5. Kratownice

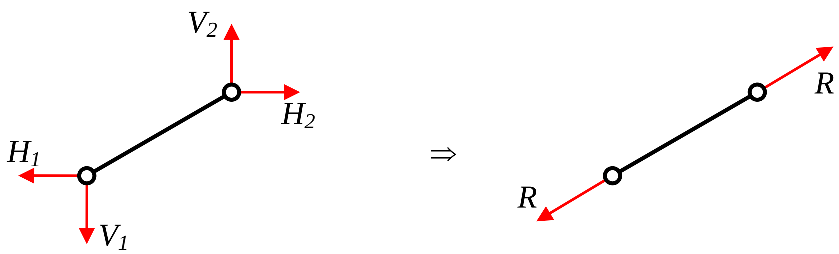
Wstęp

Definicje

pręt kratownicowy – pręt prosty, z przegubami na końcach, obciążony wyłącznie w przegubach[1] (brak jakiegokolwiek obciążenia pomiędzy przegubami)
kratownica – układ prętów kratownicowych
ściąg – pręt kratownicowy rozciągany

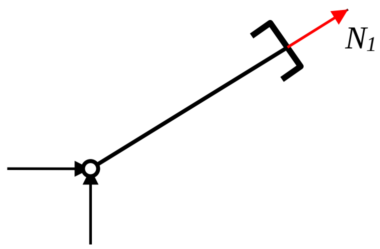
Układ sił wewnętrznych

W pręcie kratownicowym układ sił wewnętrznych redukuje się do stałej siły podłużnej. Można to łatwo wykazać, rys. 5.1.



Rys. 5.1 Równowaga pręta kratownicowego

Na przegubowych końcach moment jest równy zero. Momenty zginające i siły poprzeczne w pręcie są tożsamościowo równe zero. Pręt kratownicowy może być albo rozciągany (zwroty sił na zewnątrz) albo ściskany (zwroty sił do wewnątrz) stałą siłą podłużną. W szczególnym przypadku siła podłużna może być równa zero – taki pręt nazywamy prętem zerowym[2].
Z uwagi na specyfikę projektowania, o czym w semestrze drugim, znak siły podłużnej jest równie ważny jak sama wartość. W dalszej części przyjmujemy siłę rozciągającą za dodatnią a ściskającą – za ujemną.



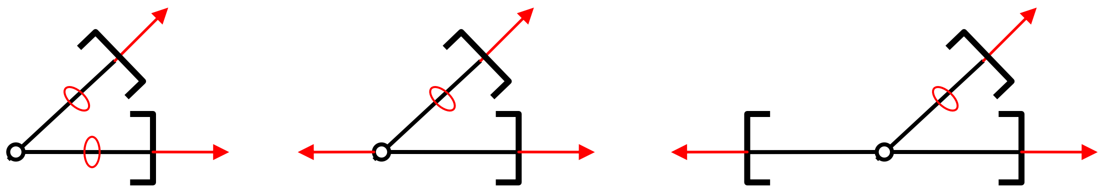
Rys. 5.2 Konwencja znakowania - rozciąganie

Twierdzenia o prętach zerowych

Pręty zerowe zaznacza się na schemacie kółeczkiem (albo “zerem”).
1. Dwa pręty połączone przegubem nieobciążonym są prętami zerowymi.
2. Jeśli dwa pręty są połączone przegubem, obciążonym w kierunku jednego z prętów, to drugi z prętów jest zerowy.

[1] dopuszcza się wyłącznie siły skupione, gdyż przegub, z oczywistych powodów, nie może być obciążony momentem skupionym
[2] pręty zerowe stosowane są znacznie częściej niż by się mogło wydawać

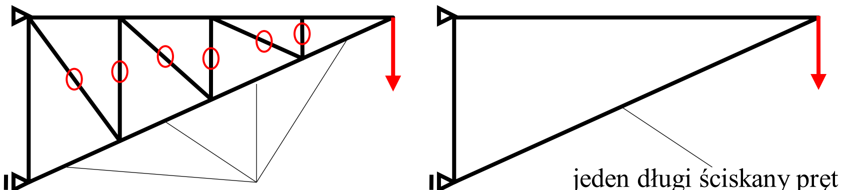
3. Jeśli w przegubie nieobciążonym schodzą się trzy pręty, przy czym dwa mają ten sam kierunek, to trzeci pręt jest zerowy.



Rys. 5.3 Twierdzenia o prętach zerowych

Wskazówka: Obliczenia kratownicy rozpoczynamy od wykrycia prętów zerowych.

