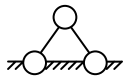
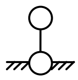
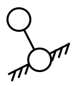
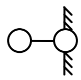
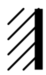
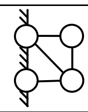
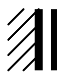
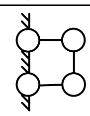
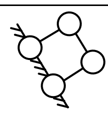
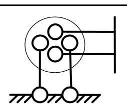
4. Reakcje więzów

Definicje

mechanizm – układ ze stopniami swobody, który może być analizowany jedynie równaniami dynamiki (z uwzględnieniem sił bezwładności)
układ niezmienny (sztywny) – układ mający zero stopni swobody (całkowicie unieruchomiony)
układ statycznie niewyznaczalny – układ którego siły wewnętrzne nie można wyznaczyć jedynie z równań równowagi

Więzy[1] i ich reakcje

Rozważamy jedynie przypadek dwuwymiarowy (płaski).

nazwa	schemat	sch. kin.	lss[2]	reakcje[3]
podpora nieprzesuwna			1 (R)	1 V, 1 H
podpora przesuwna			2 (R, T)	1 V
podpora przesuwna ukośnie			2 (R, T)	1 P
przesuw pionowy			2 (R, T)	1 H
utwierdzenie			0	1 V, 1 H, 1 M
utwierdzenie pionowo przesuwne			1 (T)	1 H, 1 M
utwierdzenie ukośnie przesuwne			1 (T)	1 P, 1 M
odebrany obrót			2 (T)	1 M

Tablica 4.1 Reakcje w układzie dwuwymiarowym

Równania równowagi

Układ jest w równowadze statycznej wtedy i tylko wtedy gdy każda jego część jest w równowadze. Oznacza to, że wycięty dowolny podukład (dowolna część układu) (wraz z siłami oddziaływania przyległych podukładów) musi być w równowadze.

---

[1] nie ma liczby pojedynczej (podobnie jak dla słów: okowy, spodnie, drzwi i t.p.)
[2] R – obrót (rotacja), T – przesunięcie (translacja)
[3] V – pionowo, H – poziomo, P – prostopale, M – moment utwierdzenia

przypadek 3D

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum M_X = 0, \quad \sum M_Y = 0, \quad \sum M_Z = 0$$

przypadek 2D

1 postać:

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum M_C = 0,$$ A, B, C – niewspółliniowe

2 postać:

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum L = 0,$$ nie równoległe do odcinka AB

3 postać:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_O = 0$$

układ sił zbieżnych

$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0,$ X nie równoległe do Y (jedynie 2 równania niezależne)

układ sił równoległych

$\sum M_A = 0, \quad \sum L = 0,$ L nie prostopadłe do kierunku sił (jedynie 2 równania niezależne)

Dodatkowe równania

Najczęściej stosowanym dodatkowym równaniem jest tzw. równanie przegubu, oznaczające zerowanie się momentu przenoszonego przez przegub – moment w przegubie się zeruje (zerowy moment od sił z każdej strony przegubu).

Zasady obliczeń

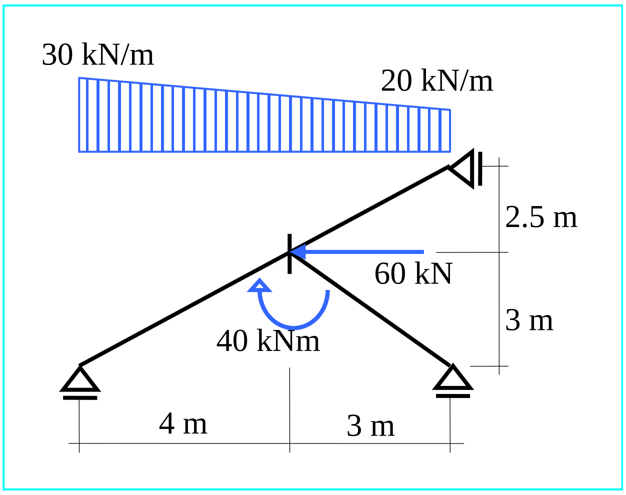
Równowaga układu może być zapewniona jedynie wtedy i tylko wtedy gdy układ jest geometrycznie niezmienny (unieruchomiony, prawidłowo podparty).
Przyłożenie sił reakcji oznacza, że więzy zostały zastąpione reakcjami. Formalnie, więzy i siły reakcji nie powinny być rysowane jednocześnie na tym samym schemacie (rysunku).
W wyniku zastosowania zasady zesztywnienia, kształtu układu jest nieistotny. Istotne są jedynie: położenie i rodzaj więzów, położenie przegubów jak i linie działania obciążeń zewnętrznych (i, oczywiście, ich wartości).
Wyniki obliczeń reakcji muszą być poprawne (dla zachowania równowagi statycznej). Niepoprawne wartości reakcji najczęściej dyskwalifikują całe dalsze rozwiązanie[4]. Tak więc staranne sprawdzenie obliczeń reakcji jest ze wszech miar zalecane (i – początkowo – nawet formalnie wymagane).

