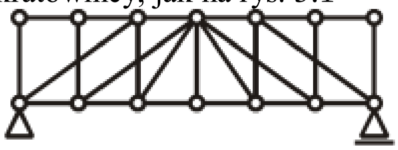
# 3. Geometryczna niezmienność – c.d.

**Problem 1**

Określić niezmienność geometryczną kratownicy, jak na rys. 3.1

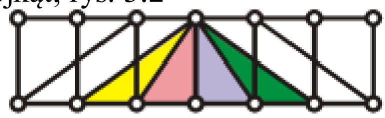


Rys. 3.1 Problem 1

**Rozwiązanie**

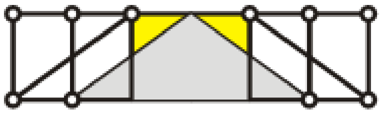
niezmienność wewnętrzna

wyróżniamy elementy połączone w trójkąt, rys. 3.2



Rys. 3.2

i, kolejno:



Rys. 3.3

i dalej…

Rys. 3.4

i kolejno…

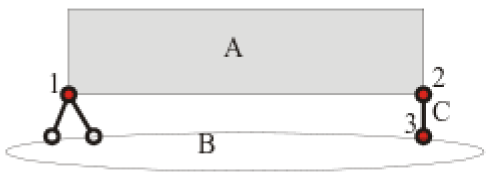
Rys. 3.5

i jeszcze raz…

Rys. 3.6

stwierdzając, że układ jest wewnętrznie niezmienny

niezmienność zewnętrzna



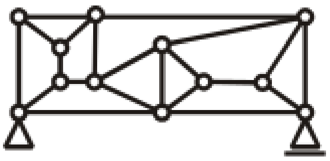

Rys. 3.7

z twierdzenia o 3 tarczach wynika, że układ z rys. 3.7 jest niezmienny: punkty 1, 2 i 3 są niewspółliniowe

wniosek końcowy: układ wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

**Problem 2**

Określić niezmienność geometryczną kratownicy, jak na rys. 3.8

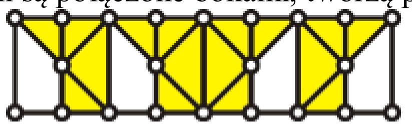


Rys. 3.8 Problem 2

**Rozwiązanie**

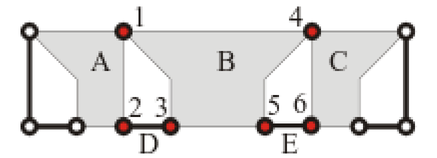
niezmienność wewnętrzna

zaznaczamy tarcze 3-elementowe; jeśli są połączone bokami, tworzą podukład niezmienny, rys. 3.9



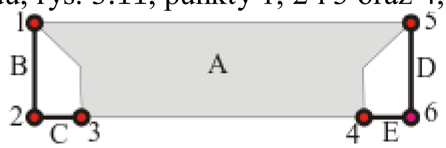
Rys. 3.9

tarcze A, B i C są połączone w sposób niezmienny (twierdzenie 3T, punkty 1, 2 i 3 oraz 5, 6 i 4 nie są współliniowe), rys. 3.10




Rys. 3.10

podobnie jest dla wynikowego układu, rys. 3.11, punkty 1, 2 i 3 oraz 4, 5 i 6 nie są współliniowe:

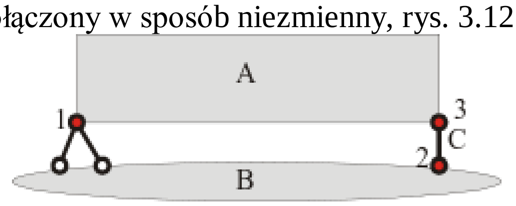



Rys. 3.11

stwierdzamy, że układ jest wewnętrznie niezmienny

niezmienność zewnętrzna

układ trzech tarcz A, B i C jest połączony w sposób niezmienny, rys. 3.12



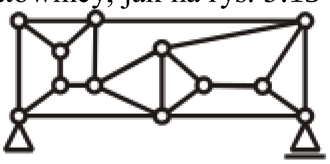

Rys. 3.12

układ jest więc zewnętrznie niezmienny

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

**Problem 3**

Określić niezmienność geometryczną kratownicy, jak na rys. 3.13

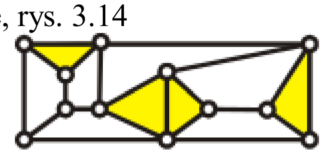


Rys. 3.13 Problem 3

**Rozwiązanie**

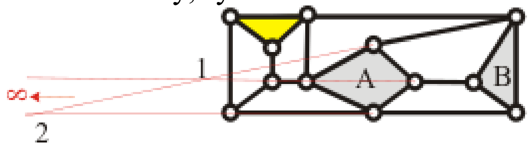
niezmienność wewnętrzna

wynajdujemy podukłady trójelementowe, rys. 3.14



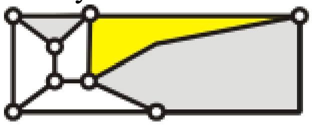
Rys. 3.14

tarcze A i B są połączone w sposób niezmienny, rys. 3.15



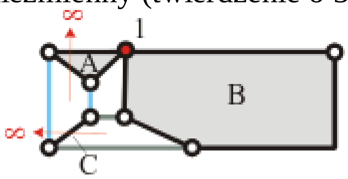

Rys. 3.15

kolejne 3-elementowe podukłady przedstawia rys. 3.16



Rys. 3.16

tarcze A, B i C są połączone w sposób niezmienny (twierdzenie o 3 tarczach), rys. 3.17




Rys. 3.17

stwierdzamy, że układ jest wewnętrznie niezmienny

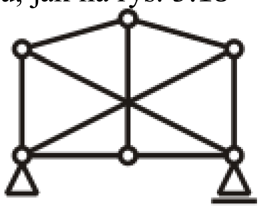
<u>niezmienność zewnętrzna</u>

(dowód identyczny jak dla problemu 2)

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie geometrycznie niezmienny.

**Problem 4**

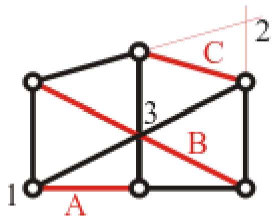
Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.18



Rys. 3.18 Problem 4

**Rozwiązanie**

<u>niezmienność wewnętrzna</u>




Rys. 3.19

trzy tarcze A, B i C połączone są parami prętów których kierunki przecinają się dla tarcz A z B w punkcie 1, dla tarcz B z C w punkcie 2 a dla tarcz A z C w punkcie 3, przy czym punkty są niewspółliniowe; zgodnie z twierdzeniem o 3 tarczach oznacza to, że układ jest niezmienny

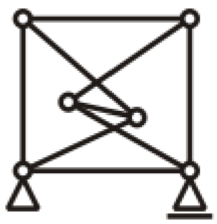
<u>niezmienność zewnętrzna</u>

(dowód identyczny jak w poprzednich przykładach)

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie geometrycznie niezmienny.

**Problem 5**

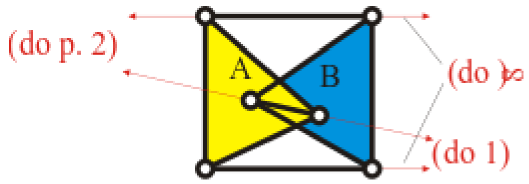
Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.20



Rys. 3.20 Problem 5

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna




Rys. 3.21

rozpoznajemy dwa podukłady trójelementowe A i B, które są sztywne; jeśli pręty je łączące nie są (wszystkie) do siebie równoległe, to WKW[1] niezmienności połączenia 2T jest spełniony

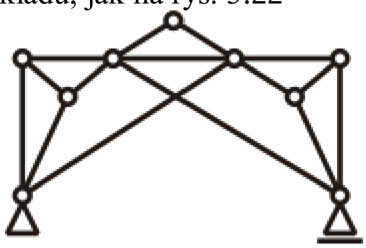
niezmienność zewnętrzna

(dowód identyczny jak w poprzednich przykładach)

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie geometrycznie niezmienny.