Pręty zerowe są często niezbędne dla zapewnienia geometrycznej niezmienności układu, jego stabilności czy też z innych powodów mechanicznych. Na rys. 5.4, trójkątny wspornik zawiera wiele prętów zerowych, dających „podparcie” dolnemu prętowi ściskanemu[3].



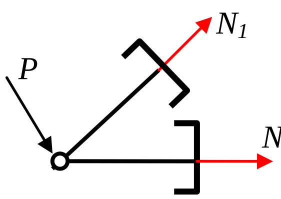
Rys. 5.4 Użycie prętów zerowych

Metody rozwiązywania kratownic

Poniżej omawiane są jedynie podstawowe metody analityczne (obliczeniowe), ale każda z nich ma swój odpowiednik graficzny (wykreślny).

Metoda równoważenia węzłów

Metoda polega na wycinaniu węzłów kratownicy[4] i obliczaniu sił w prętach z układu równań równowagi. Ponieważ układ równań równowagi jest dla węzła kratownicy (obciążonego lub nieobciążonego) układem sił zbieżnych, mamy do dyspozycji jedynie dwa liniowo niezależne równania równowagi: sumy rzutów na osie x i y. Wynika stąd, że metodę stosuje się w przypadku istnienia węzła z dwoma niewiadomymi prętami, od którego można zacząć obliczenia.



$$\left.\begin{aligned}\sum X &= 0\\ \sum Y &= 0\end{aligned}\right\} \rightarrow N_1, N_2$$

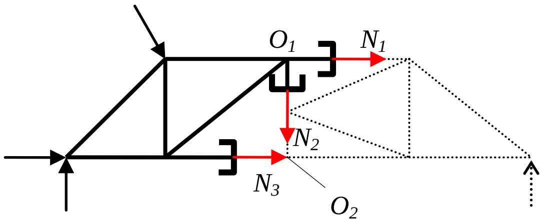
Rys. 5.5 Metoda równoważenia węzłów

Metoda Rittera

Metoda polega na rozcięciu układu przekrojem przez trzy pręty. Siły w tych prętach mogą być wyznaczone z równań równowagi podukładu.

[3] ściślej chodzi o zmniejszenie długości wyboczeniowej pręta (o czym szerzej w drugim semestrze)
[4] węzeł kratownicy to przegub z przyłączonymi prętami

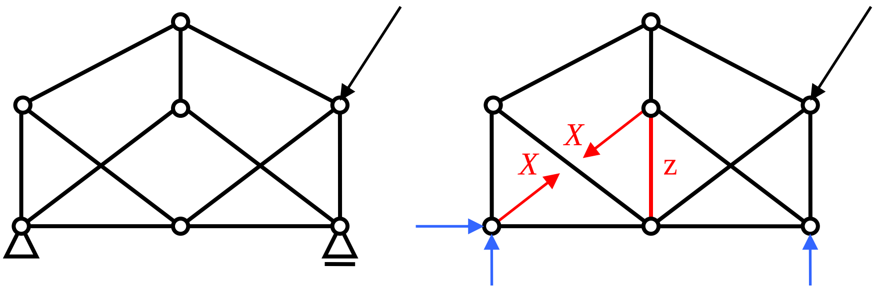
Kierunki rozcinanych prętów nie mogą przecinać się w jednym punkcie, gdyż to redukowałoby układ trzech równań równowagi do dwóch niezależnych równań rzutów na osie – jak w metodzie analitycznego równoważenia węzłów).



$$\left.\begin{array}{l}\sum O_1 = 0 \\ \sum O_2 = 0 \\ \sum Y = 0\end{array}\right\} \rightarrow N_1, N_2, N_3$$

Rys. 5.6 Metoda Rittera

Metoda Henneberga (wymiany prętów)



Rys. 5.7 Wymiana prętów

Usuwamy pręt, zastępując go jego siłą osiową X (na razie nieznaną). Ponieważ układ bez usuniętego pręta staje się chwiejny, wstawiamy dodatkowy pręt, zwany prętem zastępczym, w taki sposób, aby przywrócić geometryczną niezmienność układu. Ponieważ siła osiowa w pręcie zastępczym musi być równa zero (aby układ odpowiadał pierwotnemu), z warunku zerowania się siły w pręcie zastępczym możemy wyznaczyć siłę X w usuniętym pręcie.