Przykłady

W zależności od wewnętrznej geometrycznej niezmienności, układy można sklasyfikować jako:
- wewnętrznie niezmienne
- wewnętrznie zmienne:
  - trójprzegubowe
  - analogiczne do trójprzegubowych

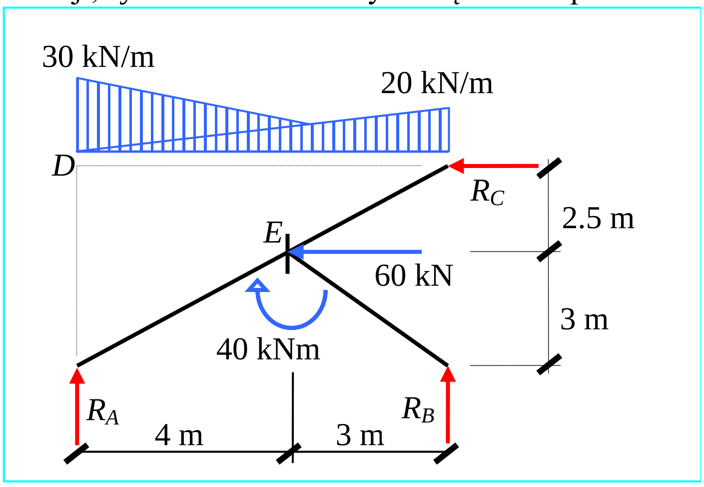
[4] które, z reguły, nie jest nawet sprawdzane

Przykład układu niezmiennego wewnętrznie



Rys. 4.1 Układ wraz z obciążeniem

Rozwiązanie:
Zastępujemy więzy siłami reakcji, rys. 4.2 i zamieniamy obciążenie trapezowe na dwu-trójkątne.



Rys. 4.2 Układ wraz z siłami reakcji

Dobieramy równania równowagi (rozprzęgnięte):

$$\sum M_C = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 7\cdot \frac{2}{3}\cdot 7 + \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 7\cdot \frac{1}{3}\cdot 7 - 60\cdot 2.5 - 40}{7} = 66.19 \text{ kN}$$

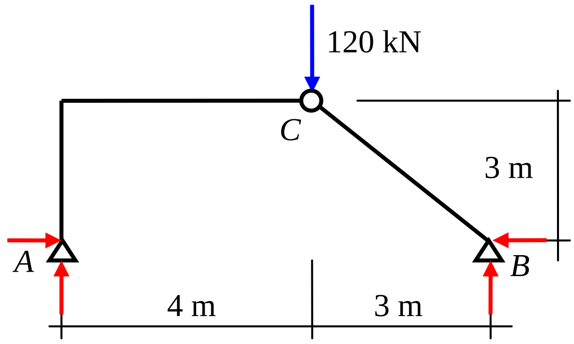
$$\sum M_D = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 7\cdot \frac{1}{3}\cdot 7 + \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 7\cdot \frac{2}{3}\cdot 7 + 60\cdot 2.5 + 40}{7} = 108.81 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad R_C = -60 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:
(Z uwagi na prostotę 3 równania sprawdzamy jedynie wartości R_A i R_B.)

