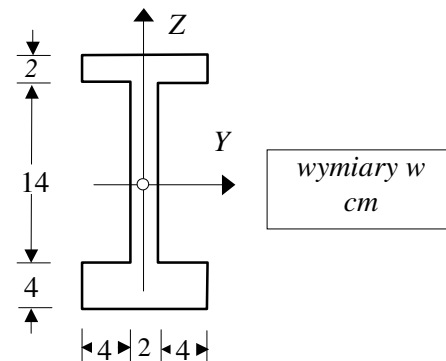
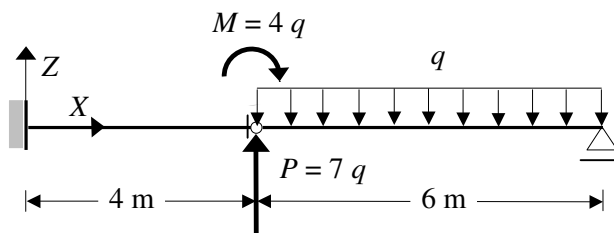
Belka jest statycznie wyznaczalna, obciążenie jej granicznym obciążeniem plastycznym spowoduje powstanie w jej środku rozpiętości dodatkowego przegubu zmieniając ją w mechanizm i dlatego graniczne obciążenie plastyczne jest równe nośności granicznej

$$q^* = \overline{\overline{q}} = 2700 \text{ N/m.}$$

W belce statycznie wyznaczalnej o przekroju prostokątnym $\frac{\overline{\overline{q}}}{\bar{q}} = \frac{q^*}{\bar{q}} = \frac{W_{pl}}{W_{spr}} = 1.5$ i to

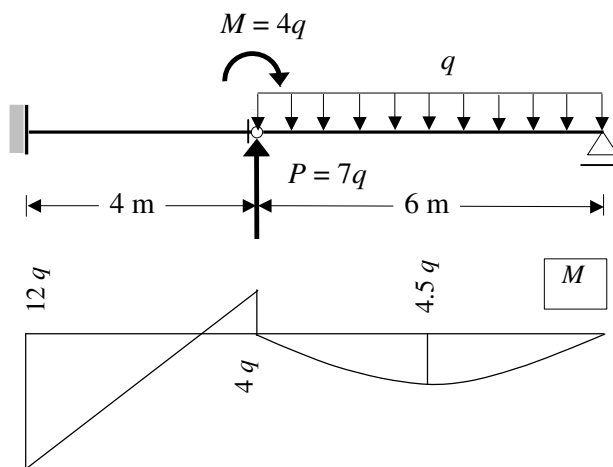
dowodzi, że obciążenie powodujące zniszczenie belki jest o 50 % większe od obciążenia które powoduje uplastycznienie włókien skrajnych w przekroju maksymalnego momentu zginającego. Łatwo można stwierdzić, że to zwiększenie nośności w przypadku belek statycznie wyznaczalnych zależeć będzie jedynie od stosunku wskaźników wytrzymałości plastycznego i sprężystego, czyli od kształtu przekroju. W przypadku belek statycznie niewyznaczalnych zwiększenie nośności belki zależeć jeszcze będzie od stopnia jej statycznej niewyznaczalności.

Przykład 19.2.1.2. Wyznaczyć graniczne obciążenie sprężyste, plastyczne i nośność belki, jeśli granica plastyczności $R_e = 345 \text{ MPa}$.



Rozwiązanie

Maksymalny moment zginający, jak pokazuje poniższy wykres występuje w utwierdzeniu i wynosi: $\max M = 12q$.

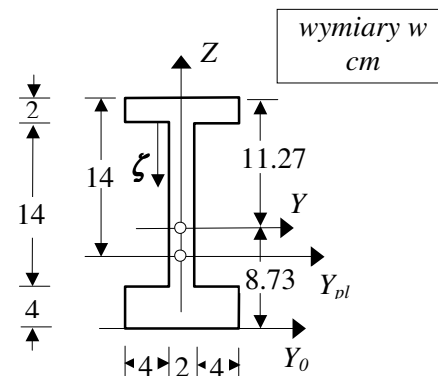


Oś obojętna zginania sprężystego to oś Y przechodząca przez środek ciężkości przekroju, równoległa do wektora momentu zginającego. Jej położenie wyznaczamy z warunku zerowania się momentu statycznego w sposób już wielokrotnie stosowany w zagadnieniach zginania.

$$A = 10 \cdot 2 + 2 \cdot 14 + 10 \cdot 4 = 88.0 \text{ cm}^2$$

$$S_{y_0} = 10 \cdot 2 \cdot 19 + 2 \cdot 14 \cdot 11 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 768.0 \text{ cm}^3$$

$$z_0 = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{768}{88} = 8.73 \text{ cm}.$$



$$J_y = \left(\frac{10 \cdot 18^3}{12} - \frac{8 \cdot 14^3}{12} \right) + 68 \cdot 2.27^2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 7.73^2 = 4582.78 \text{ cm}^4.$$

Wskaźnik wytrzymałości sprężystego zginania

$$W_{spr} = W_y = \frac{J_y}{\max |z|} = \frac{4582.78}{11.27} = 406.63 \text{ cm}^3.$$

Oś obojętną zginania plastycznego to oś równoległa do wektora momentu zginającego dzieląca przekrój poprzeczny na dwie części o równych polach.