Dla zapisania warunku, dwukrotnie stosujemy zasadę superpozycji: siła w pręcie zastępczym pochodzi od samo zrównoważonego układu sił X[5], $N_z(X)$, oraz od układu sił zewnętrznych (wraz z reakcjami) $N_z(P)$. Z kolei, siłę $N_z(P)$ możemy obliczyć z zasady superpozycji jako iloczyn rozwiązania dla siły jednostkowej $X = 1$ mnożonej przez (nieznaną) wartość X.

$$N_z = \underbrace{N_z(P) + N_z(X)}_{\text{superpozycja}} = N_z(P) + \underbrace{XN_z(X=1)}_{\text{superpozycja}} = 0 \quad \rightarrow \quad X = -\frac{N_z(P)}{N_z(1)}$$

W efekcie zmuszeni jesteśmy do dwukrotnego wyznaczania siły w tym samym pręcie kratownicy.

Zastosowanie zasady prac wirtualnych[6]

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi statycznej układu jest zerowanie się pracy sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych[7].

Zastosowanie tej zasady pokażemy na przykładach dalej.

[5] reakcje od samo zrównoważonego układu sił są tożsamościowo równe zero

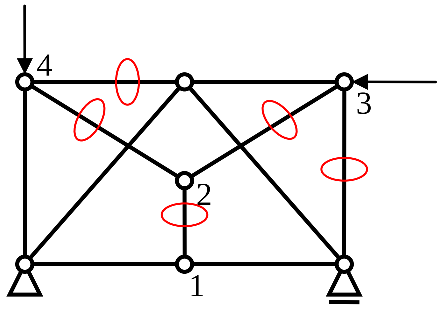
[6] zasady Lagrange'a

[7] kierunek przemieszczenia wirtualnego jest zgodny z kierunkiem prędkości wirtualnej, który z kolei musi być zgodny z narzuconymi więzami

Przykłady

Przykład identyfikacji prętów zerowych

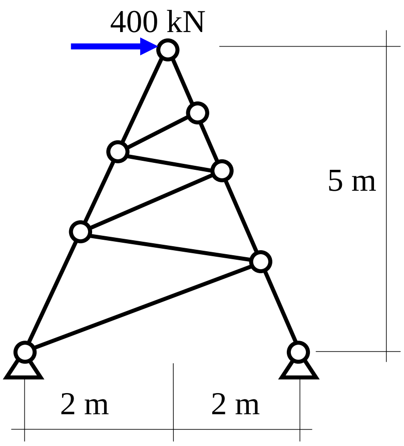
Na rys. 5.8 liczby przy węzłach oznaczają kolejność zastosowania twierdzeń o prętach zerowych. Najpierw w węźle *1* zgodnie z trzecim twierdzeniem odnajdujemy pręt zerowy, zaznaczając go “zerem”.
Teraz w węźle *2* z pierwszego twierdzenia wynika, że przyległe ukośne pręty muszą być też zerowe. Przechodzimy kolejno do węzła *3* a potem *4* .



Rys. 5.8 Identyfikacja prętów zerowych

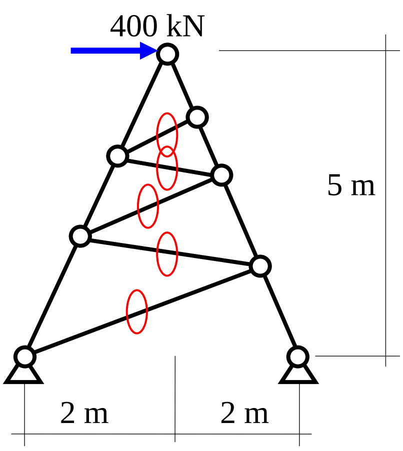
Metoda równoważenia węzłów

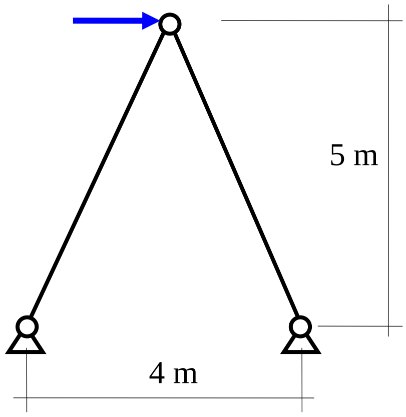
Metoda jest odpowiednia dla niewielkich układów z ograniczoną liczbą prętów.



Rys. 5.9 Prosta kratownica

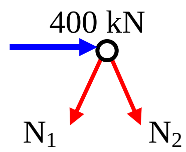
Rozpoczynamy od identyfikacji prętów zerowych, rys. 5.10. Idąc od najwyższego zastrzału do najniższego dochodzimy do wniosku, że jedynie dwa pręty są niezerowe.





