

6. Belki proste

Wstęp

Związki różniczkowe pomiędzy siłami przekrojowymi

Dla belek prostych zagadnienie brzegowe sprowadza się do równań:

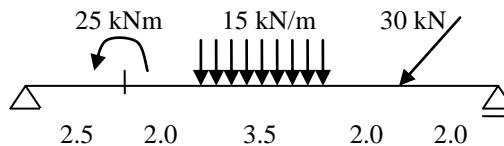
$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x), \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Stopień równania momentów jest o dwa stopnie wyższy niż obciążenia ciągłego, por. tablica poniżej.

obciążenie ciągłe	Równanie momentu gnącego (wykres)
$q = 0$, brak obciążenia ciągłego	liniowe
$q(x) = \text{const.}$	2 ^{go} stopnia (nieliniowe, parabola 2 ^{go} stopnia)
$q(x)$ liniowo zmienne	3 ^{go} stopnia (nieliniowe, parabola 3 ^{go} stopnia)

Z konwencji znakowania wynika, że wykres momentu zginającego jest wypukły w stronę działającego obciążenia ciągłego. Ponadto, maksimum momentu występuje w przekroju zerowania się siły poprzecznej.

Przykład

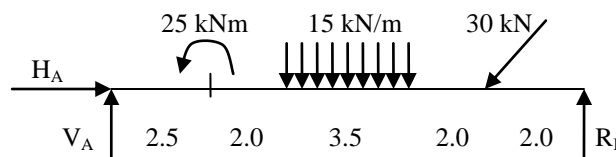


Rys. 6.1 Belka prosto podparta

Zapisać równania sił przekrojowych i narysować wykresy tych sił dla belki z rys. 6.1. Wymiary w [m] i kąt wynosi 45 stopni.

Rozwiązanie

Reakcje podpór:



Rys. 6.2 Belka wraz z reakcjami

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{25 + 15 \cdot 3.5 \cdot 5.75 + 30\sqrt{2} / 2 \cdot 2}{12} = 30.78 \text{ kN}$$

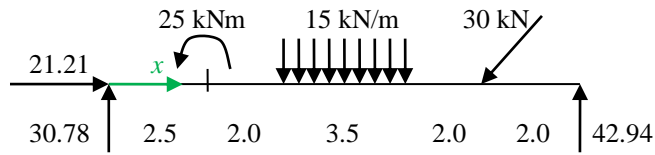
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B = \frac{-25 + 15 \cdot 3.5 \cdot 6.25 + 30\sqrt{2} / 2 \cdot 10}{12} = 42.94 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 21.21 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum Y = 15 \cdot 3.5 + 30\sqrt{2} / 2 - 30.78 - 42.94 = 52.5 + 21.21 - 73.72 = 73.71 - 73.72 = 0.01 \approx 0, \text{ OK!}$$

Równania sił przekrojowych, rys. 6.3:



Rys. 6.3 Równania sił przekrojowych – układ współrzędnych

$$\begin{cases}
 0 < x < 2.5 \\
 \begin{cases}
 M(x) = 30.78x, & M(0) = 0, & M(2.5) = 76.95 \text{ [kNm]} \\
 Q(x) = 30.78 \text{ [kN]} \\
 N(x) = -21.21 \text{ [kN]}
 \end{cases}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 2.5 < x < 4.5 \\
 \begin{cases}
 M(x) = 30.78x - 25, & M(2.5) = 51.95, & M(4.5) = 113.5 \text{ [kNm]} \\
 Q(x) = 30.78 \text{ [kN]} \\
 N(x) = -21.21 \text{ [kN]}
 \end{cases}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 4.5 < x < 8 \\
 \begin{cases}
 M(x) = 30.78x - 25 - 15 \frac{(x-4.5)^2}{2}, & M(4.5) = 113.5, & M(8) = 129.4 \text{ [kNm]} \\
 Q(x) = 30.78 - 15 \cdot (x-4.5), & Q(4.5) = 30.78, & Q(8) = -21.72 \text{ [kN]} \\
 N(x) = -21.21 \text{ [kN]}
 \end{cases}
 \end{cases}$$

