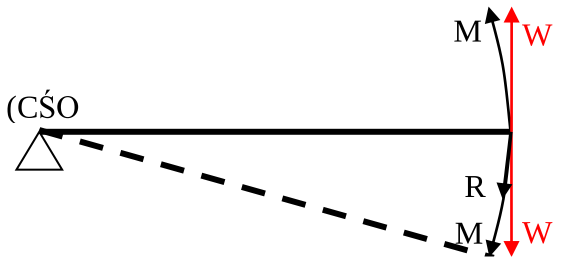
2. Geometryczna niezmienność (sztywność) układu

Wstęp - kinematyka

Definicje

stopnie swobody – liczba niezależnych parametrów opisujących ruch układu
mechanizm – układ z co najmniej jednym stopniem swobody
pręt – element którego długość jest znacznie większa od dwóch pozostałych wymiarów
tarcza – układ elementów połączonych sztywno (ruch elementów względem siebie jest wykluczony); z kinematycznego punktu widzenia, tarcza może być rozważana jako pręt i na odwrót
przegub – połączenie to może być zamienione połączeniem dwoma prętami przegubowymi[1], nierównoległymi (i na odwrót, połączenie dwoma prętami można zastąpić przegubem)
geometryczna niezmienność – sztywność układu jako całości, wraz z podparciem (odebrane wszystkie stopnie swobody)
Aby wykazać geometryczną niezmienność układu, należy wykazać, że wszystkie punkty układu są unieruchomione.
geometryczna niezmienność wewnętrzna – sztywność układu rozpatrywanego w oderwaniu od podparcia; układ wewnętrznie geometrycznie niezmienny jest równoważny kinematycznie sztywnej tarczy
prędkość wirtualna – prędkość niesprzeczna z narzuconymi więzami, teoretycznie możliwa
chwilowy środek obrotu (CŚO) – środek obrotu wynikający z prędkości wirtualnych
przemieszczenie wirtualne – przemieszczenie spójne z prędkością wirtualną (taki sam kierunek i zwrot); na rysunku 2.1 przedstawiono przemieszczenia rzeczywiste (obliczone bądź pomierzone), możliwe (w sensie: mogące zaistnieć z uwagi na istniejące więzy), i przemieszczenia wirtualne, teoretycznie możliwe (zaznaczone na czerwono); jak widać, kierunek przemieszczeń wirtualnych jest jedynie styczny do rzeczywistych[2]

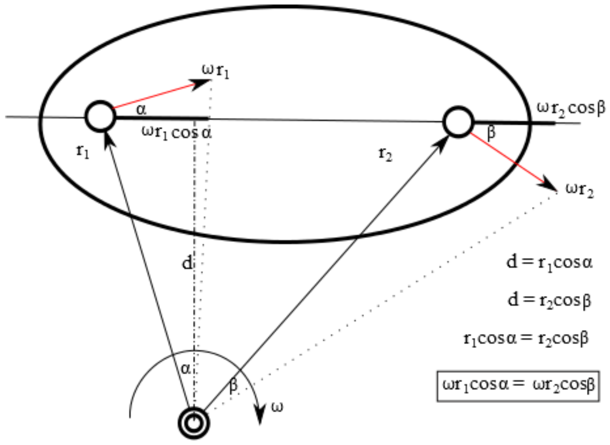


Rys. 2.1 Przemieszczenia rzeczywiste, możliwe i wirtualne

Twierdzenia

Tarcza ma jeden CŚO.
Jeśli dwa punkty tarczy są unieruchomione to cała tarcza jest unieruchomiona.
Rzuty prędkości wirtualnych dwóch punktów tarczy na kierunek odcinka łączącego te punkty są sobie równe, por. rys. 2.2.