## Problem 6

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.22

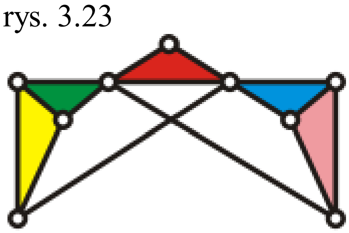


Rys. 3.22 Problem 6

**Rozwiązanie**

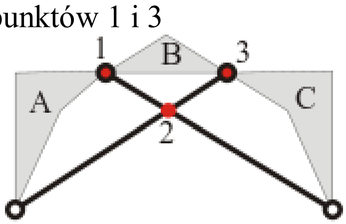
niezmienność wewnętrzna

znajdujemy podukłady trójelementowe, rys. 3.23



Rys. 3.23

trzy tarcze A, B i C, rys. 3.24, są połączone przegubami 1 i 3 oraz dwoma prętami których kierunki przecinają się w punkcie 2, niewspółliniowym do punktów 1 i 3




[1] warunek konieczny i wystarczający

Rys. 3.24

układ, zgodnie z twierdzeniem 3T jest wewnętrznie niezmienny

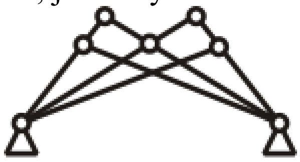
niezmienność zewnętrzna

(dowód identyczny jak w poprzednich przykładach)

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie geometrycznie niezmienny.

**Problem 7**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.25



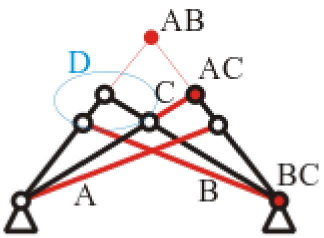
Rys. 3.25 Problem 7

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna

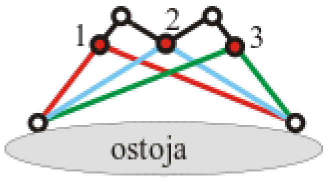
trzy tarcze A, B i C są połączone prętami: A z B dwoma, A z C dwoma, ale B z C tylko jednym prętem i układem dwu prętów D, rys. 3.26, który nie jest równoważny pojedynczemu prętowi[2] (i wszystkie pręty zostały wykorzystane do analizy)

układ jest wewnętrznie zmienny




Rys. 3.26

niezmienność zewnętrzna

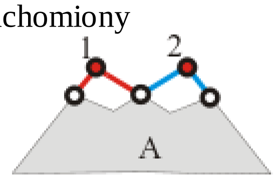



Rys. 3.27

ostoja i pręty czerwone są układem stabilnym (połączenie w trójkąt), punkt 1 unieruchomiony

ostoja i pręty niebieskie – podobnie, punkt 2 unieruchomiony

ostoja i pręty zielone – j.w., punkt 3 unieruchomiony




Rys. 3.28

kolorowe pręty, rys. 3.28, są połączone z ostoją A są unieruchomione w punktach 1 i 2

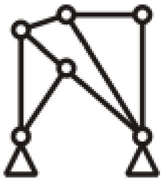
wobec powyższego, wszystkie punkty są zablokowane i układ jest niezmienny

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie geometrycznie niezmienny

**Problem 8**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.29

[2] o jeden stopień swobody więcej z uwagi na łączący przegub

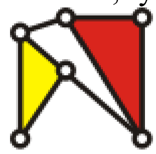


Rys. 3.29 Problem 8

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna

w układzie wyróżniamy dwa podukłady trójelementowe, rys. 3.30

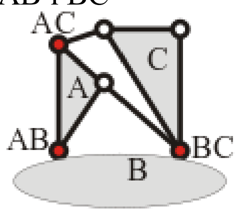


Rys. 3.30

są to dwie tarcze połączone jedynie dwoma prętami, więc z twierdzenia 2T wynika, że układ jest zmienny

niezmienność zewnętrzna

tarcze A, B i C są połączone przegubami AB i BC oraz dwoma prętami, których kierunki przecinają się w punkcie AC, niewspółliniowym z punktami AB i BC