Z kształtu przekroju widać, że będzie ona przechodzić przez środek i jeśli współrzędna ζ wyznacza jej położenie to musi spełniać warunek:

$$\frac{1}{2}88 = 10 * 2 + 2 * \zeta \rightarrow \zeta = 12.0 \text{ cm.}$$

Wskaźnik wytrzymałości plastycznego zginania:

$$W_{pl} = |S_{ypl1}| + |S_{ypl2}| = 10 * 2 * 13 + 2 * 12 * 6 + 2 * 2 * 1 + 10 * 4 * 4 = 568.0 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Graniczny moment sprężysty } \bar{M} = W_{spr} R_e = 406.63 * 10^{-6} * 345 * 10^6 = 140.29 \text{ kNm.}$$

$$\text{Graniczny moment plastyczny } \bar{\bar{M}} = W_{pl} R_e = 568 * 10^{-6} * 345 * 10^6 = 195.96 \text{ kNm.}$$

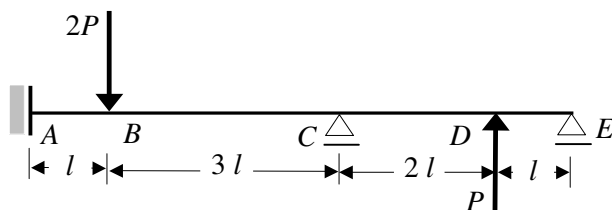
Graniczne obciążenie sprężyste wynosi:

$$\max M = \bar{M} \rightarrow 12\bar{q} = \bar{M} \rightarrow \bar{q} = \frac{\bar{M}}{12} = \frac{140.29}{12} = 11.69 \text{ kN/m.}$$

Graniczne obciążenie plastyczne i nośność graniczna ma wartość:

$$\max M = \bar{\bar{M}} \rightarrow 12\bar{\bar{q}} = \bar{\bar{M}} \rightarrow \bar{\bar{q}} = \frac{\bar{\bar{M}}}{12} = \frac{195.96}{12} = 16.33 \text{ kN/m.}$$

Przykład 19.2.1.3. Wyznaczyć nośność graniczną belki jak na rys. stosując podejście statyczne i kinematyczne.



Podejście statyczne.

Belka jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Trzy przeguby czynią ją kinematycznie zmienną. Zakładamy, że pełne uplastycznienie przekroju wystąpi w utwierdzeniu oraz punktach B i D.

	<p>Obliczamy wartości wszystkich sił działających na konstrukcję, które muszą spełniać warunki równowagi.</p> <p>Z warunków równowagi otrzymujemy wartości sił działających na belkę, które są w równowadze:</p> $\sum M_B^L = 0 \rightarrow V_A * l - 2\bar{\bar{M}} = 0 \rightarrow V_A = 2\bar{\bar{M}}/l,$ $\sum M_D^P = 0 \rightarrow V_D * l - \bar{\bar{M}} = 0 \rightarrow V_D = \bar{\bar{M}}/l,$ $\sum M_B^P = 0 \rightarrow V_D * 6l - V_C * 3l - P * 5l + \bar{\bar{M}} = 0 \rightarrow V_C = 7\bar{\bar{M}}/3l - 5P/3,$ $\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_C - P - V_D = 0 \rightarrow P = 5\bar{\bar{M}}/4l,$ $V_C = \bar{\bar{M}}/4l$
--	---

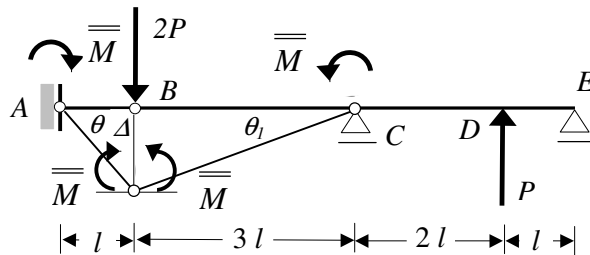
Nośność graniczna jest nie mniejsza niż:

$$P^* = \frac{5\bar{M}}{4l}.$$

Podejście kinematyczne.

Kinematycznie dopuszczalne schematy zniszczenia.