[1] z przegubem na każdym z końców
[2] i, co może zaskakujące, przemieszczenia wirtualne wcale nie muszą być nieskończenie małe (infinitezymalne)



Rys. 2.2 Równość rzutów prędkości wirtualnych 2 punktów tarczy

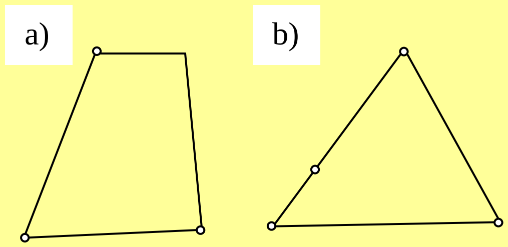
(Twierdzenie o dwóch tarczach, 2T)

Geometrycznie niezmienne połączenie dwóch tarcz zapewnia połączenie trzema prętami, których kierunki nie przecinają się w jednym punkcie (także w tzw. punkcie niewłaściwym, t.j. w nieskończoności[3])
Zamiast trzech prętów, połączenie może być zrealizowane przez przegub i jeden pręt.

(Twierdzenie o trzech tarczach, 3T)

Geometrycznie niezmienne połączenie trzech tarcz stanowi połączenie każdej pary tarcz przegubem, przy czym przeguby te muszą być nie współliniowe.
Oznacza to, że połączenie „w trójkąt" jest geometrycznie niezmienne.

Uwaga! W rzeczywistości chodzi o połączenie trzech elementów a nie o kształt układu (patrz rys. 2.3).



Rys. 2.3 a) połączenie trzech elementów w kształcie czworokąta jest geometrycznie niezmienne,
b) połączenie czterech elementów tworzących kształt trójkąta nie jest geometrycznie niezmienne

Niestety, w języku polskim nie ma słowa „trójbok", które byłoby odpowiednie.

(Twierdzenie o prędkościach wirtualnych, PW)

Układ jest geometrycznie niezmienny wtedy i tylko wtedy gdy nie istnieje spójny plan prędkości wirtualnych.
Twierdzenie przeciwne jest też prawdziwe.

Metody określania geometrycznej niezmienności

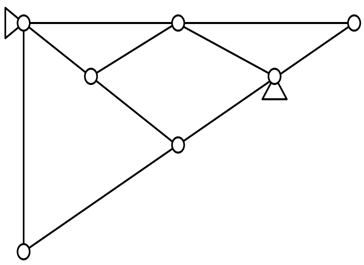
Zastosowanie twierdzeń o tarczach jest proste ale nie zawsze efektywne. Twierdzenie o prędkościach wirtualnych jest zawsze skuteczne, ale najczęściej dość uciążliwe w zastosowaniu.
Zwykle postępujemy dwuetapowo: najpierw określamy geometryczną niezmienność wewnętrzną a potem – zewnętrzną. Każdy z tych dwóch kroków analizy jest ważny i pomocny w dalszych działaniach. Analiza geometrycznej niezmienności wewnętrznej sugeruje sposób obliczania reakcji. Niezmienność wewnętrzna oznacza, że reakcje mogą być obliczone bezpośrednio z równań równowagi. Zmienność wewnętrzna

[3] inaczej mówiąc pręty nie mogą być równoległe

informuje, że obliczenie reakcji wymaga dodatkowych równań: równania przegubu, równań wynikających z dodatkowych przecięć układu i w krańcowych przypadkach obliczenie reakcji może być bardzo trudne.
Geometryczna niezmienność zewnętrzna układu jest niezbędna do obliczeń statycznych. Mechanizmy (układy ze stopniami swobody) muszą być analizowane dynamicznie z użyciem sił bezwładności[4].
Jeżeli wykazano, że układ lub jego część są niezmienne, można je w konsekwencji traktować jako sztywne tarcze
.

Przykład

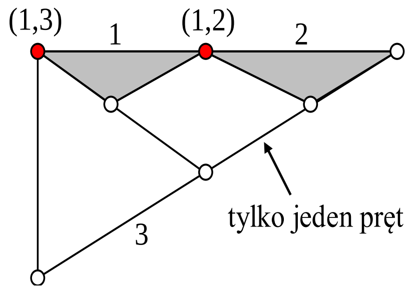
Określić geometryczną niezmienność układu z rys. poniżej:



Rys. 2.4 Rozważany układ

Zastosowanie twierdzenia 3T

1. Zaczynamy od geometrycznej niezmienności wewnętrznej

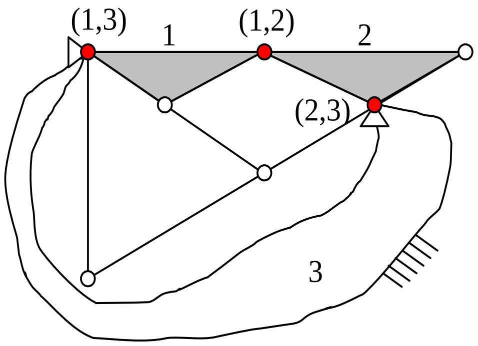


Rys. 2.5 Niezmienność wewnętrzna

Spostrzegamy dwa układy połączenia “w trójkąt, układy te stanowią dwie sztywne tarcze, co wynika wprost z twierdzenia 3T. Mamy teraz tarcze *1*, *2* oraz *3*. Z ponownego użycia twierdzenia 3T wynika, że tarcze *1-3* oraz *1-2* są prawidłowo połączone dwoma prętami (o kierunkach przecinających się w punktach zaznaczonych na czerwono), ale tarcze *2-3* są połączone jednym prętem (brak drugiego). Układ jest wewnętrznie zmienny.

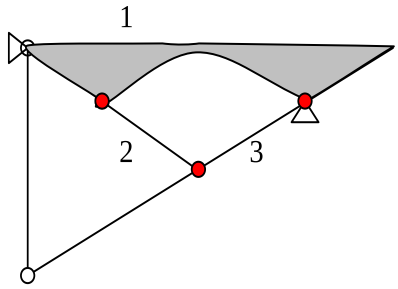
2. Określamy niezmienność zewnętrzną

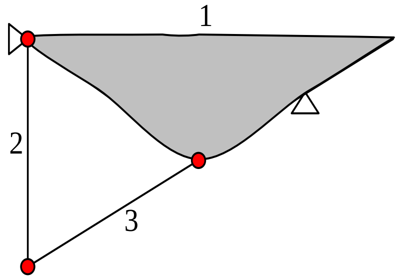
[4] zwanymi także siłami d’Alemberta



Rys. 2.6 Niezmienność zewnętrzna

Do tarcz *1* oraz *2* dołączamy trzecią tarczę – ostoję[5]. Zastosowanie twierdzenia 3T (trzy przeguby łączące, niewspółliniowe, zaznaczone na rys. 2.6 na czerwono) orzeka o unieruchomieniu tych tarcz. W efekcie w następnym kroku mamy układ jak na rys. 2.7 z lewej. Nowe trzy tarcze są prawidłowo unieruchomione (tw. 3T, przeguby niewspółliniowe na czerwono), więc dalej mamy nowe 3 tarcze, rys. z prawej. Trzy ostatnie tarcze są unieruchomione wzajemnie (przeguby niewspółliniowe na czerwono),więc całość jest unieruchomiona.





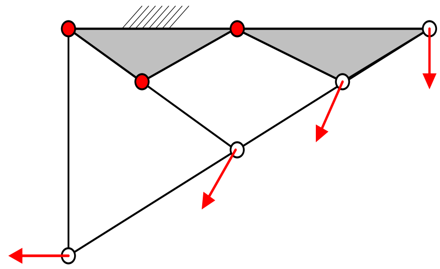
Rys. 2.7 Niezmienność zewnętrzna – c.d.

W ten sposób, krok po kroku, wykazujemy unieruchomienie całego układu.
Ostatecznie stwierdzamy, że układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie niezmienny, a więc może być analizowany statycznie.