Rys. 5.10 Pręty zerowe i końcowy wynik analizy

Z równowagi węzła górnego, rys. 5.11:



Rys. 5.11 Równowaga węzła

mamy:

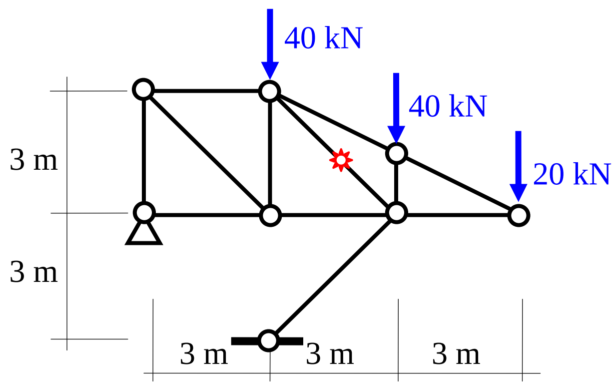
$\sum Y=0 \quad \rightarrow \quad N_1=-N_2$

$\sum X=0 \quad \rightarrow \quad 400+(-N_1+N_2)\cos\alpha=400+2N_2\dfrac{2}{\sqrt{2^2+5^2}}=400+0.7428N_2=0 \quad \rightarrow \quad N_2=-538.5, \quad N_1=538.5\,\text{kN}$

(znak minus oznacza ściskanie, plus – rozciąganie)

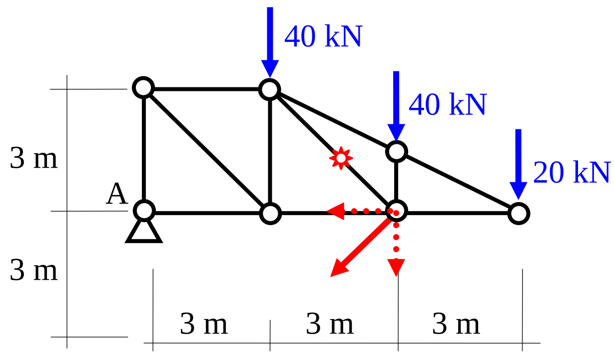
Przykład metody Rittera

Określić siłe we wskazanym gwiazdką pręcie, rys. 5.12.



Rys. 5.12 Kratownica z zaznaczonym prętem

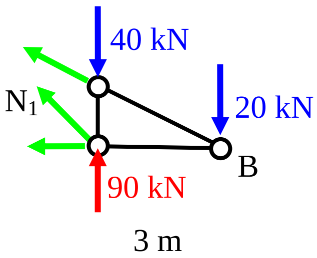
Dla rozwiązania niezbędna jest nam siła w najniższym ukośnym pręcie, a niekoniecznie wszystkie reakcje układu. Kierunek reakcji w najniższym węźle musi pokrywać się z kierunkiem pręta, rys. 5.13.



Rys. 5.13 Siła osiowa z dolnym pręcie

$\sum M_A=0 \quad \rightarrow \quad 40\cdot3+40\cdot6+20\cdot9+N\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot6=0 \quad \rightarrow \quad N=-127.3\,\text{kN}$

Kolejny przekrój, rys. 5.14, daje:



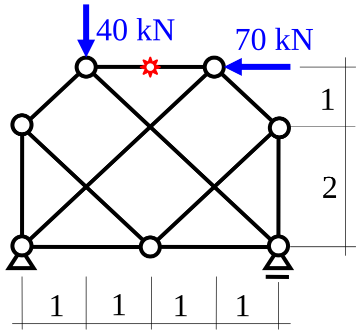
Rys.5.14 Metoda Rittera

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + 90 \cdot 3 - 40 \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -70.71\,\mathrm{kN}$$

Odpowiedź: siła osiowa we wskazanym pręcie jest równa –70.71 kN (ściskanie).

Przykład metody Henneberga

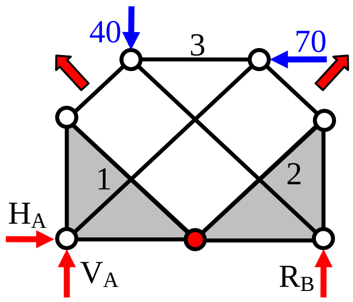
Określić siła osiową we wskazanym pręcie, rys. 5.15.



Rys. 5.15 Zadany układ

Układ nie można (w prosty sposób[8]) rozwiązać ani metodą równoważenia węzłów ani metodą Rittera. „Skazani” więc jesteśmy na metodę wymiany prętów Henneberga.

Rozważmy najpierw geometryczną niezmienność układu, rys. 5.16. Z twierdzenia 3T wynika, że układ jest wewnętrznie i zewnętrznie geometrycznie niezmienny.