$\sum Y = 66.19 + 108.81 - 25\cdot 7 = 175 - 175 = 0$, OK

Przykład układu trójprzegubowego



Rys. 4.3 Układ wraz z reakcjami

Rozwiązanie

Ponieważ punkty A i B są na tym samym poziomie, równania równowagi mogą być częściowo rozprzęgnięte.

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{120 \cdot 3}{7} = 51.43\,\text{kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{120 \cdot 4}{7} = 68.57\,\text{kN}$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = H_B$$

równanie przegubu[5]:

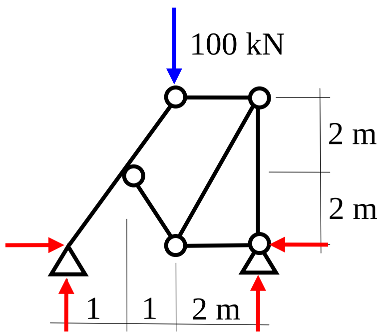
$$\sum M_C^P = 0 \quad \rightarrow \quad 3H_B = 3V_B \quad \rightarrow \quad H_B = V_B = H_A = 68.57\,\text{kN}$$

Sprawdzenie:

2. równanie przegubu:

$$\sum M_C^L = 4V_A - 3H_A = 4 \cdot 51.43 - 3 \cdot 68.57 = 0.01 \approx 0\text{, OK}$$

Przykład układu analogicznego do trójprzegubowego



Rys. 4.4 Układ wraz z siłami reakcji

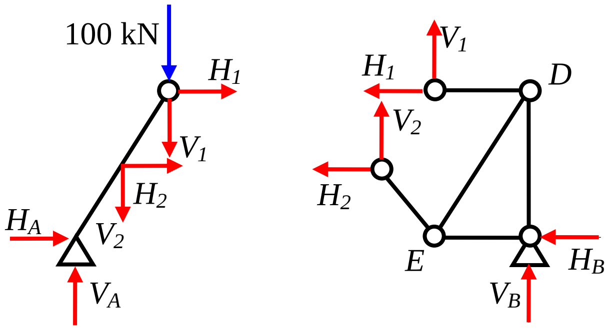
Rozwiązanie

(Poniższe rozwiązanie nie jest najkrótsze z możliwych)

Rozcinamy układ na (co najmniej) dwa podukłady, tnąc poprzez przeguby, jak na rys. 4.5.

---

[5] oznaczenia ^{P} i ^{L} oznaczają sumę od strony prawej i lewej, odpowiednio



Rys. 4.5 Układ rozcięty cięciem poprzez przeguby *1* i *2*.

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{100 \cdot 2}{4} = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = 50 \text{ kN}$$

(ale tu są dwa pręty, każdy przyczepiony przegubem)

$$\sum M_D^L = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 0$$

$$\sum M_E^L = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = 2H_2$$

Równowaga lewej części układu:

$$\sum Y^L = 0 \quad \rightarrow \quad V_A - V_2 - V_1 - 100 = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = -100 - 0 + 50 = -50 \text{ kN}, \; H_2 = -25 \text{ kN}$$

$$2 + V_2 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_1 = \tfrac{1}{4}(-200 + 50 + 50) = -25 \text{ kN}$$

$$\sum X^L = 0 \quad \rightarrow \quad H_A + H_2 + H_1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = 25 + 25 = 50 \text{ kN}$$

i, ostatecznie

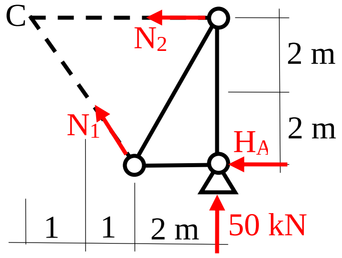
$$H_B = 50 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_E = 2V_A - 2V_B = 100 - 100 = 0$$

(Jest oczywiste, że moment względem dowolnego punktu na pionowej osi "symetrii" jest równy zero).