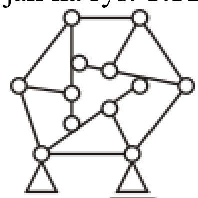

rys. 3.31

układ jest niezmienny

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie zmienny ale zewnętrznie geometrycznie niezmienny

**Problem 9**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.32

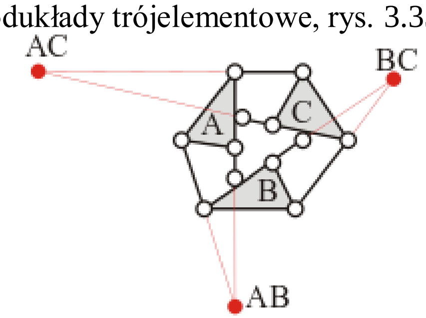


Rys. 3.32 Problem 9

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna

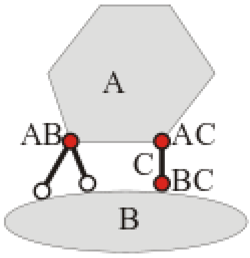
w pierwszym etapie odnajdujemy podukłady trójelementowe, rys. 3.33




Rys. 3.33

tarcze A, B i C połączone są parami prętów, których kierunki przecinają się odpowiednio w punktach AB, BC i AC, punkty są niewspółliniowe więc układ jest niezmienny

niezmienność zewnętrzna

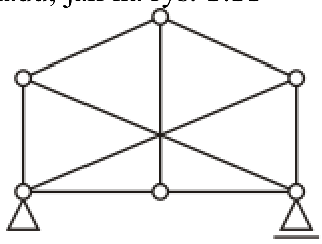



Rys. 3.34

niezmienność układu wynika wprost z twierdzenia 3T dla tarcz A, B i C z przegubami w punktach AB, BC i AC (niewspółliniowych)
wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

**Problem 10**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.35

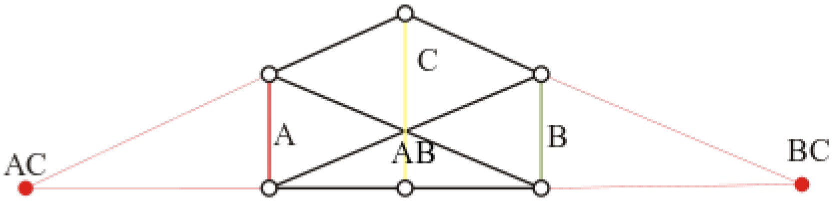


Rys. 3.35 Problem 10

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna

korzystamy z twierdzenia 3T, rys. 3.36, dla tarcz A, B i C, połączonych prętami, których kierunki przecinają się w punktach AC, BC i AB




Rys. 3.36

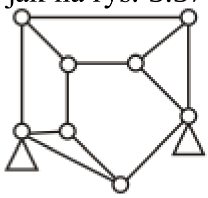
punkty AC, BC i AB są niewspółliniowe, więc kład jest niezmienny

niezmienność zewnętrzna

(rozumowanie analogiczne jak w poprzednim przykładzie)
wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

**Problem 11**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.37

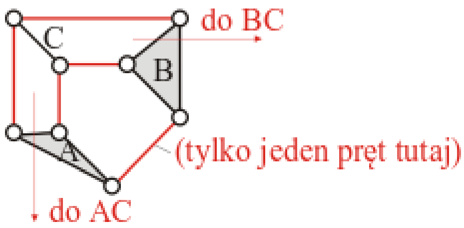


Rys. 3.37 Problem 11

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna

odnajdujemy elementy połączone w trójkąt i korzystamy z twierdzenia 3T, rys. 3.38

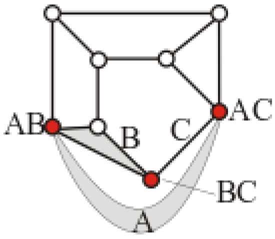



Rys. 3.38

trzy tarcze są połączone: A z C dwoma prętami, B z C dwoma prętami, natomiast A z B tylko jednym prętem, układ jest więc zmienny

