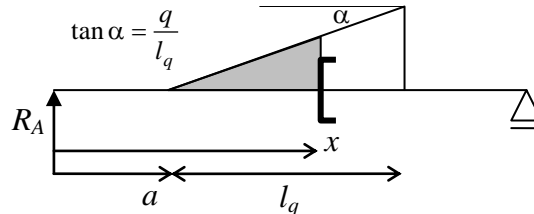


7. Belki – cd.

Wstęp

Obciążenie ciągle o liniowo zmiennej intensywności

Obciążenie trójkątne o rosnącej intensywności



Rys. 7.1 Obciążenie trójkątne, rosnąca intensywność

Ponieważ cięcie w przekroju x oznacza konieczność redukcji obciążenia znajdującego się po jednej stronie przekroju, interesuje nas moment od zakreskowanej części obciążenia. Obliczamy go:

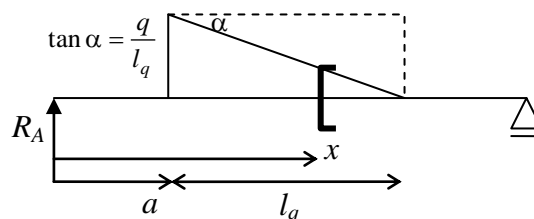
- obliczając bieżącą wartość intensywności z tangensa
- wypadkowa obciążenia równa jest połowie iloczynu wartości bieżącej i podstawy (równa jest polu trójkąta)
- ramię siły jest równe $1/3$ podstawy trójkąta, licząc od przekroju cięcia

$$M(x) = R_A x - \underbrace{\frac{q}{l_q} (x-a)}_{\text{wartość } q(x)} \cdot \underbrace{\frac{x-a}{2}}_{\frac{1}{2} \text{ podstawy}} \cdot \underbrace{\frac{x-a}{3}}_{\text{ramię}} = R_A x - \frac{q}{l_q} \cdot \frac{(x-a)^3}{6}$$

wypadkowa moment od trójkąta

Obciążenie trójkątne o malejącej intensywności

Dla obciążenia liniowego o malejącej intensywności, interesująca nas część obciążenia ma kształt trapezu, który nie jest prosty w zapisie¹ i prościej jest zastąpić go (z superpozycji) prostokątem, opisanym na trapezie, z odjętym trójkątem (o rosnącej intensywności, co już było powyżej), rys. 7.2.



Rys. 7.2 Obciążenie trójkątne, intensywność malejąca

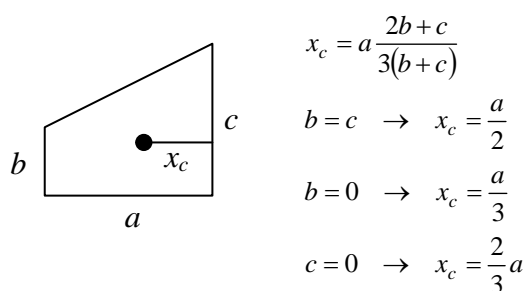
$$M(x) = R_A x - q \cdot \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{\text{prostokąt}} + \underbrace{\frac{q}{l_q} \cdot (x-a)}_{\text{wartość } q(x)} \cdot \underbrace{\frac{x-a}{2}}_{\frac{1}{2} \text{ podstawy}} \cdot \underbrace{\frac{x-a}{3}}_{\text{ramię}} = R_A x - q \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{q}{l_q} \cdot \frac{(x-a)^3}{6}$$

moment od odejmowanego trójkąta

Obciążenie trapezowe

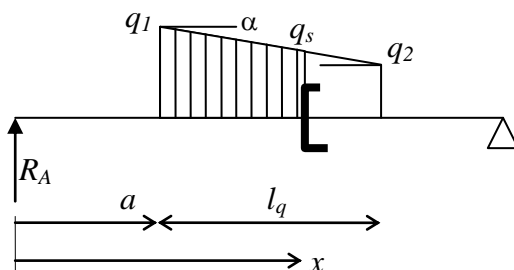
Położenie środka ciężkości trapezu:

¹ chyba że pamiętamy wzór na położenie środka ciężkości trapezu i jego pole



Rys. 7.3 Środek ciężkości trapezu

Obliczmy moment gnący pochodzący od obciążenia trapezowego, rys. 7.4



Rys. 7.4 Obciążenie trapezowe

1) Metoda wprost, nie zalecana

obliczenie q_s : $q_s = q_1 - \underbrace{\frac{q_1 - q_2}{l_q}}_{\text{tga}} (x_s - a)$

obliczenie momentu: $M(x) = R_A x - \underbrace{\frac{q_1 - q_2}{2}}_{\text{średnia wypadkowa}} \cdot (x - a) \cdot \underbrace{\frac{2q_1 + q_s}{3(q_1 + q_s)}}_{\text{ramię}}$

2) Metoda nie całkiem naturalna, ale zalecana

a) $q_1 > q_2$ (intensywność malejąca)

$$M(x) = R_A x - \left[\underbrace{q_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2}}_{\text{prostokąt}} - \underbrace{\frac{q_1 - q_2}{l_q}}_{\text{tg } \alpha} \cdot (x-a) \cdot \underbrace{\frac{x-a}{2} \cdot \frac{x-a}{3}}_{\text{trójkąt}} \right]$$

b) $q_1 < q_2$ (intensywność rosnąca)

$$M(x) = R_A x - \left[\underbrace{q_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2}}_{\text{prostokąt}} + \underbrace{\frac{q_2 - q_1}{l_q} \cdot \frac{(x-a)^3}{6}}_{\text{trójkąt}} \right]$$

Łącząc wyniki z obu powyższych przypadków w jeden ogólny wzór, mamy:

$$M(x) = R_A x - q_1 \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{l_q} \frac{(x-a)^3}{6}$$

Zasady szkicowania wykresów bez obliczeń

Szkicowanie wykresów bez uprzednich obliczeń ma na celu wyrobienie świadomości, jakiego typu wykresu należy się spodziewać w konkretnym zadaniu.

Wykres momentów zginających

- szpice (ostre załamania) są skierowane zgodnie z działającą siłą skupioną
- momenty zerują się na końcach belki, jeśli nie ma tam przyłożonego momentu skupionego
- moment skupiony rozsuwa wykres, dając skok równy wartości przyłożonego momentu
- skok na wykresie występuje wyłącznie w przekrojach obciążonych momentem skupionym
- obciążenie ciągłe daje nieliniowy wykres momentu; wypukłość wykresu jest zgodna ze zwrotem działającego obciążenia
- nie ma załamań na końcach przedziału z obciążeniem ciągłym

Wykres sił poprzecznych

- skok siły poprzecznej jest zgodny ze zwrotem i wartością przyłożonej siły skupionej
- nie ma wizualnego efektu obciążenia momentem skupionym na wykres sił poprzecznych (efekt ten pojawia się pośrednio poprzez reakcje)
- nie ma skoku siły poprzecznej na końcach przedziału z obciążeniem ciągłym
- zmienność siły poprzecznej wynika z intensywności obciążenia ciągłego (gdy intensywność rośnie, zmiana siły poprzecznej jest więcej niż proporcjonalna, a gdy intensywność maleje – odwrotnie)

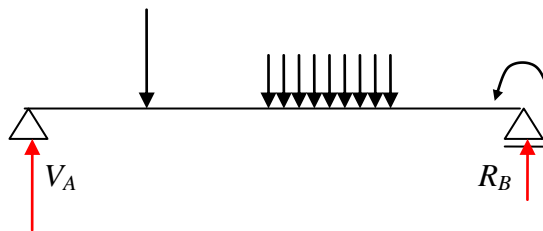
Zadanie odwrotne

Obciążenie belki może być (w całości) odtworzone na podstawie wykresu momentów zginających. Na podstawie wykresu sił poprzecznych można odtworzyć obciążenie belki z dokładnością do momentu skupionego.

Przykład

Szkicowanie wykresów bez obliczeń

Naszkuje wykresy sił przekrojowych belki z rys. 7.5 bez wykonywania obliczeń, uwzględniając wszystkie możliwości.