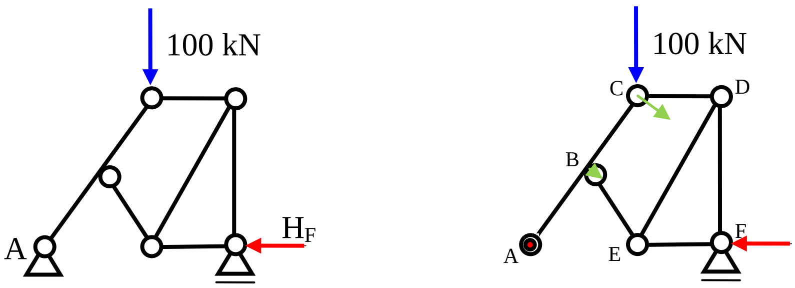
(inne rozwiązanie z użyciem trzeciego fikcyjnego przegubu[6])



Rys. 4.6. Użycie fikcyjnego przegubu.

$\sum M_C = 0 \rightarrow 4V_B - 4H_A = 0 \rightarrow H_A = V_B = 50 \text{ kN}$

(inne rozwiązanie z zastosowaniem zasady prac/prędkości wirtualnych)
Uwalniamy jeden stopień swobody uzyskując mechanizm jednobieżny[7]:



Rys. 4.7 Mechanizm z jednym stopniem swobody

punkt A – chwilowy środek obrotu pręta AC (ω – prędkość kątowa, v – prędkość liniowa)

$$v_{cx} = \sqrt{20}\omega \frac{4}{\sqrt{20}} = 4\omega, \quad v_{cy} = -\sqrt{20}\omega \frac{2}{\sqrt{20}} = -2\omega$$

$$v_{bx} = \sqrt{5}\omega \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\omega, \quad v_{by} = -\sqrt{5}\omega \frac{1}{\sqrt{5}} = -\omega$$

tarcza DEF ma w punkcie F prędkość v_F i prędkość kątową ω_1

$$v_{Dx} = v_F - 4\omega_1, \quad v_{Dy} = 0$$

$$v_{Ex} = v_F, \quad v_{Ey} = -2\omega_1$$

z równości rzutów prędkości na kierunek pręta, mamy:

$$v_{Cx} = v_{Dx} \quad \Rightarrow \quad 4\omega = v_F - 4\omega_1 \quad \Rightarrow \quad v_F = 4\omega + 4\omega_1$$

i

$$v_{Bx}\frac{1}{\sqrt{5}} - v_{By}\frac{2}{\sqrt{5}} = v_{Ex}\frac{1}{\sqrt{5}} - v_{Ey}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

więc

$$4\omega = v_F + 4\omega_1$$

skąd

$$\omega_1 = 0, \quad v_F = 4\omega$$

porównujemy moc/pracę wirtualną sił 100 kN i H_f:

$$100 \cdot 2\omega - 4\omega H_F = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = 50 \text{ kN}$$

Tą metodą możemy bezpośrednio obliczyć każdą z sił reakcji, choć nie zawsze droga jest krótka czy łatwa.

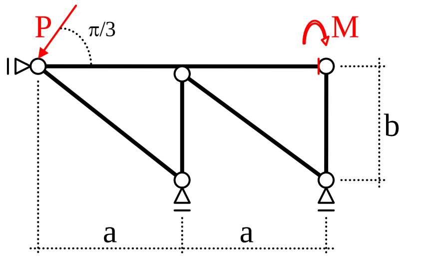
---

[6] uwaga: metoda zakłada że pręty 1 i 2 są tzw. prętami kratownicowymi (nie są obciążone pomiędzy przegubami)
[7] czyli z jednym stopniem swobody

Ćwiczenia

Problem 1

Obliczyć reakcje więzów dla układu z rys. 4.8, używając, gdzie to możliwe, rozprzęgniętych układów równań. Sprawdzić wyniki.