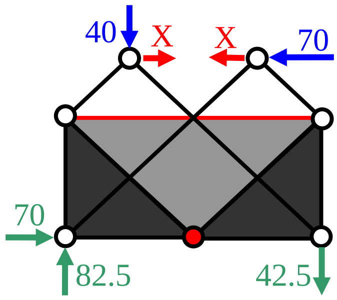
Rys. 5.16 Geometryczna niezmienność układu

Obliczenie reakcji:

$$V_A = \frac{40 \cdot 3 + 70 \cdot 3}{4} = 82.5\,\mathrm{kN}, \quad R_B = \frac{40 \cdot 1 - 70 \cdot 3}{4} = -42.5\,\mathrm{kN}, \quad H_A = 70\,\mathrm{kN}$$

Usuwamy wskazany pręt I zastępujemy go somo zrównoważonym układem sił *X*. Aby zapewnić geometryczną niezmienność wstawiamy pręt zastępczy, rys. 5.17 z równoważnym schematem statycznym.

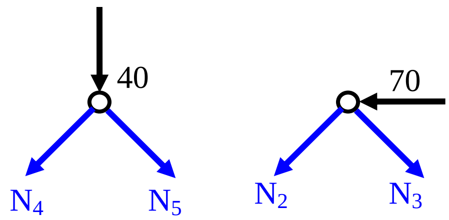
[8] tzn. można, ale jedynie poprzez dokonanie wielokrotnych przekrojów i rozwiązanie układu równań (na komputerze)



Rys. 5.17 Schemat równoważny

Obliczamy siłę osiową we wskazanym pręcie dwukrotnie: od sił zewnętrznych wraz z odpowiadającymi im reakcjami (dla tzw. układu podstawowego, kolory niebieski i zielony na rys. 5.17) i dla samo zrównoważonego układu (kolor czerwony). Na podstawie zasady superpozycji: $N = N^{(P)} + N^{(X)} = N^{(P)} + X \cdot N^{(1)}$.

Rozwiązanie dla układu podstawowego

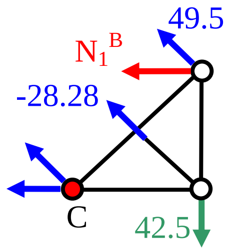


Rys. 5.18 Układ podstawowy

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; N_2 = -N_3,\;\; \sum X = 0 \;\rightarrow\; -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 - 70 = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{2}N_3 = 70 \;\rightarrow\; N_3 = 49.5\,\text{kN}$$

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; N_4 = N_5,\;\; \sum Y = 0 \;\rightarrow\; 40 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \;\rightarrow\; N_5 = -\frac{40}{\sqrt{2}} = -28.28\,\text{kN}$$

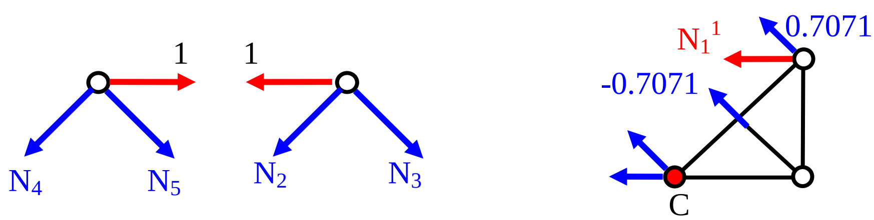
i, kolejno, por. rys. 5.19:



Rys. 5.19 Rozwiązanie dla układu podstawowego

$$\sum M_C = 0 \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 \cdot 4 + N_1^B \cdot 2 = 0 \;\rightarrow\; N_1^B = 28.28\frac{\sqrt{2}}{2} - 49.5 \cdot \sqrt{2} + 42.5 = -7.5\,\text{kN}$$

Rozwiązanie dla samo zrównoważonego układu jednostkowego



Rys. 5.20 Rozwiązanie dla układu jednostkowego

$\sum Y=0 \quad \rightarrow \quad N_2=-N3, \quad \sum X=0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2+\frac{\sqrt{2}}{2}N_3-1=0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}N_3=1 \quad \rightarrow \quad N_3=0.7071$ kN

$$\sum Y=0 \quad \rightarrow \quad N_4=-N_5, \quad \sum X=0 \quad \rightarrow \quad 1-\frac{\sqrt{2}}{2}N_4+\frac{\sqrt{2}}{2}N_5=0 \quad \rightarrow \quad N_5=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-0.7071\,\text{kN}$$