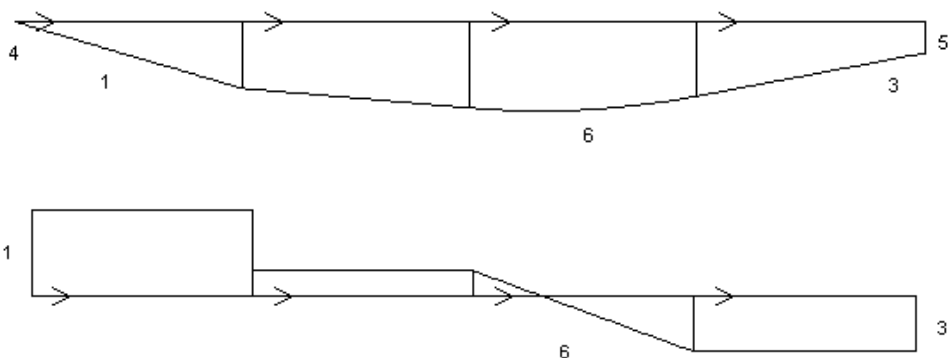
Rys. 7.5 Belka z obciążeniem

Rozwiązanie

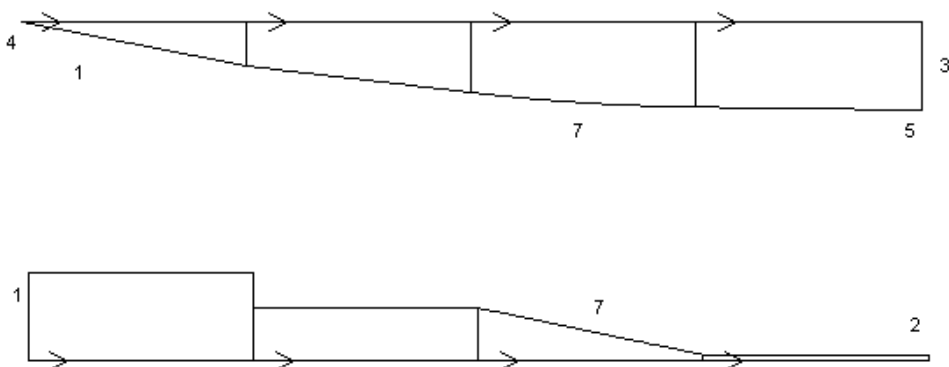
1. Reakcje: reakcja R_A musi być do góry, co wynika z każdego z działających obciążeń. W pierwszym przedziale dolne włókna są rozciągane.
2. Zwrot R_B nie jest oczywisty: dla znaczącej wartości momentu skupionego reakcja może być skierowana w dół.
3. W przeciwnym razie działa do góry.
4. Momenty gnące na końcach: w punkcie A moment jest równy zero.
5. Moment zginający w punkcie B jest równy przyłożonemu momentowi skupionemu, dolne włókna są rozciągane.
6. Moment zginający w przedziale z obciążeniem ciągłym powinien być wypukły w dół; pozostaje pytanie o istnienie ekstremum momentu. Zależy to od zmiany znaku siły poprzecznej: w miejscu zerowania się siły tnącej moment jest ekstremalny (minimalny bądź maksymalny, tutaj byłoby maksimum).

7. Jeśli siła poprzeczna nie zmienia znaku (zależy to w dużej mierze od wartości siły skupionej), może w całości być albo dodatnia
8. albo w całym przedziale ujemna.