Rozwiązanie metodą prędkości wirtualnych

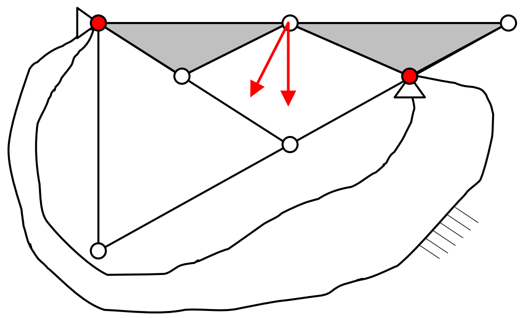
Określenia wewnętrznej zmienności dokonujemy unieruchamiając jedną z tarcz, rys. 2.8. Przeguby zaznaczone na czerwono, jako że należą do unieruchomionej tarczy, są chwilowymi środkami obrotu trzech kolejnych tarcz. Prędkości wirtualne tych tarcz, zaznaczone na czerwono, nie są ze sobą sprzeczne, jedynie ich rzuty na odcinek łączący początki wektorów powinny być sobie równe, co oznacza, że pomiędzy prędkościami istnieją pewne proporcje. Nie ma jednak sprzeczności i ruch jest możliwy, a więc układ jest wewnętrznie zmienny.

[5] element z definicji unieruchomiony



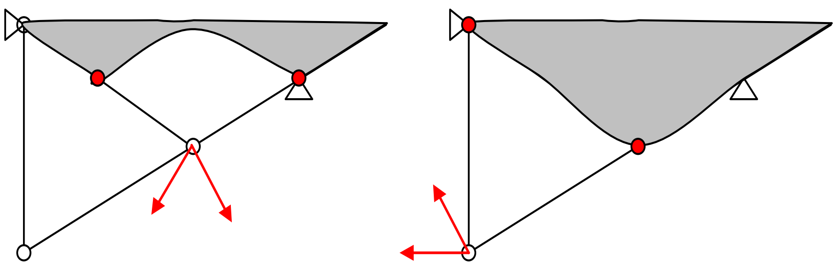
Rys. 2.8. Analiza wewnętrznej niezmienności metodą PW

Rozpatrując geometryczną niezmienność zewnętrzną, dla całego układu wraz z podporami, unieruchamiamy myślowo jedną z tarcz (na rys. 2.8 jest to ostoja). Przeguby, zaznaczone na czerwono, są CŚO tarcz zaznaczonych na szaro. W punkcie łączącym te tarcze istnieją więc dwie różne prędkości, co jest niemożliwe, a więc sprzeczne. Z twierdzenia wynika, że punkt ten jest unieruchomiony[6]. Tak więc i tarcze są unieruchomione w całości, bo każda ma 2 punkty unieruchomione, rys. 2.9.



Rys. 2.9 Sprzeczny układ prędkości w punkcie

Powtarzając kilkukrotnie to rozumowanie, rys. 2.10, stwierdzamy unieruchomienie całości.



Rys. 2.10 Sprzeczności w kolejnych punktach

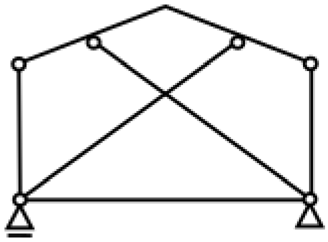
Wniosek jest taki sam jak poprzednio: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie niezmienny.

Ćwiczenia

Problem 1

Dla układu z rys. 2.11 określić niezmienność wewnętrzną i zewnętrzną korzystając kolejno z każdej z trzech poznanych metod (2T, 3T, PW).

[6] bo sprzeczność zniknie gdy prędkości będą zerowe

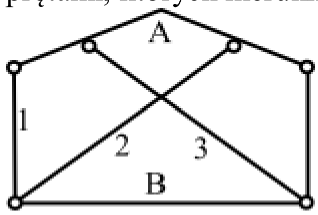


Rys. 2.11 Problem 1

Rozwiązanie – metoda 2T

niezmienność wewnętrzna

tarcza A połączona jest z tarczą B trzema prętami, których kierunki nie przecinają się w jednym punkcie



Rys. 2.12

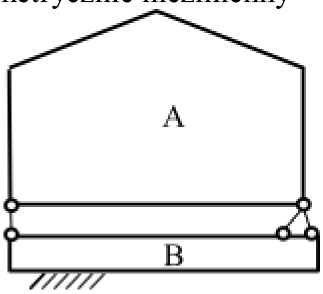
oznacza to, że układ jest wewnętrznie geometrycznie niezmienny.