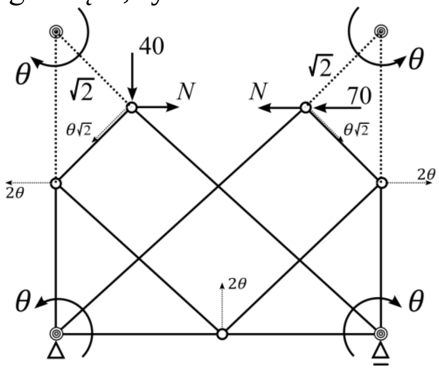
$$\sum M_C=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}N_5\cdot 2+\frac{\sqrt{2}}{2}N_3\cdot 4+N_1^1\cdot 2=0 \quad \rightarrow \quad N_1^1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0.7071=-0.5\,\text{kN}$$

We have, eventually:

$$N_1=-\frac{N_1^B}{N_1^1}=-\frac{-7.5}{-0.5}=-15\,\text{kN}$$

Rozwiązanie z zastosowaniem zasady prac wirtualnych

Usuwamy wskazany pręt, zastępując go siłą *N*, rys. 5.21



Rys. 5.21 Prędkości wirtualne

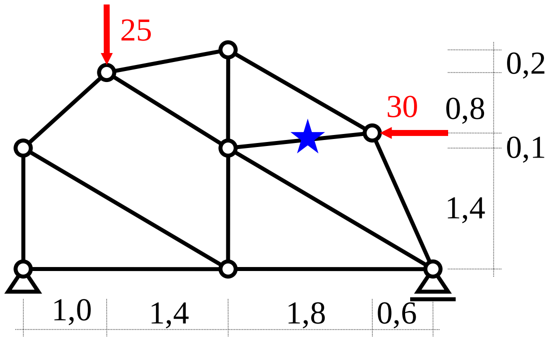
Nadajemy prędkość kątową ω tarczy w dolnym lewym rogu wokół podpory nieprzesuwnej, środkowy dolny węzeł ma prędkość liniową pionową i, w konsekwencji, na drugiej podporze przesuwnej prędkość pozioma (jak i pionowa) jest zero, pozostaje jedynie obrót z prędkością kątową (z proporcji wymiarów) równą ω. Obie podpory są chwilowymi środkami obrotu; stopniowo dochodzimy do prędkości liniowych w punktach przyłożenia siły *N*, które to prędkości rzutujemy na kierunek działania siły. Obliczamy pracę/moc wirtualną tej siły na przemieszczeniach/prędkościach wirtualnych:

$$L=0 \quad \rightarrow \quad 40\cdot\theta\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-70\cdot\theta\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-N\cdot\theta\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-N\cdot\theta\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0\rightarrow N=-15\text{ kN}$$

Ćwiczenia

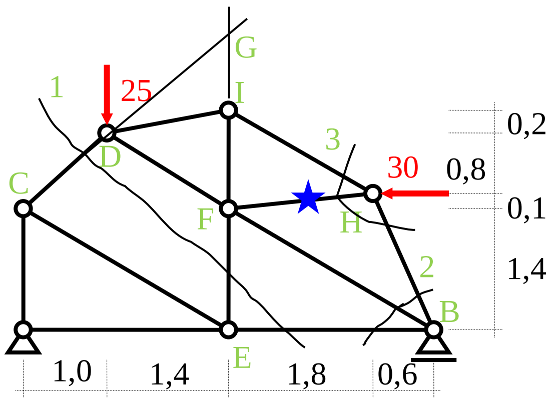
Problem 1

Określić siłę we wskazanym pręcie, rys. 5.22.



Rys. 5.22 Problem 1

Rozwiązanie metodą Rittera
Obliczenie reakcji nie nastręcza trudności:
$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 30$ kN,
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A = 29.17$ kN,
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B = -4.167$ kN
Potrzebne będą (dodatkowe, pomocnicze) przekroje *1*, *2* i *3*, rys. 5.23.