Schemat 1.



$$L_z = 2P\Delta, \quad L_w = 2\bar{M}\theta + 2\bar{M}\theta_1,$$

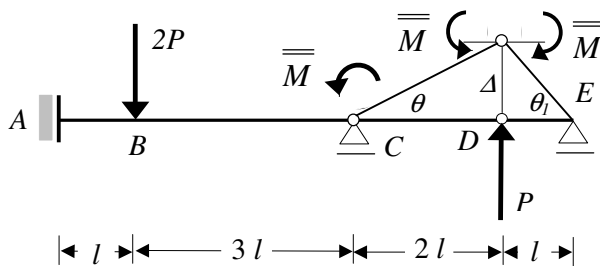
$$\Delta = \theta l, \quad \theta_1 l = \theta_1 * 3l$$

$$L_z = L_w$$

$$2P * \theta l = 2\bar{M}\theta + 2\bar{M}\theta/3$$

$$P_1 = 4\bar{M}/3l$$

Schemat 2.



$$L_z = P\Delta, \quad L_w = 2\bar{M}\theta + \bar{M}\theta_1,$$

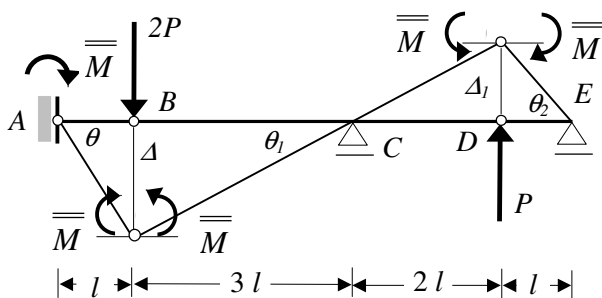
$$\Delta = \theta * 2l, \quad \theta_1 * 2l = \theta_1 * l$$

$$L_z = L_w$$

$$P * 2\theta l = 2\bar{M}\theta + \bar{M}\theta$$

$$P_2 = 2\bar{M}/l$$

Schemat 3.



$$L_z = 2P\Delta + P\Delta_1,$$

$$L_w = 2\bar{M}\theta + 2\bar{M}\theta_1 + \bar{M}\theta_2,$$

$$\Delta = \theta * l, \quad \Delta_1 = \theta_1 * 2l, \quad \theta * l = \theta_1 * 3l,$$

$$\theta_1 * 2l = \theta_2 * l$$

$$L_z = L_w$$

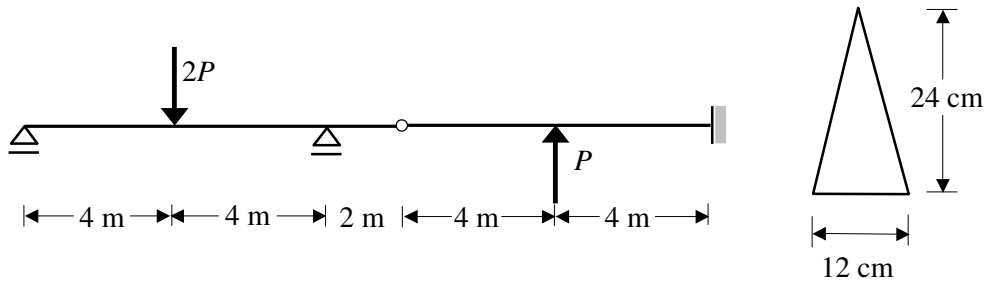
$$2P * \theta l + P * 2\theta l/3 =$$

$$= 2\bar{M}\theta + 2\bar{M}\theta/3 + 2\bar{M}\theta/3$$

$$P_3 = 5\bar{M}/4l$$

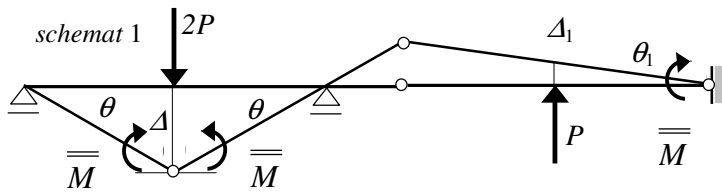
$P^* = \min(P_i) = P_3 = 5\bar{M}/4l$. I jest to rzeczywista nośność graniczna belki bo takim sam rezultat otrzymano z podejścia statycznego.

Przykład 19.2.1.4. Wyznaczyć nośność graniczną belki o podanej geometrii i obciążeniu stosując podejście kinematyczne jeśli $R_e = 215$ MPa.