(z uwagi na zmianę znaku siły poprzecznej obliczamy ekstremum momentu)

$$Q(x) = 0 \rightarrow x = 6.552, \quad M(6.552) = 145.1 \text{ [kNm]}$$

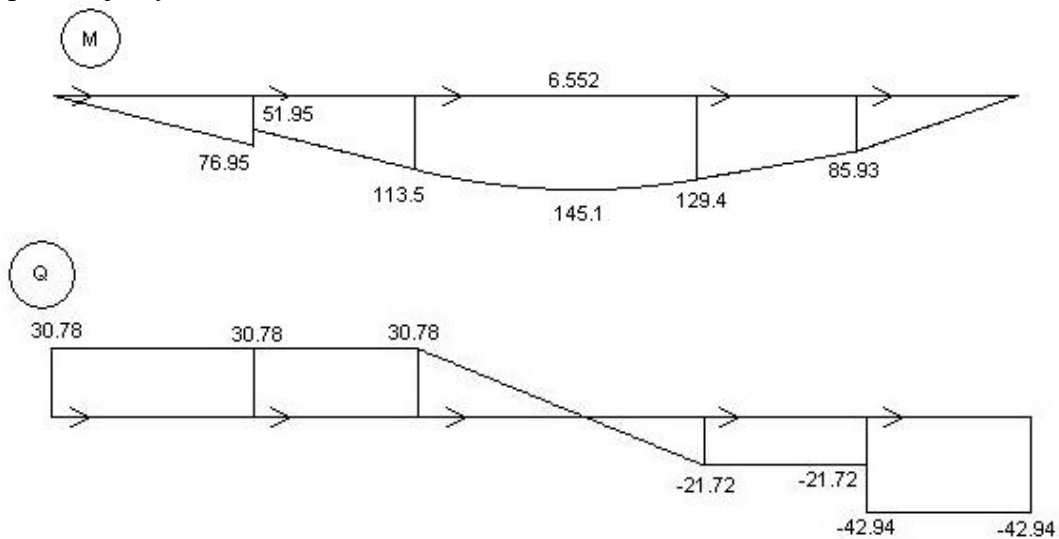
(poza przedziałem działania obciążenia ciągłego używamy wypadkowej)

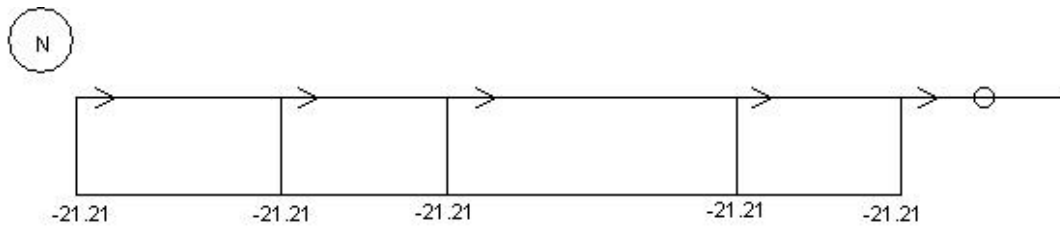
$$\begin{cases}
 8 < x < 10 \\
 \begin{cases}
 M(x) = 30.78x - 25 - 15 \cdot 3.5 \cdot (x-6.25), & M(8) = 129.4, & M(10) = 85.93 \text{ [kNm]} \\
 Q(x) = 30.78 - 15 \cdot 3.5 = -21.72 \text{ [kN]} \\
 N(x) = -21.21 \text{ [kN]}
 \end{cases}
 \end{cases}$$

(dla ostatniego przedziału od drugiej strony, x_1)

$$\begin{cases}
 0 < x_1 < 2 \\
 \begin{cases}
 M(x_1) = 42.94x_1, & M(0) = 0, & M(2) = 85.88 \text{ [kNm]} \cong M(x=10) \\
 Q(x_1) = -42.94 \text{ [kN]}, & \text{ver.: } Q(x=10) - P_V = -21.72 - 30\sqrt{2} / 2 = -42.93 \cong -42.94, \text{ OK} \\
 N(x_1) \cong 0
 \end{cases}
 \end{cases}$$

Wykresy sił przekrojowych:

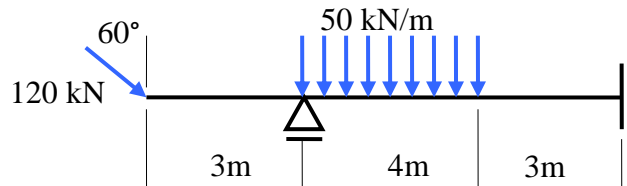




Rys. 6.4 Wykresy sił przekrojowych

Problem 1

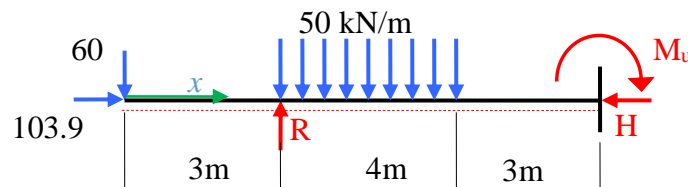
Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla belki z rys. 6.5.



Rys. 6.5 Belka prosta

Rozwiązanie

obliczenie reakcji, rys. 6.6:



Rys. 6.6 Reakcje belki

$$\sum Y = 0 \rightarrow 60 + 50 \cdot 4 - R = 0 \rightarrow R = 260 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow 103.9 - H = 0 \rightarrow H = 103.9 \text{ kN}$$

$$\sum M_R = 0 \rightarrow 60 \cdot 3 - 50 \cdot 4 \cdot 2 + M_u = 0 \rightarrow M_u = 220 \text{ kNm}$$

Spr. $\sum M_0 = -50 \cdot 4 \cdot 5 + 260 \cdot 3 + 220 = 0$, OK

Równania sił przekrojowych (przedziałami charakterystycznymi, spody od dołu)

$$0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$M(x) = -60x, \quad M(0) = 0, \quad M(3) = -180 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -60 \text{ kN}$$

$$N(x) = -103.9 \text{ kN}$$

$$3 \leq x \leq 7 \text{ m}$$

$$M(x) = -60x + 260 \cdot (x - 3) - 50 \cdot \frac{(x-3)^2}{2}, \quad M(3) = -180 \text{ kNm}, \quad M(7) = 220 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -60 + 260 - 50 \cdot (x - 3), \quad Q(3) = 200 \text{ kN}, \quad Q(7) = 0$$

(zerowanie się siły poprzecznej oznacza ekstremum momentów dla $x = 7$)

$$N(x) = -103.9 \text{ kN}$$

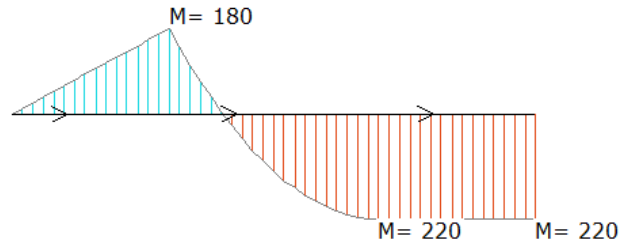
$$7 \leq x \leq 11 \text{ m}$$

$$M(x) = -60x + 260 \cdot (x - 3) - 200 \cdot (x - 5), \quad M(7) = 220 \text{ kNm}, \quad M(11) = 220 \text{ kNm}$$

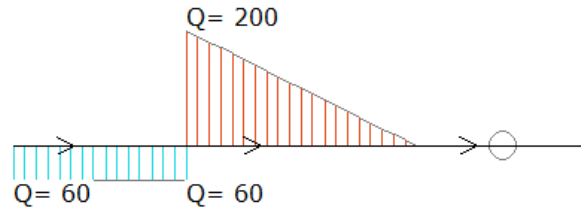
$$Q(x) = -60 + 260 - 200 = 0$$

$$N(x) = -103.9 \text{ kN}$$

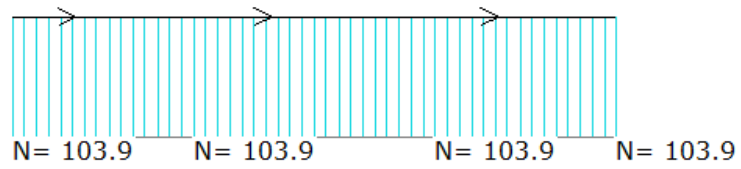
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy sił przekrojowych, uzyskane z programu ©statyka



Rys. 6.7 Wykres momentów zginających



Rys. 6.8 Wykres sił poprzecznych



Rys. 6.9 Wykres sił podłużnych