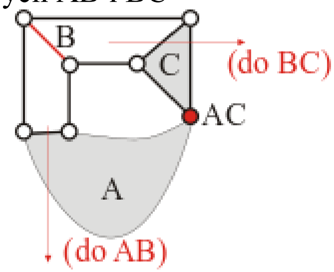
niezmienność zewnętrzna

ostoja A jest połączona z tarczami B i C przegubami nie leżącymi na jednej prostej, punkt BC jest więc unieruchomiony, rys. 3.39




Rys. 3.39

w kolejnym etapie rozpatrujemy trzy tarcze A, B i C połączone przegubem AC oraz prętami przecinającymi się odpowiednio w punktach niewłaściwych AB i BC



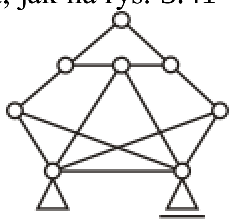

Rys. 3.40

punkty nie leżą na jednej prostej więc układ jest niezmienny

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie geometrycznie zmienny ale zewnętrznie jest niezmienny.

**Problem 12**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.41

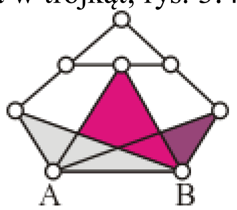


Rys. 3.41 Problem 12

**Rozwiązanie**

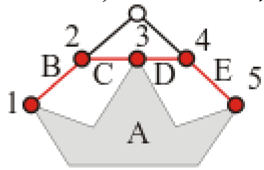
niezmienność wewnętrzna

w pierwszym etapie odnajdujemy połączenia w trójkąt, rys. 3.42



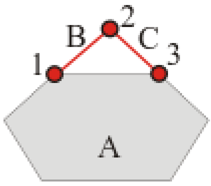

Rys. 3.42

następnie dwukrotnie korzystamy z twierdzenia 3T, dla tarcz A, B i C oraz A, D i E, rys. 3.43




Rys. 3.43

punkty 2, (3) i 4 są unieruchomione, więc, rys. 3.44




Rys. 2.44

punkt 2 jest też unieruchomiony, układ jest niezmienny

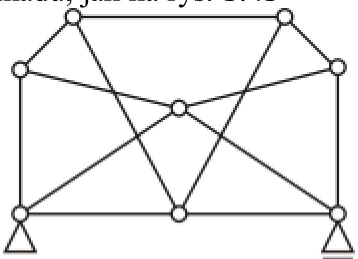
<u>niezmienność zewnętrzna</u>

wykazanie niezmienności zewnętrznej dla układu wewnętrznie niezmiennego jest banalne (por. poprzednie przykłady)

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie geometrycznie niezmienny

**Problem 13**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.45

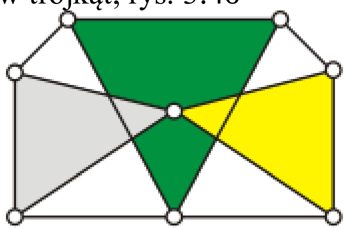


Rys. 3.45 Problem 13

**Rozwiązanie**

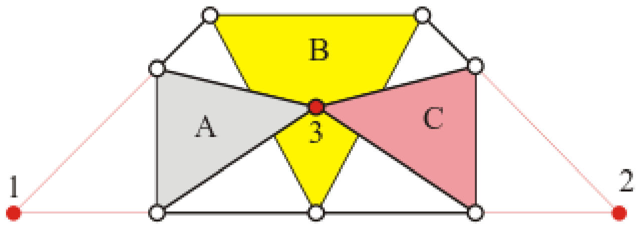
<u>niezmienność wewnętrzna</u>

odnajdujemy trzy podukłady połączone w trójkąt, rys. 3.46



Rys. 3.46

te trzy tarcze A, B i C są połączone przegubem 3 i prętami o kierunkach przecinających się w punktach 1 i 2, rys. 3.47