Rozwiązanie

Kinematycznie dopuszczalne schematy zniszczenia:



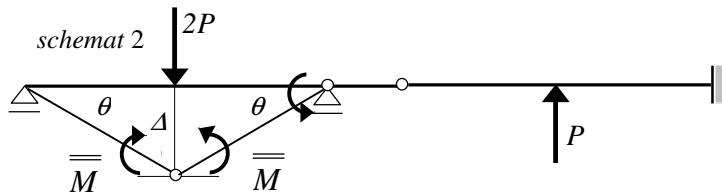
$$L_z = L_w$$

$$2P_1 \Delta + P_1 \Delta_1 = 2\bar{M} \theta + \bar{M} \theta_1$$

$$\Delta = 4\theta; \Delta_1 = 4\theta_1; \theta = 4\theta_1$$

$$9P_1 = 2.25\bar{M}$$

$$P_1 = 0.25\bar{M}$$



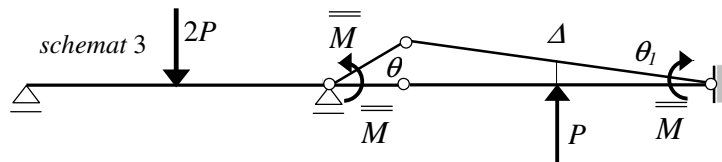
$$L_z = L_w$$

$$2P_2 \Delta = 3\bar{M} \theta$$

$$\Delta = 4\theta$$

$$8P_2 = 3\bar{M}$$

$$P_2 = 0.375\bar{M}$$



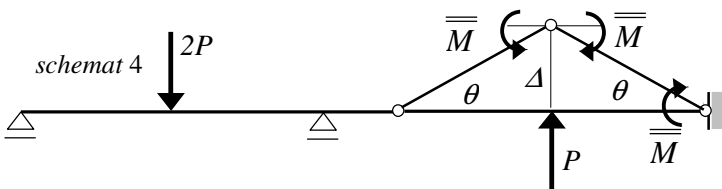
$$L_z = L_w$$

$$P_3 \Delta = \bar{M} \theta + \bar{M} \theta_1$$

$$\Delta = 4\theta_1; \theta = 4\theta_1$$

$$4P_3 = 5\bar{M}$$

$$P_3 = 1.25\bar{M}$$



$$L_z = L_w$$

$$P_4 \Delta = 3\bar{M} \theta$$

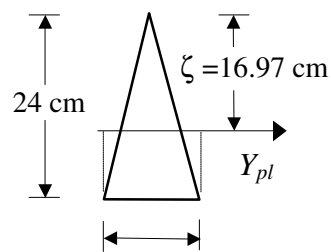
$$\Delta = 4\theta$$

$$P_4 = 0.75\bar{M}$$

$$P^* = \min(P_i) = P_1 = 0.25\bar{M}$$

Położenie osi plastycznego zginania

Jest to oś równoległa do wektora momentu zginającego dzieląca przekrój poprzeczny na dwie części o równych polach.



Zatem jej położenie można wyznaczyć z zależności:

$$\frac{1}{2} * 12 * 24 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} * \zeta * \frac{1}{2} * \zeta \rightarrow \zeta = 16.97 \text{ cm.}$$

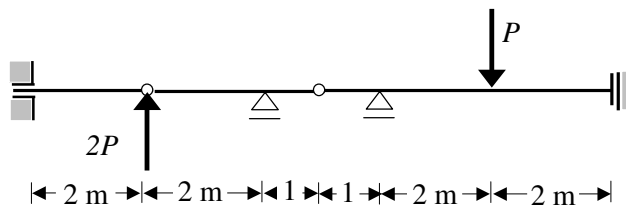
Wskaźnik plastycznego zginania:

$$W_{pl} = \frac{1}{2} * \frac{16.97^2}{2} * \frac{1}{3} * 16.97 + \left(12 * \frac{7.03^2}{2} - \frac{1}{2} * 3.515 * \frac{7.03^2}{3} \right) = 674.83 \text{ cm}^3.$$

Nośność graniczna belki jest równa:

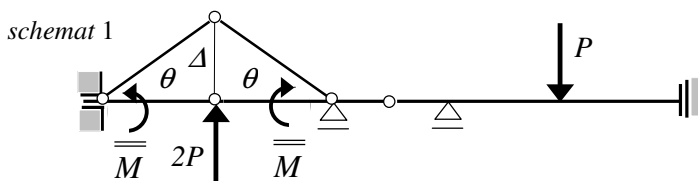
$$P^* = 0.25 * W_{pl} * R_e = 0.25 * 674.83 * 10^{-6} * 215 * 10^6 = 36272.11 \text{ N.}$$

Przykład 19.2.1.5. Wyznaczyć nośność graniczną belki stosując podejście kinematyczne.