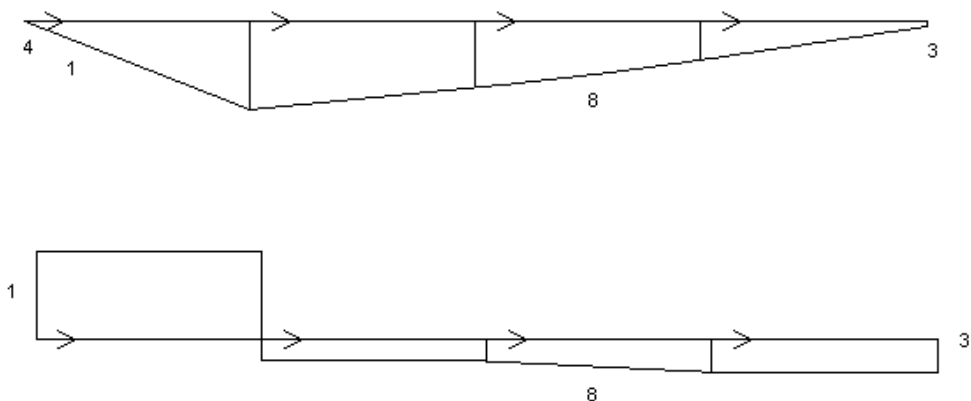
Łącząc powyższe przesłanki otrzymujemy szkice momentów zginających, rys. 7.6, rys. 7.7 i rys. 7.8²



Rys. 7.6 Obie reakcje w górę, występuje ekstremum momentu gnącego



Rys. 7.7 Reakcje o przeciwnych zwrotach, bez ekstremum momentu gnącego

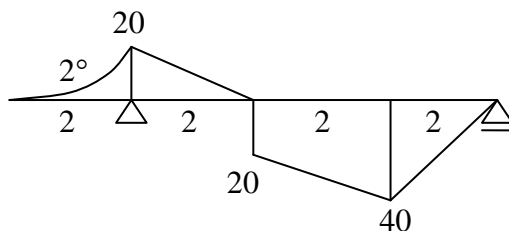


Rys. 7.8 Reakcje do góry bez ekstremum momentu gnącego

² liczby przy wykresach odnoszą się do odpowiednich punktów rozważań wstępnych

Problem odwrotny

Odtworzyć obciążenie belki, której wykres momentów (wraz ze schematem podparcia) podano na rys. 7.9.

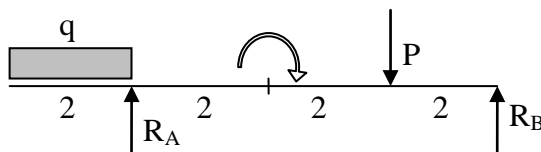


Rys. 7.9 Wykres momentów zginających

Rozwiązanie

Zaczynamy od określenia rodzajów obciążenia:

1. W pierwszym przedziale (wspornik) działa obciążenie ciągłe o stałej intensywności (dające parabolę 2. stopnia)
2. W pozostałych przedziałach nie ma obciążenia ciągłego (wykres jest liniowy)
3. W kolejnych punktach charakterystycznych działają obciążenia skupione: siła reakcji do góry, moment skupiony zegarowo (dolne włókna z prawej rozciągane), siła skupiona w dół i reakcja w górę, rys. 7.10. Nie ma siły skupionej w przekroju działającego momentu skupionego ponieważ linie są równoległe (tylko „rozsunięcie” wykresu).

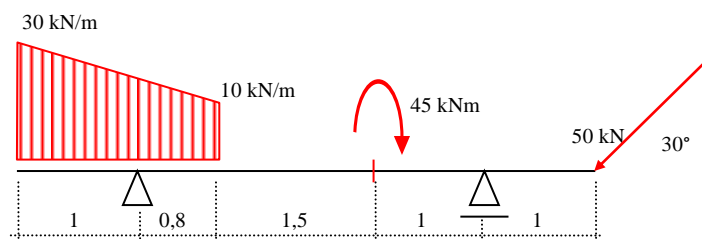


Rys. 7.10 Odtworzone obciążenie belki

4. Dla skrajnych przedziałów obliczamy: $M = \frac{qa^2}{2} = 20$, $a = 2 \rightarrow q = 10$ i $R_B = 20$.
5. Z wartości momentów w kolejnych punktach charakterystycznych otrzymujemy: $R_A = 20$, $P = 30$. W ten sposób zrekonstruowaliśmy obciążenie belki.