Rys. 3.47

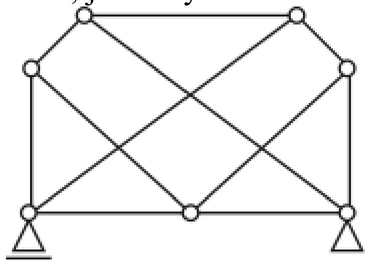
punkty 1, 2, i 3 nie leżą na jednej prostej, więc układ jest niezmienny

<u>niezmienność zewnętrzna</u>

(rozważania banalne w świetle poprzednich przykładów)
wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

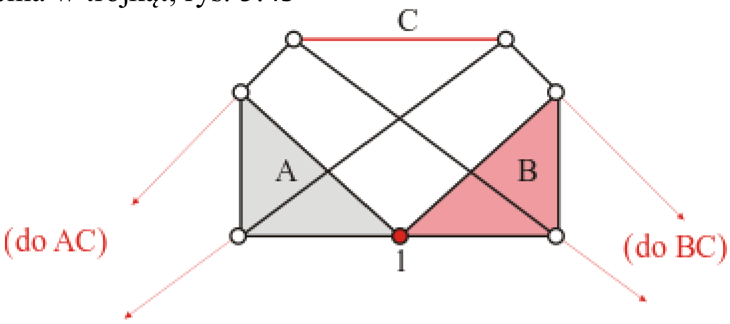
**Problem 14**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.48



Rys. 3.48 Problem 14

**Rozwiązanie**
<u>niezmienność wewnętrzna</u>
odnajdujemy dwa połączenia w trójkąt, rys. 3.49

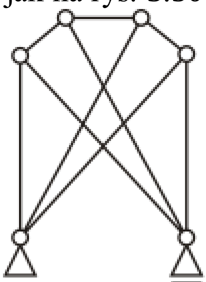



Rys. 3.49

tarcze A, B i C są połączone przegubem 1 i parami prętów o kierunkach przecinających się w punktach AC i BC; punkty nie leżą na jednej prostej więc układ jest niezmienny
<u>niezmienność zewnętrzna</u>
(patrz poprzednie przykłady)
wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

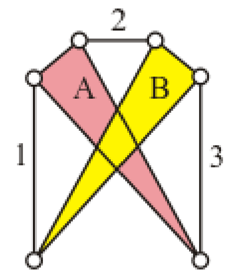
**Problem 15**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.50



Rys. 3.50 Problem 15

**Rozwiązanie**
<u>niezmienność wewnętrzna</u>
odnajdujemy dwa połączenia w trójkąt, rys. 3.51




Rys. 3.51

tarcze A i B są połączone trzema prętami1, 2 i 3, o kierunkach nie przecinających się w jednym punkcie, układ jest więc niezmienny

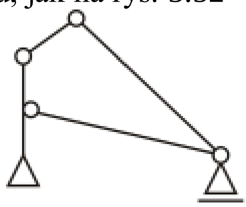
niezmienność zewnętrzna

(3T, banalnie)

wniosek końcowy: układ jest wewnętrznie i zewnętrznie niezmienny

**Problem 16**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.52

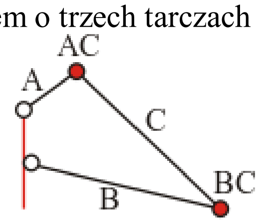


Rys. 3.52 Problem 16

**Rozwiązanie**

niezmienność wewnętrzna

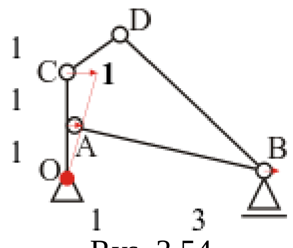
trzy tarcze A, B i C, rys. 3.53, są połączone ze sobą: A z C przegubem, B z C przegubem ale A z B tylko jednym prętem, więc zgodnie z twierdzeniem o trzech tarczach układ jest zmienny




Rys. 3.53

niezmienność zewnętrzna

zastosujemy metodę prędkości wirtualnych; w tym celu przyjmijmy – niezbędne do dalszych rozważań – wymiary prętów, rys. 3.54