Rozwiązanie

Kinematycznie dopuszczalne schematy zniszczenia:

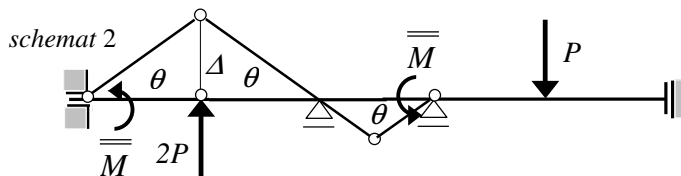


$$L_z = 2P \Delta; \quad L_w = 2\bar{M} \theta$$

$$2P \Delta = 2\bar{M} \theta$$

$$\Delta = 2\theta$$

$$P_1 = 0.5\bar{M}$$

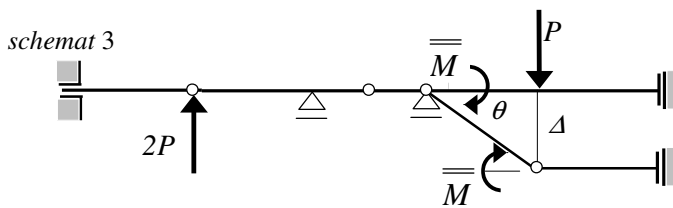


$$L_z = 2P \Delta; \quad L_w = 2\bar{M} \theta$$

$$2P \Delta = 2\bar{M} \theta$$

$$\Delta = 2\theta$$

$$P_2 = 0.5\bar{M}$$

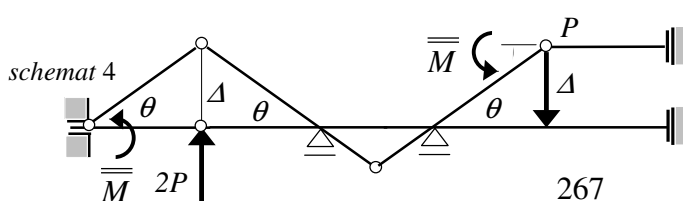


$$L_z = P \Delta; \quad L_w = 2\bar{M} \theta$$

$$P \Delta = 2\bar{M} \theta$$

$$\Delta = 2\theta$$

$$P_3 = \bar{M}$$



$$L_z = 2P \Delta - P \Delta; \quad L_w = 2\bar{M} \theta$$

$$2P \Delta - P \Delta = 2\bar{M} \theta$$

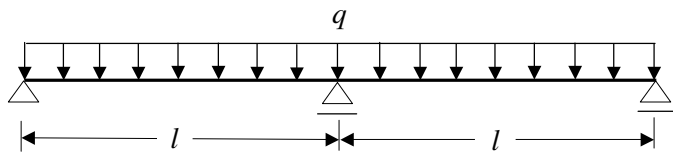
$$\Delta = 2\theta$$

$$P_4 = \bar{M}$$

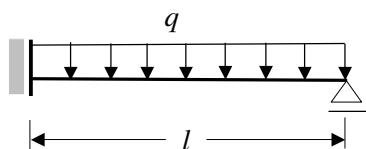
Nośność graniczna belki wynosi:

$$P^* = \min(P_i) = 0.5 \bar{M}$$

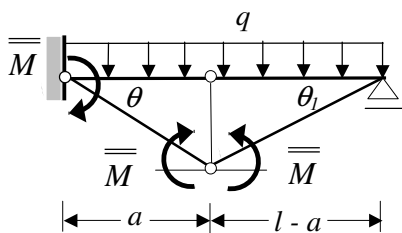
Przykład 19.2.1.6. Wyznaczyć nośność graniczną belki jak na rys. stosując podejście kinematyczne.



Symetria konstrukcji pozwala na analizowanie równowaznej belki jednoprzęsłowej, utwierdzonej na jednym końcu a na drugim wolnopodpartej.



Jedyny kinematycznie dopuszczalny schemat zniszczenia będzie miał dwa przeguby, jeden w utwierdzeniu a drugi w prześle przy czym jego położenie nie jest znane, ale możemy je wyznaczyć z zasady prac wirtualnych.



$$L_w = 2\bar{M}\theta + \bar{M}\theta_1, \quad L_z = \int_0^a q\theta x dx + \int_0^{l-a} q\theta_1 x_1 dx_1,$$

$$\theta^* a = \theta_1^* (l - a),$$

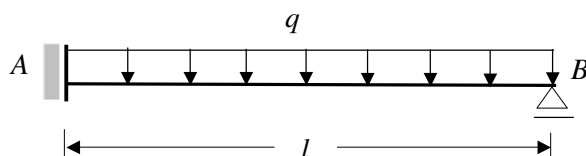
$$L_z = L_w \rightarrow q = \frac{2\bar{M}}{al} \frac{2l - a}{l - a}.$$

Ponieważ podejście kinematyczne daje oszacowanie od góry, poszukujemy najmniejszego obciążenia q . Warunek konieczny jego istnienia daje równanie:

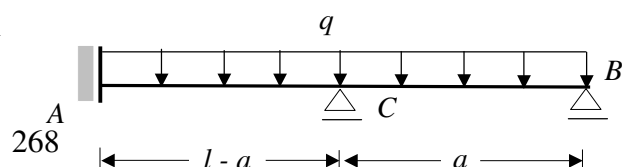
$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0 \rightarrow a^2 - 4la + 2l^2 = 0 \rightarrow a = l(2 - \sqrt{2}) = 0.586l.$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy nośność graniczną belki $q^* = 11.657 \bar{M}/l^2$.