Ćwiczenie

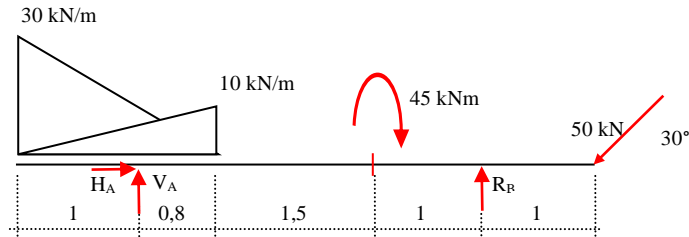
Dla belki z rys. 7. 11 obliczyć reakcje, zapisać równania sił przekrojowych i sporządzić wykresy sił przekrojowych.



Rys. 7.11 Belka z obciążeniem

Rozwiązanie

Obliczając reakcje, rys. 7.12, rozbijamy obciążenie trapezowe na dwa obciążenia trójkątne.



Rys. 7.12 Belka z reakcjami

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A - 50 \cdot \cos(30) = 0 \rightarrow H_A = 43.3 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -3.3 \cdot V_A + 0.5 \cdot 1.8 \cdot 10 \cdot 3.1 + 0.5 \cdot 1.8 \cdot 30 \cdot 3.7 - 45 - 25 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_A = 17.51 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 0.5 \cdot 1.8 \cdot 30 \cdot 0.4 - 0.5 \cdot 1.8 \cdot 10 \cdot 0.2 - 45 - 25 \cdot 4.3 + 3.3 \cdot R_B = 0 \rightarrow R_B = 43.48 \text{ kN}$$

$$\text{Spr.: } \Sigma Y = 0.5 \cdot 1.8 \cdot (30 + 10) + 25 - 17.51 - 43.48 = 0.01 \approx 0, \text{ OK}$$

Równania sił przekrojowych:

$$x \leq 0 \leq 1$$

$$M(x) = -30 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{20}{1.8} \cdot \frac{x^3}{6}, M(0) = 0, M(1) = -13.15 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -30 \cdot x + \frac{20}{1.8} \cdot \frac{x^2}{2}, Q(0) = 0, Q(1) = -24.44 \text{ kN}$$

$$N(x) \equiv 0$$

$$0.8 \leq x \leq 1.8$$

$$M(x) = -30 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{20}{1.8} \cdot \frac{x^3}{6} + 17.51 \cdot (x - 1), M(1) = -13.15 \text{ kNm}, M(1.8) = -23.79 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -30 \cdot x + \frac{20}{1.8} \cdot \frac{x^2}{2} + 17.51, Q(1) = -6.93 \text{ kN}, Q(1.8) = -18.49 \text{ kN}$$

$$N(x) = -43.3 \text{ kN}$$

$$1.8 \leq x \leq 3.3$$

(obciążenia ciągle zastępujemy wypadkowymi 27 kN i 9 kN)

$$M(x) = -27 \cdot (x - 0.6) - 9 \cdot (x - 1.2) + 17.51 \cdot (x - 1), M(1.8) = -23.79 \text{ kNm}, M(3.3) = -51.53 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -36 + 17.51 = -18.49 \text{ kN}$$

$$N(x) = -43.3 \text{ kN}$$

$$3.3 \leq x \leq 4.3$$

$$M(x) = -27 \cdot (x - 0.6) - 9 \cdot (x - 1.2) + 17.51 \cdot (x - 1) + 45, M(3.3) = -6.53 \text{ kNm}, M(4.3) = -25 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -36 + 17.51 = -18.49 \text{ kN}$$