Rys. 3.54

punkt O stanowi chwilowy środek obrotu pręta CO, załóżmy jednostkową prędkość liniową $\overrightarrow{v_c} = \vec{1}$ (wirtualną, a więc poziomą)

z proporcji otrzymujemy, że prędkość wirtualna w punkcie A wynosi $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{0.5}$ i również jest pozioma

w punkcie B, z uwagi na podparcie prędkość liniowa musi być również liniowa, a ponieważ rzuty prędkości w punktach A i B na kierunek pręta AB muszą być sobie równe, więc $\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{0.5}$

prędkość liniowa w punkcie D musi spełniać dwa warunki:

1. jej rzut na kierunek pręta CD musi być równy rzutowi prędkości $\overrightarrow{v_C}$ na ten kierunek

2. jej rzut na kierunek pręta BD musi być równy rzutowi prędkości $\overrightarrow{v_B}$ na ten kierunek

zapis powyższych warunków znacznie się upraszcza dla przyjętych wymiarów, z których wynika że odcinki CD i BD są do siebie prostopadłe[3]: jeżeli oznaczymy kąt pomiędzy kierunkami CD i prędkości $\overrightarrow{v_D}$ przez $\alpha$, to kąt pomiędzy kierunkami BD i prędkością $\overrightarrow{v_D}$ wynosi $90 - \alpha$

z rzutowania prędkości na kierunek CD mamy:

$$v_D \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a z rzutowania na kierunek BD mamy:

$$v_D \sin\alpha = 0.5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dzieląc równania stronami dostajemy:

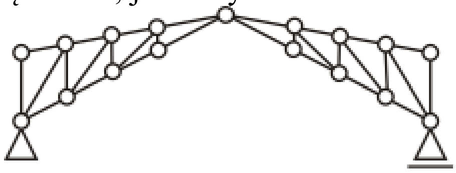
$$\tan\alpha = 0.5\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{2}} = 0.5 \ \rightarrow \ \alpha = 26.6° \ \rightarrow v_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\cos\alpha} = 0.791$$

z powyższych rozważań najistotniejszy nie jest sam wynik lecz to, że prędkości wirtualne są możliwe: ponieważ nie ma żadnej sprzeczności w planie prędkości wirtualnych, układ jest chwiejny

wniosek końcowy: układ jest zarówno wewnętrznie jak i zewnętrznie geometrycznie zmienny (i nie może być analizowany równaniami statyki)

**Problem 17**

Określić niezmienność geometryczną układu, jak na rys. 3.55

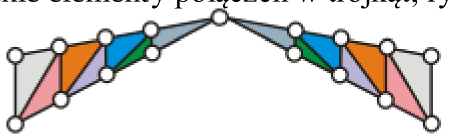


Rys. 3.55 Problem 17

**Rozwiązanie**

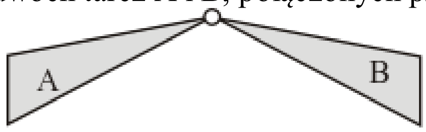
<u>niezmienność wewnętrzna</u>

odnajdujemy, krok po kroku, wszystkie elementy połączeń w trójkąt, rys. 3.56



Rys. 3.56

ostatecznie, układ sprowadza się do dwóch tarcz A i B, połączonych przegubem, rys. 3.57



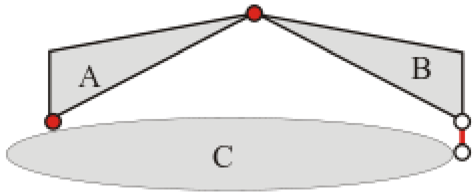

rys. 3.57

powyższy układ jest zmienny

<u>niezmienność zewnętrzna</u>

trzy tarcze A, B i C (ostoja) są połączone: A z C przegubem, A z B przegubem, ale B z C jedynie prętem, rys. 3.58

[3] gdyby tak nie było, potrzebne byłoby dodatkowe równanie wiążące kierunki BD i CD ze sobą, idea rozwiązania pozostałaby taka sama




Rys. 3.58

warunek konieczny twierdzenia 3T nie jest spełniony, więc układ jest zmienny

wniosek końcowy: układ jest zarówno wewnętrznie jak i zewnętrznie zmienny, jest zatem mechanizmem i nie może być analizowany równaniami statyki