Przykład 19.2.1.7. Belkę o schemacie jak na rys. należy podeprzeć dodatkowo w prześle w miejscu zapewniającym jej największą nośność graniczną.

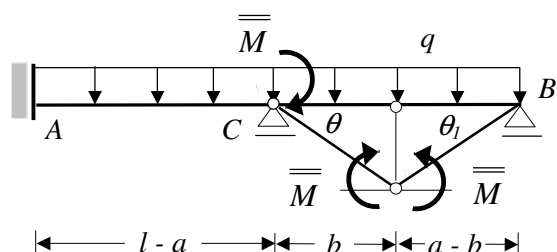


Wprowadzenie dodatkowej podpory C czyni



belkę dwukrotnie statycznie niewyznaczalną. Kształt wykresu momentów zginających w stanie sprężystym sugeruje dwa kinematycznie dopuszczalne schematy zniszczenia.

Schemat 1.

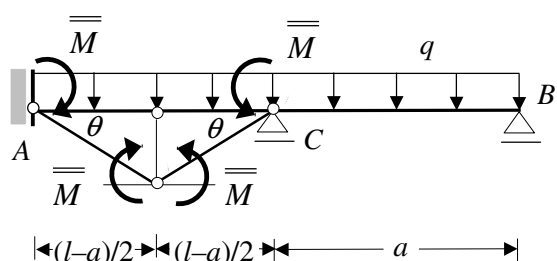


Nośność graniczna dla tego schematu zniszczenia została wyznaczona w poprzednim przykładzie.

Wynosi ona :

$$q_1 = 11.657 \frac{\overline{M}}{a^2}$$

Schemat 2.



W tym schemacie zniszczenia przegub plastyczny w przęśle AC wystąpi w środku tego przęsła. Zatem:

$$L_w = 4\overline{M}\theta, \quad L_z = 2 \int_0^{(l-a)/2} q\theta x dx,$$

$$L_z = L_w \rightarrow q_2 = \frac{16\overline{M}}{(l-a)^2}.$$

Widoczne jest że zwiększanie a powoduje zmniejszanie q_1 i zwiększanie q_2 . Przy ustalonej długości belki jej nośność graniczną wyznaczmy z warunku równości:

$$q_1 = q_2 \rightarrow 11.657 \frac{\overline{M}}{a^2} = 16.00 \frac{\overline{M}}{(l-a)^2} \rightarrow 4.343a^2 + 23.314al - 11.657l^2 = 0 \rightarrow$$

$$a = 0.4605l.$$

Odpowiadająca temu położeniu dodatkowej podpory nośność graniczna belki wynosi:

$$q^* = 11.657 \frac{\overline{M}}{(0.4605l)^2} = 54.970 \frac{\overline{M}}{l^2}$$

19.3. Nośność graniczna osiowo rozciąganych układów prętowych

Rozważać będziemy konstrukcje wykonane z prętów prostych przegubowo połączonych i obciążonych tylko w węzłach w sposób powodujący ich osiowe rozciąganie. Pręty wykonane są z materiału o własnościach ciała idealnie sprężysto plastycznego (rys. 19.2).

Ponieważ rozkład naprężeń normalnych w dowolnym przekroju poprzecznym na długości pręta rozciąganego siłą P jest jednorodny to w przekroju i tym samym w pręcie mogą wystąpić tylko dwa stany mechaniczne w zależności od wielkości przyłożonej siły a mianowicie stan sprężysty, gdy naprężenia są w nim mniejsze od R_e i stan pełnego uplastycznienia, gdy równają się R_e . Co więcej jeśli naprężenia osiągną wartość granicy

plastyczności to pręt może się wydłużyć dowolnie dużo i dlatego graniczne obciążenie sprężyste, plastyczne i nośność graniczna są w nim takie same i wynoszą:

$$\bar{P} = \bar{P} = P^* = R_e A . \quad (19.5)$$

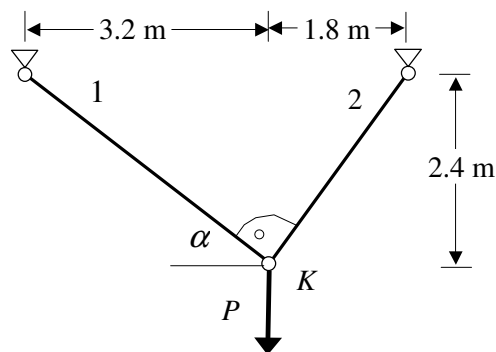
Analogicznie jest w dowolnej statycznie wyznaczalnej konstrukcji kratowej z tym że o jej nośności granicznej decyduje nośność pręta w którym występują największe naprężenia normalne w stanie sprężystym.