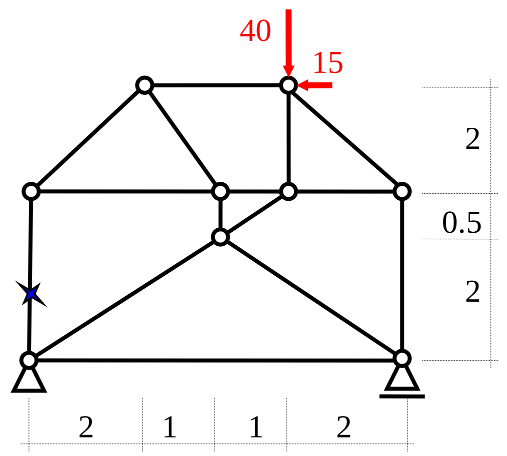


Rys. 5.23 Przekroje pomocnicze

dla przekroju *1*:
odległość EG: $EG = 1.4 + 0.9 + 1.4 \cdot 0.9 = 3.56$ m
$\Sigma M_G = 0 \rightarrow 25 \cdot 1.4 - 2.06 \cdot 30 - 4.167 \cdot 2.4 - 3.56 \cdot N_{BE} = 0 \rightarrow N_{BE} = -10.34$ kN
przekrój *2*:
$\Sigma X = 0 \rightarrow \; 10.34 - N_{BF} \cdot \frac{2.4}{\sqrt{2.4^2+1.4^2}} - N_{BH} \cdot \frac{0.6}{\sqrt{0.6^2+1.5^2}} = 0$
$\Sigma Y = 0 \rightarrow -4.17 + N_{BF} \cdot \frac{1.4}{\sqrt{2.4^2+1.4^2}} + N_{BH} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{0.6^2+1.5^2}} = 0$
czyli
$10.34 - 0.864 N_{BF} - 0.371 N_{BH} = 0$
$-4.17 + 0.504 N_{BF} + 0.928 N_{BH} = 0$
rozwiązaniem układu równań jest:
$N_{BF} = 13.09$ kN
$N_{BH} = -2.62$ kN
przekrój *3*:
$\Sigma X = 0 \rightarrow -N_{FH} \cdot \frac{1.8}{\sqrt{1.8^2+0.1^2}} - N_{HI} \cdot \frac{1.8}{\sqrt{1.8^2+1^2}} + N_{BH} \cdot \frac{0.6}{\sqrt{0.6^2+1.5^2}} - 30 = 0$
$\Sigma Y = 0 \rightarrow \; -N_{FH} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{1.8^2+0.1^2}} + N_{HI} \cdot \frac{1}{\sqrt{1.8^2+1^2}} - N_{BH} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{0.6^2+1.5^2}} = 0$
czyli
$-0.9985 \cdot N_{FH} - 0.8742 \cdot N_{HI} - 30.972 = 0$
$-0.0555 \cdot N_{FH} + 0.4856 \cdot N_{HI} + 2.431 = 0$
rozwiązaniem układu równań jest:
$N_{FH} = -24.21$ kN
$N_{HI} = -7.77$ kN
Odpowiedź: wskazany pręt jest ściskany siłą 24.21 kN.

Problem 2

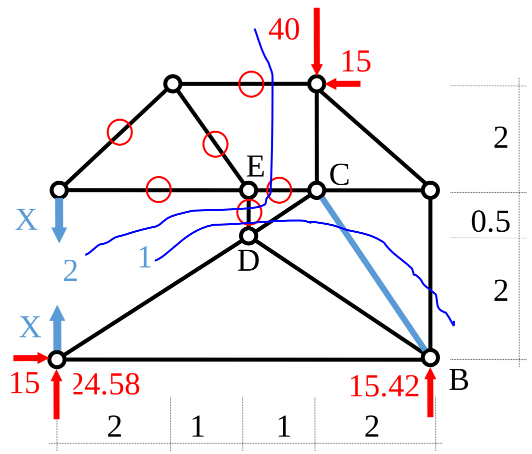
Określić siłę we wskazanym pręcie, rys. 5.24.
Rozwiązanie metodą wymiany prętów (Henneberga)
Obliczenie reakcji nie nastręcza trudności:
$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 15$ kN,
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A = 24.58$ kN,



Rys. 5.24 Problem 2

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B = 15.42$ kN

Zastępujemy wskazany pręt siłą X i wstawiamy pręt zastępczy tak, aby odtworzyć geometryczną niezmienność układu oraz – w miarę możności – ułatwić obliczenia, rys. 5.25.



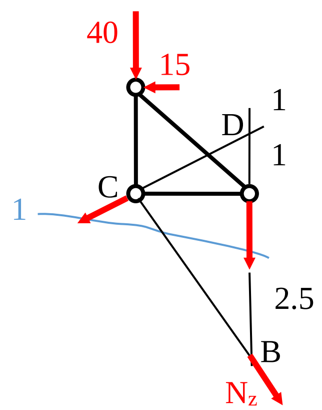
Rys. 5.25 Schemat z prętem zastępczym

<u>obciążenie podstawowe</u>

Od razu zauważamy, że dla obciążenia podstawowego (kolor czerwony) sześć prętów będzie prętami zerowymi, co odpowiednio zaznaczamy.