niezmienność zewnętrzna

podporę przegubową zastępujemy dwoma prętami a przesuwną jednym prętem – jest to typowy sposób stosowany w tego typu (prostym) podparciu

tarcza A z tarczą B (która jest ostoją) są połączone trzema prętami których kierunki nie przecinają się w jednym punkcie

oznacza to ze układ jest zewnętrznie geometrycznie niezmienny

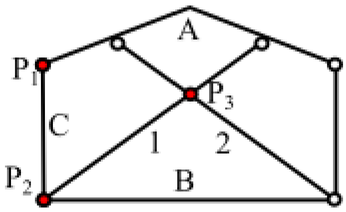


Rys. 2.13

Rozwiązanie – metoda 3T

niezmienność wewnętrzna

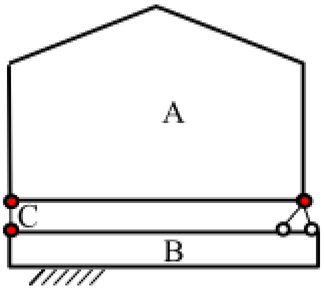
tarcze A, B i C , rys. 2.14, są połączone parami (co najmniej) dwoma prętami (lub – alternatywnie – przegubem), których kierunki przecinają się w punktach P_1, P_2 i P_3 niewspółliniowych – układ jest niezmienny wewnętrznie



Rys. 2.14

niezmienność zewnętrzna

tarcze A, B i C, rys. 2.15, są połączone przegubami oraz parą prętów, których kierunki przecinają się w punkcie niewspółliniowym do przegubów – układ niezmienny zewnętrznie



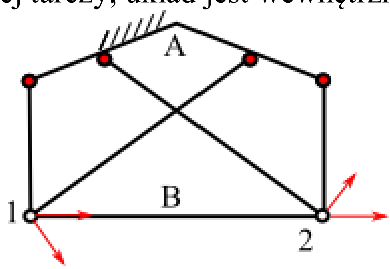
Rys. 2.15

wniosek końcowy: układ jest niezmienny zarówno wewnętrznie jak i zewnętrznie

Rozwiązanie – metoda PW

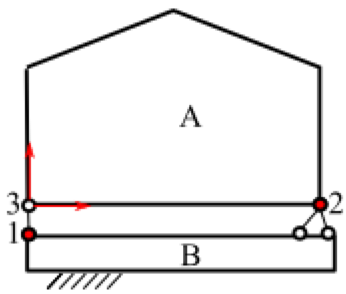
niezmienność wewnętrzna

odrzucamy podparcia i unieruchamiamy tarczę A traktując ją jako ostoję; przeguby zaznaczone na czerwono są chwilowymi środkami obrotów prętów łączących tarczę A z tarczą B; w punktach 1 i 2 otrzymujemy sprzeczne kierunki prędkości chwilowych, co oznacza, że punkty te są – w stosunku do tarczy A – unieruchomione; punkty te są zarazem punktami tarczy B więc unieruchomienie jej dwóch punktów oznacza unieruchomienie całej tarczy; układ jest wewnętrznie niezmienny



Rys. 2.16

niezmienność zewnętrzna



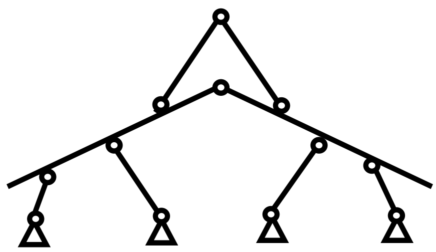
Rys.2.17

unieruchomiona ostoja B oznacza chwilowe środki obrotu w punktach 1 i 2, co daje sprzeczne prędkości chwilowe w punkcie 3, który – wobec tego – musi być nieruchomy; nieruchome punkty 1 i 2 oznaczają unieruchomienie całej tarczy A; układ jest zewnętrznie niezmienny

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

Problem 2

Dla układu z rys. 2.18 określić niezmienność wewnętrzną i zewnętrzną korzystając kolejno z każdej z trzech poznanych metod (2T, 3T, PW).