$$N(x) = -43.3 \text{ kN}$$

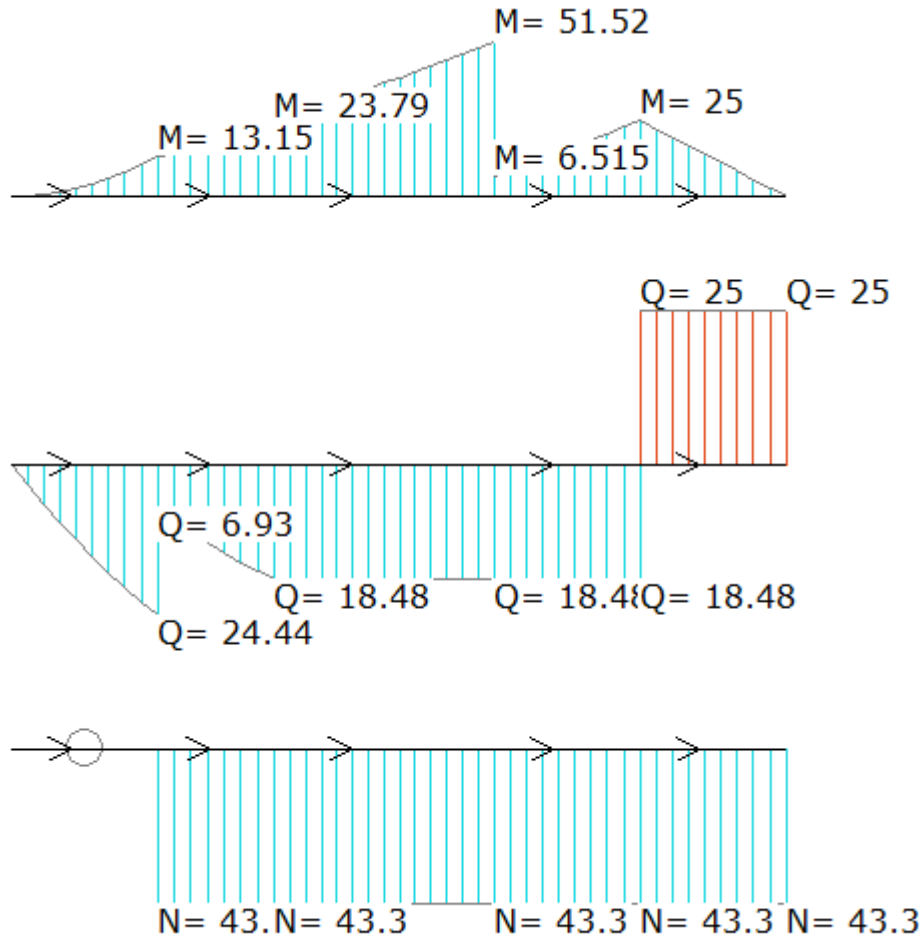
$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ (od drugiej strony)}$$

$$M(x) = -25 \cdot x_1, M(0) = 0, M(1) = -25 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = 25 \text{ kN}$$

$$N(x) = -43.3 \text{ kN}$$

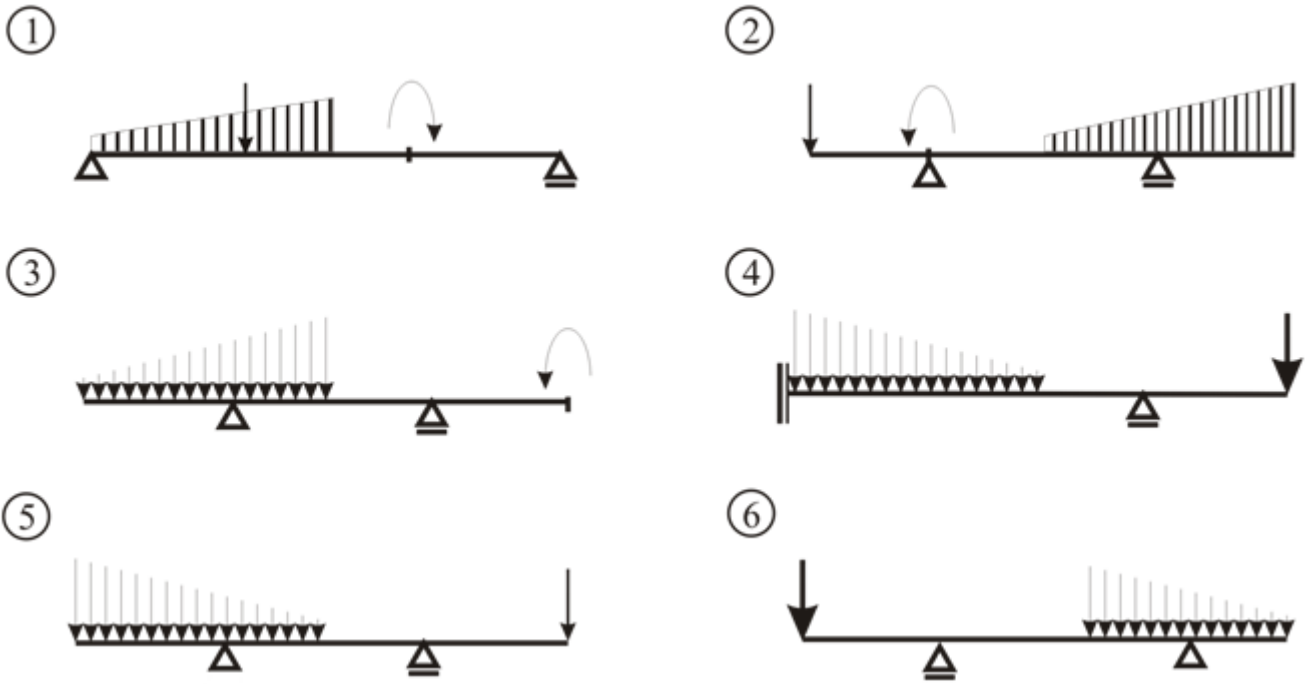
Wykresy sił przekrojowych, uzyskanych z programu *statyka.exe* przedstawia rys. 7.13.