przekrój 1, rys. 5.26:

(siłę N_z przesuwamy do punktu B i rozkładamy na składowe: pionową i poziomą)

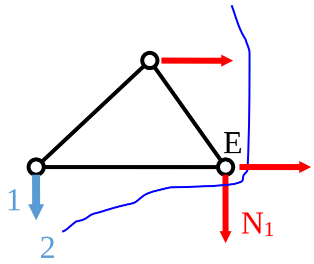


Rys. 5.26 Problem 1 przekrój 1

$\Sigma M_D = 0 \rightarrow 15 \cdot 1 + 2 \cdot 40 + 3.5 \cdot N_z \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+2.5^2}} = 0 \rightarrow N_z = -43.45$ kN

<u>obciążenie jednostkowe</u>

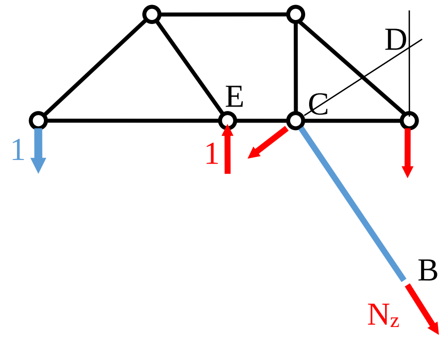
dla obciążenia jednostkowego pręty, poprzednio zerowe, nie będą już zerowe z uwagi na obciążenie przekrój 2:



Rys. 5.27 Problem 1 przekrój 2

$\Sigma Y = 0 \rightarrow N_1 = -1$

przekrój 1:



Rys. 5.28 Problem 1 przekrój 1, obciążenie jednostkowe

siłę w pręcie zastępczym przesuwamy do punktu *B* i tu rozkładamy na składowe pionową i poziomą

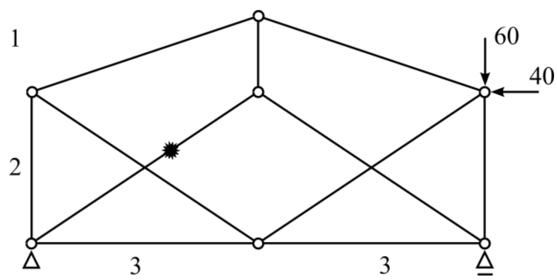
$\Sigma M_D = 0 \rightarrow 1 \cdot 6 \; - 1 \cdot 3 + N_z \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+2.5^2}} \cdot 3.5 = 0 \rightarrow N_z = -1.372$ kN

ostatecznie:

$N = -\frac{N_z(P)}{N_z(X=1)} = -\frac{-43.45}{-1.732} = -31.67$kN

Problem 3

Określić siłę we wskazanym pręcie, rys. 5.29.

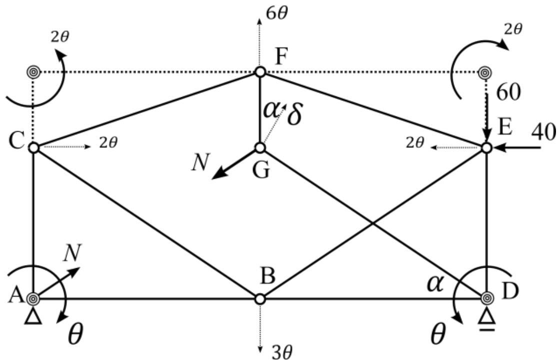


Rys. 5.29 Problem 3

Rozwiązanie metodą prac/prędkości wirtualnych

Usuwamy wskazany pręt, zastępując go siłą N. Dla tak otrzymanego mechanizmu z jednym stopniem swobody, rys. 5.30, obliczamy pracę/moc siły na wirtualnym przemieszczeniu/prędkości.

Jeśli układ ma być w równowadze, to praca (moc) musi być równa zero.



Rys. 5.30 Rozwiązanie metodą prac wirtualnych

$\delta \cos\alpha = 6\theta \quad \rightarrow \quad \delta = 2\sqrt{13}\,\theta$

$\overline{N} = N\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right), \quad \bar{\delta} = \delta\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$\overline{N} \cdot \bar{\delta} = N\delta\left(-\frac{6}{13} - \frac{6}{13}\right) = -\frac{12}{13}N\theta 2\sqrt{13} = -\frac{24}{\sqrt{13}}N\theta$

$40 \cdot 2\theta + \overline{N} \cdot \bar{\delta} = 0$

skąd, ostatecznie:

$N = \frac{80\cdot 13}{24\sqrt{13}} = 12.02$ kN