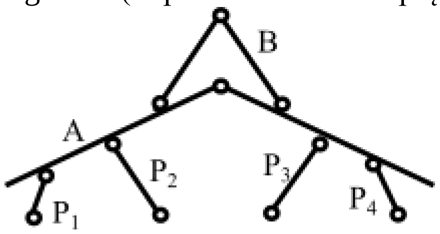


Rys. 2.18 Problem 2

Rozwiązanie – metoda 2T

niezmienność wewnętrzna

układ tarcz A i B (rys. 2.19) jest połączony dwoma prętami – brak jednego pręta, ponadto pręty P_1 do P_4 są chwiejnie przymocowane jednym przegubem (odpowiednik dwóch prętów)

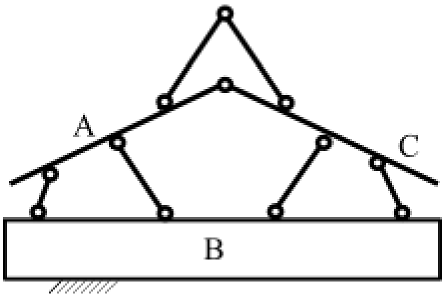


Rys. 2.19

wniosek: układ wewnętrznie zmienny

niezmienność zewnętrzna

dla układu z rys. 2.20, metoda 2T nie jest konkluzywna[7]



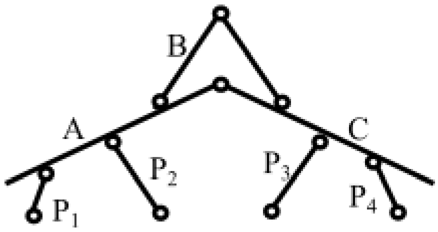
Rys. 2.20

wniosek końcowy: metoda 2T nie jest w tym przypadku skuteczna i nie daje rozstrzygnięcia

Rozwiązanie – metoda 3T

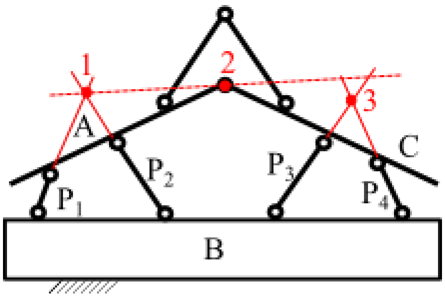
niezmienność wewnętrzna

układ tarcz A, B i C nie jest połączony prawidłowo: pomiędzy Bi C jest tylko jeden pręt, rys. 2.21, układ jest chwiejny



Rys. 2.21

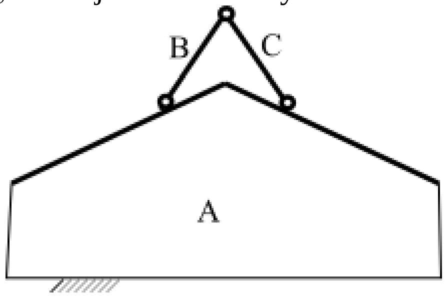
niezmienność zewnętrzna



Rys. 2.22

[7] rozstrzygająca

układ tarcz A, B (ostoja) i C, rys. 2.22, jest połączony parami prętów, których kierunki przecinają się w punktach 1, 2 i 3 niewspółliniowych, układ jest niezmienny i może dalej być traktowany jako jedna tarcza

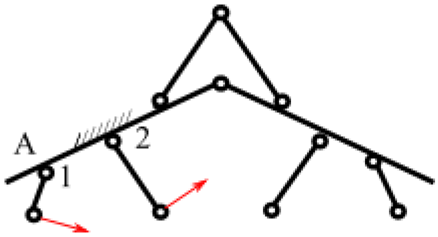


Rys. 2.23

układ tarcz A (ostoja), B i C, rys. 2.23 jest połączeniem „w trójkąt” i jest niezmienny
Wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie niezmienny