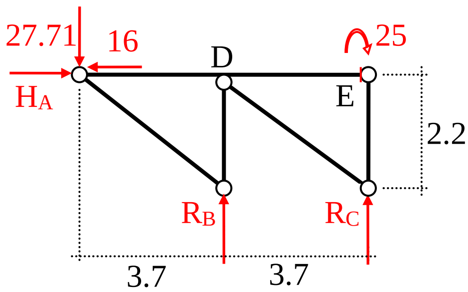


Rys. 4.8 Układ (wewnętrznie niezmienny)

Przyjąć dane: M = 25 kNm, P = 32 kN, a = 3.7 m, b = 2.2 m.

Rozwiązanie

Więzy zastępujemy odpowiednimi siłami reakcji i rozkładamy siłę ukośną na składowe, rys. 4.9



Rys. 4.9 Układ wraz z reakcjami

$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 16$ kN

$\Sigma M_E = 0 \rightarrow 27.71 \cdot 7.4 - 3.7R_B - 25 = 0 \rightarrow R_B = 48.66$ kN

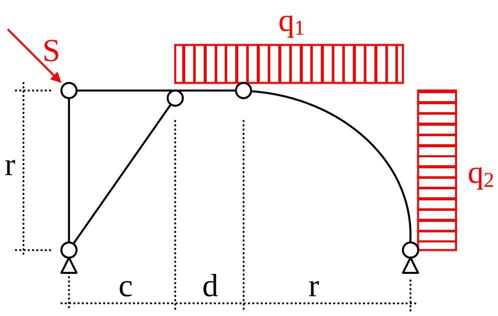
$\Sigma M_D = 0 \rightarrow 27.71 \cdot 3.7 + 3.7R_C - 25 = 0 \rightarrow R_C = -20.95$ kN

Sprawdzenie

$\Sigma M_A = -25 + 48.66 \cdot 3.7 - 20.95 \cdot 7.4 = 0.012 \approx 0$, OK

Problem 2

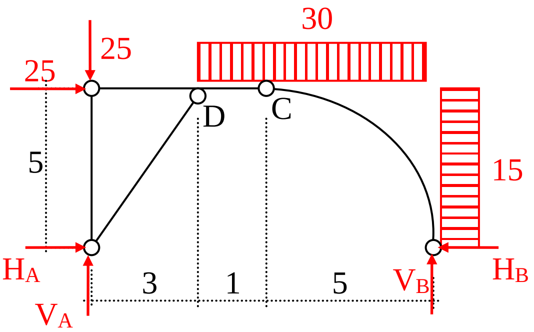
Obliczyć reakcje więzów dla układu z rys. 4.10 dla danych: S = 35.36 kN, q_1= 30 kN/m, q_2=15 kN/m, c = 3 m, d = 1 m, r = 5 m. Sprawdzić wyniki.



Rys. 4.10 Układ trójprzegubowy

Rozwiązanie

Więzy zastępujemy siłami reakcji a siłę ukośną – jej składowymi, rys. 4.11.

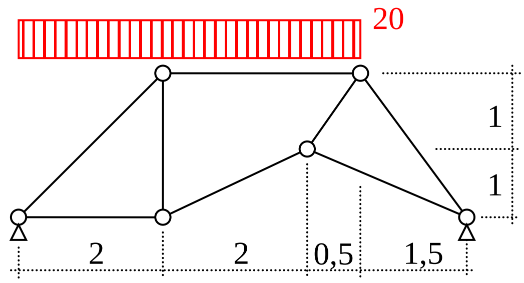


Rys. 4.11 Układ wraz z reakcjami

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -9V_A - 25 \cdot 5 + 25 \cdot 9 + 30 \cdot 6 \cdot 3 + 15 \cdot 5 \cdot 2.5 = 0 \rightarrow V_A = 91.94$ kN
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow\ -25 \cdot 5 - 30 \cdot 6 \cdot 6 + 15 \cdot 5 \cdot 2.5 + 9V_B = 0 \rightarrow V_B = 113.1$ kN
równanie przegubu
$\Sigma M_C^L = 0 \rightarrow\ -4V_A + 5H_A + 25 \cdot 4 + 30 \cdot 1 \cdot 0.5 = 0 \rightarrow H_A = 50.55$ kN
$\Sigma X = 0 \rightarrow 50.55 + 25 - 15 \cdot 5 - H_B = 0 \rightarrow H_B = 0.55$ kN
Sprawdzenie
$\Sigma M_D = -91.94 \cdot 3 + 50.55 \cdot 5 + 25 \cdot 3 - 30 \cdot 6 \cdot 3 - 15 \cdot 5 \cdot 2.5 - 0.55 \cdot 5 + 113.1 \cdot 6 = 0.37 \approx 0$, OK