W kratownicach statycznie niewyznaczalnych sytuacja jest bardziej złożona gdyż w zależności od wielkości obciążenia wszystkie pręty mogą być w stanie sprężystym albo niektóre w stanie sprężystym inne zaś uplastycznione, albo wreszcie liczba uplastycznionych prętów jest taka że konstrukcja staje się geometrycznie zmienna i nie może przenosić zadanego obciążenia. Dlatego w konstrukcjach złożonych z osiowo rozciąganych prętów wykonanych z materiału idealnie sprężysto-plastycznego można przyjąć określenia:

- graniczne obciążenie sprężyste (nośność sprężysta) – to największa wartość obciążenia przy której we wszystkich prętach konstrukcji występuje stan sprężysty
- nośność graniczna – to taka wielkość obciążenia przy którym konstrukcja traci zdolność do jego przenoszenia.

19.3.1. Przykłady

Przykład 19.3.1.1. Wyznaczyć nośność graniczną danego układu kratowego jeśli przekroje wszystkich prętów są jednakowe o polu $A = 2.0 \text{ cm}^2$ a granica plastyczności $R_e = 225 \text{ MPa}$.



$$l_1 = 4.0 \text{ m}$$

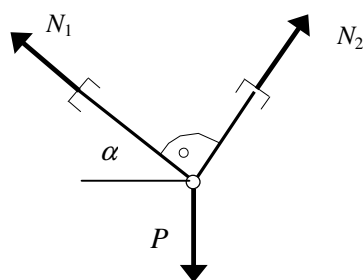
$$l_2 = 3.0 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = 0.6$$

$$\cos \alpha = 0.8$$

Rozwiązanie

Obliczenie sił w prętach układu.



Równania równowagi:

$$\Sigma X = 0$$

$$-N_1 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$N_1 \sin \alpha + N_2 \cos \alpha = P$$

Siły w prętach wynoszą:

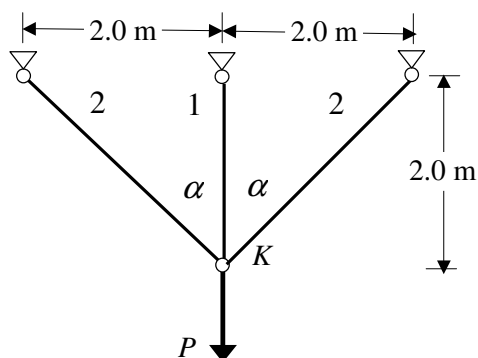
$$N_1 = 0.6P, \quad N_2 = 0.8P.$$

Ponieważ pola przekrojów obu prętów są równe więc o nośności układu decyduje pręt 2. Przy wzrastaniu wartości obciążenia on pierwszy ulegnie uplastycznieniu i ponieważ krata jest statycznie wyznaczalna ulegnie zniszczeniu.

Nośność graniczna konstrukcji wynosi:

$$0.8P^* = R_e A \rightarrow P^* = \frac{225 * 10^6 * 2 * 10^{-4}}{0.8} = 56250 \text{ N.}$$

Przykład 19.3.1.2. Dla stalowej konstrukcji przegubowo prętowej jak na rysunku.

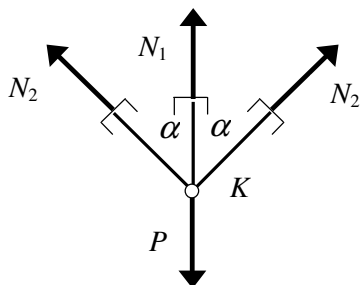


w której pola przekrojów wszystkich prętów i ich moduły sprężystości podłużnej są równe wyznaczyć potrzebne pole przekrojów poprzecznych prętów oraz nośności graniczną jeśli $P = 30 \text{ kN}$, $R = 215 \text{ MPa}$, $R_e = 235 \text{ MPa}$, $E = 205 \text{ GPa}$.

Wyznaczyć wykres określający jak wzrasta pionowe przemieszczenie węzła K w zależności od wielkości siły P .

Rozwiązanie

Obliczenie sił podłużnych w prętach.



Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, więc komplet równań do ich wyznaczenia będzie się składał z równania równowagi i równania geometrycznego.

Równanie równowagi:

$$\sum Y = 0 \rightarrow N_1 + 2 N_2 \cos \alpha = P \rightarrow N_1 + \sqrt{2} N_2 =$$

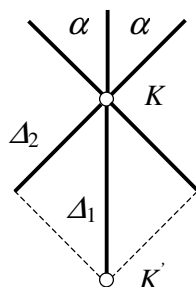
Równanie geometryczne:

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha \rightarrow \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \sqrt{2} \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \rightarrow N_1 = 2 N_2.$$

Stąd siły podłużne w prętach:

$$N_1 = 2 P / (2 + \sqrt{2}) = 17.574 \text{ kN,}$$

$$N_2 = P / (2 + \sqrt{2}) = 8.787 \text{ kN.}$$



Potrzebny przekrój prętów z warunku wytrzymałości:

$$\max(N/A) \leq R \rightarrow N_1/A \leq R \rightarrow A \geq N_1/R = 17.574 * 10^3 / 215 * 10^6 = 0.817 * 10^{-4} \text{ m}^2.$$