Rozwiązanie – metoda PW

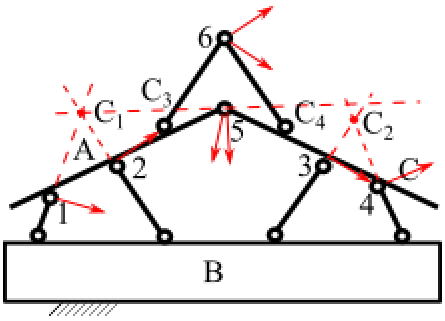
<u>niezmienność wewnętrzna</u>



Rys. 2.24

unieruchamiamy tarczę A traktując ją jako ostoję, punkty 1 i 2 są chwilowymi środkami obrotu prętów; obroty nie są odebrane (zablokowane), więc przerywamy dalsze dowodzenie, bo układ jest wewnętrznie zmienny

<u>niezmienność zewnętrzna</u>

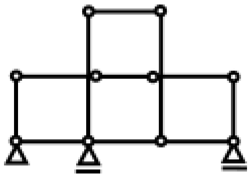


Rys. 2.25

unieruchomiona ostoja B oznacza chwilowe środki obrotów dla przyległych prętów i odpowiednie prędkości liniowe w punktach 1 i 2 tarczy A oraz 3 i 4 tarczy C
prędkości liniowe w punktach 1 i 2 oznaczają istnienie chwilowego środka obrotu tarczy A w punkcie C_1 oraz – analogicznie – w punkcie C_2 tarczy B
wobec tego prędkości wirtualne w punkcie 5 są sprzeczne (jeśli tylko punkty C_1, C_2 i 5 nie są współliniowe), więc punkt ten jest unieruchomiony i stanowiłby nowy (drugi już) chwilowy środek obroty tarcz A i B co jest niemożliwe
a więc tarcze A i C są unieruchomione
więc punkty C_3 i C_4 są chwilowymi środkami obrotu górnych prętów przyległych, co daje jednak sprzeczne prędkości wirtualne w punkcie 6, który wobec tego też musi być nieruchomy
dochodzimy do wniosku, że wszystkie punkty są unieruchomione i układ jest zewnętrznie niezmienny
wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie niezmienny

Problem 3

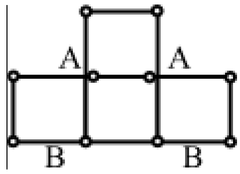
Dla układu z rys. 2.26 określić niezmienność wewnętrzną i zewnętrzną korzystając kolejno z każdej z trzech poznanych metod (2T, 3T, PW).



Rys. 2.26 Problem 3

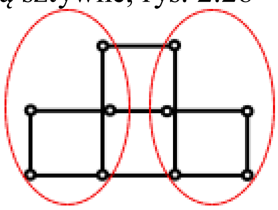
Rozwiązanie – metoda 2T

niezmienność wewnętrzna



Rys. 2.27

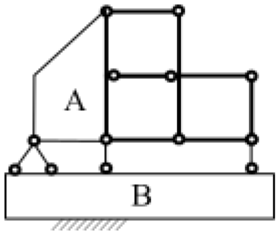
układ jest symetryczny: lewa i prawa strona są wzajemnym odbiciem, tarcze A są połączone z tarczami B przegubem i prętem, a więc te podukłady są sztywne, rys. 2.28



Rys. 2.28

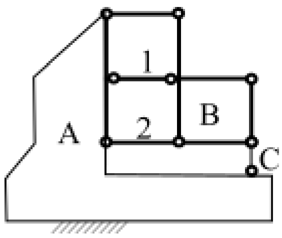
dwie tarcze z rys. 2.28 są połączone trzema równoległymi prętami (których kierunki przecinają się w jednym punkcie niewłaściwym[8]) i taki układ jest chwiejny

niezmienność zewnętrzna



Rys. 2.29

tarcza A jest połączona z tarczą B (ostoją), rys. 2.29, prawidłowo trzema prętami, jest to podukład niezmienny