Problem 3

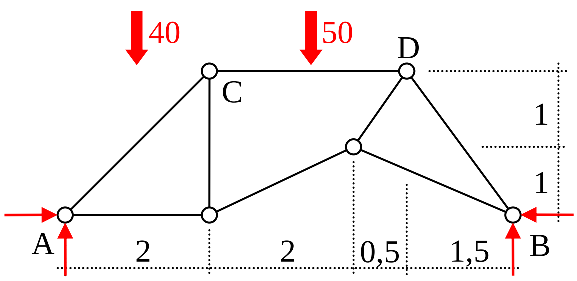
Obliczyć reakcje więzów dla układu z rys. 4.12. Sprawdzić wyniki.



Rys. 4.12 Układ analogiczny do trójprzegubowego

Rozwiązanie

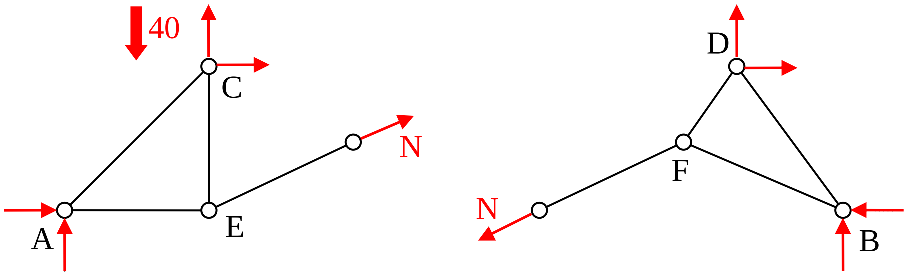
Obciążenie ciągłe zastępujemy wypadkowymi siłami a więzy – siłami reakcji, rys. 4.13



Rys. 4.13 Układ z kompletem sił

Ponieważ punkty A i B znajdują się na jednym poziomie (reakcje poziome są na jednej linii działania), pionowe składowe reakcji można prosto obliczyć:
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -6V_A + 40 \cdot 5 + 50 \cdot 2.75 = 0 \rightarrow V_A = 56.25$ kN
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow\ -40 \cdot 1 - 50 \cdot 3.25 + 6V_B = 0 \rightarrow V_B = 33.75$ kN
dwoma cięciami rozcinamy układ otrzymując dwa podukłady: lewy i prawy, rys. 4.14
wiemy, że w przegubie moment jest równy zero i działa jedynie siła o nieznanej wartości i kierunku

zawsze więc tnąc przez przegub rozkładamy tę nieznaną siłę na dwie składowe o nieznanych wartościach ale znanych kierunkach (pionowym i poziomym)



Rys. 4.14 Podukłady lewy i prawy

jeżeli pręt prosty jest na końcach połączony przegubami i nie jest obciążony pomiędzy przegubami (patrz pręt EF na rys. powyżej), to z równowagi pręta względem punktu E albo F wynika, że układ sił w obu przegubach cięcia musi sprowadzać się do wypadkowej, której kierunek pokrywa się z przegubami (inaczej pręt nie byłby w równowadze)

piszemy równania równowagi dla obu podukładów[8]

w obu przypadkach wektor N jest tzw. wektorem swobodnym i możemy go przesuwać wzdłuż jego linii działania, najwygodniej jest przesunąć go do punktu E i F, i tu rozłożyć na składowe poziome i pionowe; jest też oczywiste, że za każdym razem jest to ta sama siła N (po lewej jak i po prawej)

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow 40 \cdot 1 + 2H_A - 56.25 \cdot 2 + 2 \cdot N \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 0 \cdot N \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow 2H_A + \frac{4}{\sqrt{5}} N - 72.5 = 0$