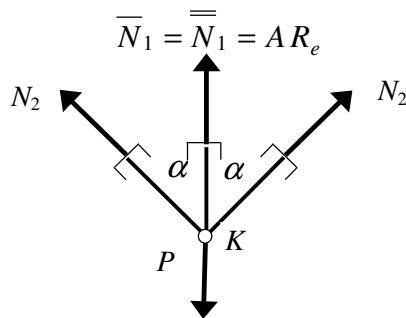
Nośność graniczną układu wyznaczmy zwiększając obciążenie i przechodząc kolejno jego stany od sprężystego poprzez sprężysto-plastyczny aż do stanu granicznej nośności, w którym konstrukcja nie może przenieść zadanego obciążenia, przemieszczenia jej punktów są dowolnie duże (staje się kinematycznie zmienna).

Siła obciążająca powodująca pierwsze uplastycznienie w konstrukcji, które wystąpi w pręcie 1 bo w nim w stanie sprężystym jest największa siła podłużna, ma wartość:

$$N_1 = \bar{N}_1 = \overline{\bar{N}}_1 = \frac{2\bar{P}}{(2 + \sqrt{2})} = A R_e \rightarrow$$

$$\bar{P} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} A R_e = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} 0.817 * 235 * 10^2 = 32.776 * 10^3 \text{ N.}$$

Przy tej sile konstrukcja może jeszcze przenosić obciążenie bo naprężenia w prętach 2 są nadal mniejsze od granicy plastyczności R_e .



Siły które wówczas występują w prętach 2 możemy wyznaczyć z warunku równowagi sił działających na węzeł K:

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \bar{N}_1 + 2 N_2 \cos \alpha = P \rightarrow$$

$$\overline{\bar{N}}_1 + \sqrt{2} N_2 = P \rightarrow N_2 = \frac{P - \overline{\bar{N}}_1}{\sqrt{2}}$$

Konstrukcja stanie się kinematycznie zmienna gdy nastąpi uplastycznienie prętów 2 tzn.

gdy: $N_2 = \bar{N}_2 = \overline{\bar{N}}_2 = A R_e$. Odpowiadające tej wartości siły obciążenie P będzie nośnością graniczną i oznaczymy je przez P^* . Wyznamy je z zależności:

$$N_2 = \bar{N}_2 = \overline{\bar{N}}_2 = \frac{P^* - \overline{\bar{N}}_1}{\sqrt{2}} = A R_e \rightarrow P^* = \sqrt{2} A R_e + \overline{\bar{N}}_1 = (1 + \sqrt{2}) A R_e = 46.352 * 10^3 \text{ N.}$$

Iloraz

$$\frac{P^*}{P} = \frac{46.352}{30.000} = 1.545$$

pokazuje wielkość rezerwy (54.5 %), która tkwi w analizowanej konstrukcji jeśli dopuścimy pełne jej uplastycznienie. Ale zwiększenie obciążeń jest związane ze zwiększeniem przemieszczeń i pokazuje to wykres zależności Δ - pionowego przemieszczenia węzła K od wielkości siły obciążającej P .

$P = 30.000 \text{ kN}$ - stan sprężysty

$$\Delta = \sqrt{2} * \Delta_2 = \sqrt{2} \frac{N_2 l_2}{EA}; N_2 = \frac{P}{(2 + \sqrt{2})} \rightarrow$$

$$\Delta = \sqrt{2} \frac{30.000 * 10^3 * 2\sqrt{2}}{(2 + \sqrt{2}) * 205 * 0.817 * 10^5} = 2.098 * 10^{-3} \text{ m.}$$

$P = \bar{P} = 32.776 \text{ kN}$ - uplastycznienie pręta 1

$$\Delta = \sqrt{2} * \Delta_2 = \sqrt{2} \frac{N_2 l_2}{EA}; N_2 = \frac{P}{2 + \sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\Delta = \sqrt{2} \frac{32.776 * 10^3 * 2\sqrt{2}}{(2 + \sqrt{2}) * 205 * 0.817 * 10^5} = 2.293 * 10^{-3} \text{ m.}$$

$P = P^* = 46.352 \text{ kN}$ - stan graniczny nośności (uplastycznienie wszystkich prętów)

$$\Delta = \sqrt{2} * \Delta_2 = \sqrt{2} \frac{N_2 l_2}{EA}; \quad N_2 = \bar{N}_2 = A R_e \quad \rightarrow$$

$$\Delta = \sqrt{2} \frac{0.817 * 235 * 10^2 * 2\sqrt{2}}{205 * 0.817 * 10^5} = 4.585 * 10^{-3} \text{ m.}$$