Rys. 2.30

tarcza A (ostoja) z tarczą B, rys. 2.30, jest połączona (co najmniej) trzema prętami 1, 2 i C, co stanowi układ niezmienny

oznacza to, że wszystkie elementy są unieruchomione

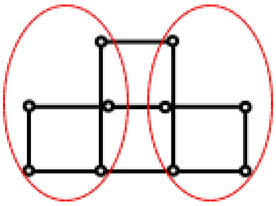
[8] czyli w nieskończoności

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie geometrycznie niezmienny

Rozwiązanie – metoda 3T

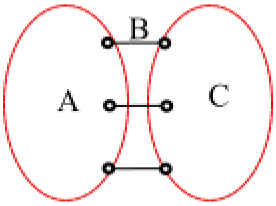
niezmienność wewnętrzna

zaznaczone na rys. 2.31 podukłady stanowią niezmienne połączenie 3 elementów każdy i są sztywnymi tarczami



Rys. 2.31

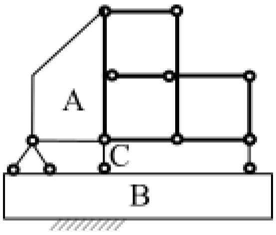
trzy tarcze A, B i C z rys. 2.32 są połączone prętami równoległymi do przegubów tarczy B (a więc przecinają się w trzech punktach współliniowych (trzeci punkt jest punktem niewłaściwym) i stanowią układ chwiejny (zmienny)



Rys. 2.32

wniosek: układ wewnętrznie zmienny

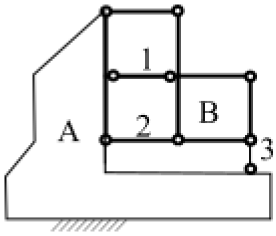
niezmienność zewnętrzna



Rys. 2.33

tarcza A, B (ostoja) i C, rys. 2.33, są połączone przegubami i (co najmniej) dwoma prętami, których kierunki nie przecinają się w punktach współliniowych, jest to układ niezmienny

tarcze A, B i 3, rys. 2.34, są połączone (prawidłowo) przegubami lub dwoma prętami, jest to więc układ niezmienny



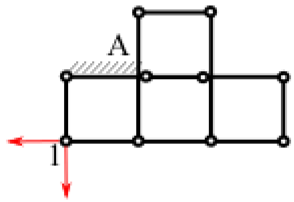
Rys. 2.34

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie niezmienny

Rozwiązanie – metoda PW

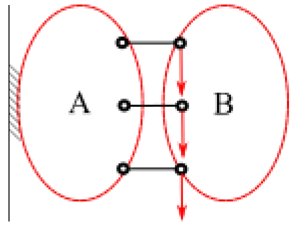
niezmienność wewnętrzna

unieruchamiamy jedną z tarcz, A (traktujemy ją jako ostoję), w punkcie 1, rys. 2.35, otrzymujemy sprzeczność prędkości wirtualnych, punkt ten jest więc też unieruchomiony



Rys. 2.35

analogicznie postępujemy dla strony prawej, otrzymując układ dwu tarcz, jak na rys. 2.36



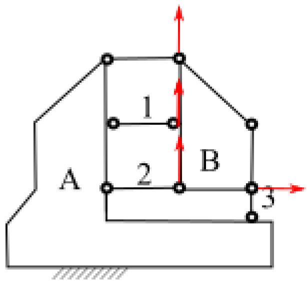
Rys. 2.36

unieruchamiamy tarczę A (traktując ją jako ostoję), powstają chwilowe środki obrotu dla prętów przyległych, których końce (połączenia z tarczą B) mają pionowe prędkości wirtualne

nie ma sprzeczności w planie prędkości wirtualnych i tarcza B może doznawać translacji pionowej względem ostoi, układ jest wewnętrznie zmienny

<u>niezmienność zewnętrzna</u>

wiemy, że tarcza B względem ostoi A może doznawać pionowej translacji (pochodzącej od obrotu poziomych prętów łączących), co stoi w sprzeczności z poziomą prędkością wirtualną na końcu pręta 3, oznacza to, że układ jest niezmienny



Rys. 2.37

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie geometrycznie niezmienny i może być analizowany równaniami statyki