$\Sigma M_D = 0 \rightarrow -33.75 \cdot 1.5 + 2 \cdot V_B - 1 \cdot N \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 0.5 \cdot N \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow 2V_B + \frac{1.5}{\sqrt{5}} N - 50.63 = 0$

oraz, dla całego układu

$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0$

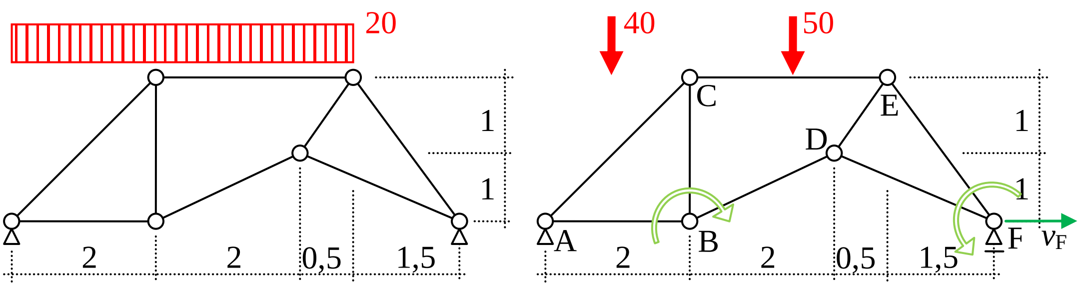
z powyższego układu 3 równań z 3 niewiadomymi otrzymujemy rozwiązanie:

$H_A = 18.75$ kN, $H_B = 18.75$ kN, $N = 19.56$ kN

Sprawdzenie

$\Sigma X = 18.75 - 18.75 = 0, \Sigma Y = 40 + 50 - 56.25 - 33.75 = 0$, OK

Rozwiązanie metodą zasady prędkości/prac wirtualnych



Rys. 4.15 Użycie zasady prędkości/prac wirtualnych

aby obliczyć poziomą reakcję w punkcie F, rys. 4.15, uwalniamy stopień swobody na kierunku tej reakcji

ω – prędkość kątowa tarczy ABC

ω_1 – prędkość kątowa tarczy DEF

v_F – prędkość liniowa w punkcie F

prędkości liniowe punktów B and C:

$$v_{Bx} = 0, v_{By} = -2\omega$$

$$v_{Cx} = \sqrt{8}\omega \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\omega, v_{Cy} = -2\omega$$

[8] przypominamy, że układ jest w równowadze, jeśli każda jego część jest w równowadze

prędkości liniowe punktów *D* i *E*:

$$v_{Dx} = v_F - \sqrt{5}\omega_1 \frac{1}{\sqrt{5}} = v_F - \omega_1, v_{Dy} = 0 - \sqrt{5}\omega_1 \frac{2}{\sqrt{5}} = -2\omega_1$$

$$v_{Ex} = v_F - 2.5\omega_1 \frac{2}{2.5} = v_F - 2\omega_1, v_{Ey} = 0 - 2.5\omega_1 \frac{1.5}{2.5} = -1.5\omega_1$$

rzuty prędkości punktów *C* i *E* na kierunek elementu *CE* powinny być sobie równe:

$$v_{Cx} = v_{Ex} \Rightarrow 2\omega = v_F - 2\omega_1 \Rightarrow v_F = 2\omega + 2\omega_1$$

$$v_{Bx}\frac{2}{\sqrt{5}} + v_{By}\frac{1}{\sqrt{5}} = v_{Dx}\frac{2}{\sqrt{5}} + v_{Dy}\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad /:= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$0 - 2\omega = v_F - 2\omega_1 - 2\omega_1 \Rightarrow v_F = 2\omega_1 - \omega$$

skąd:

$$\omega = 0 \Rightarrow v_F = 2\omega_1$$

porównanie prac/mocy wirtualnych daje:

$$40 \cdot 0 + 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.5\omega_1 = H_F \cdot 2\omega_1$$

skąd:

$$H_F = \frac{150}{4 \cdot 2} = 18.75 \text{ kN}$$