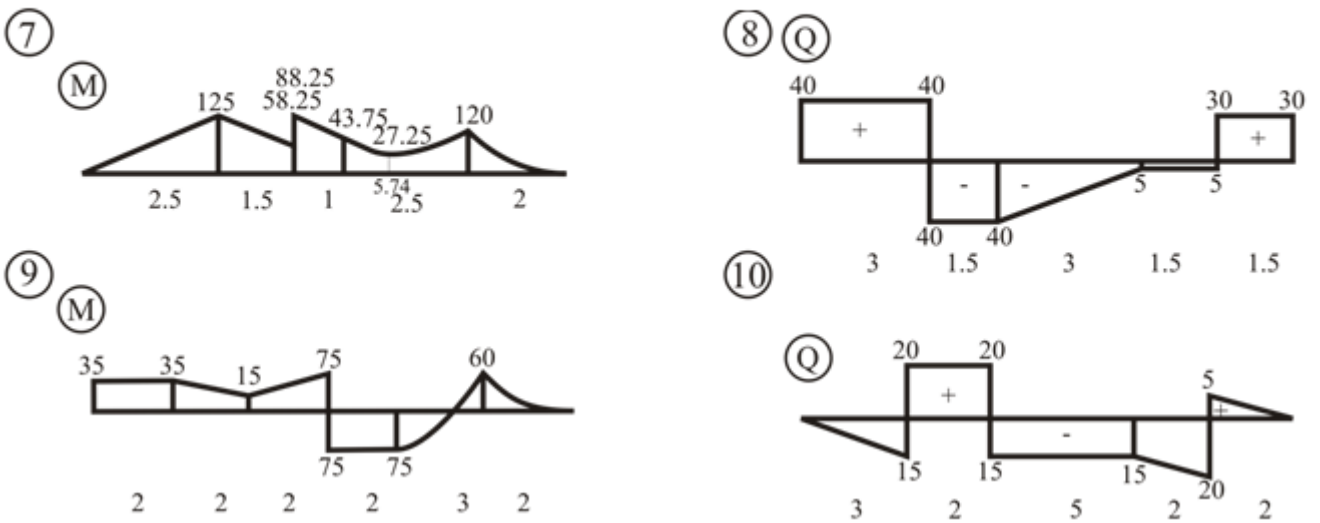
Rys. 7.13 Wykresy sił przekrojowych

Zadania do samodzielnego rozwiązania, rys. 7.14

(w zadaniach 7-10 odtworzyć obciążenie belki)



odtworzyć obciążenie belki



Rys. 7.14 Belki do samodzielnego rozwiązania