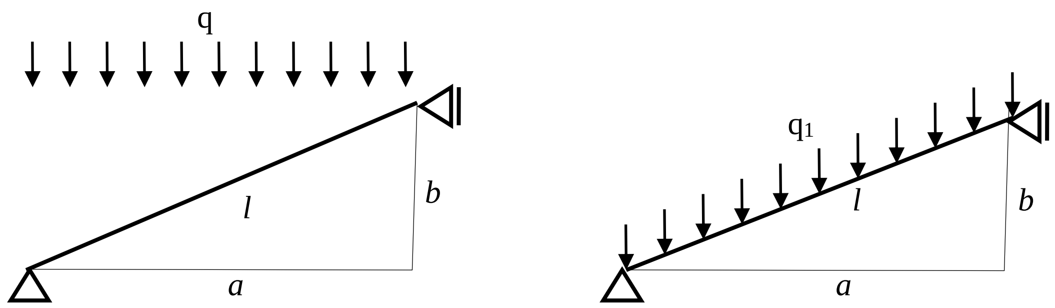
8. Belki ukośne

Wstęp

Intensywność obciążenia ciągłego może być określona na dwa sposoby:
- jako intensywność na metr (w rzucie poziomym/pionowym)
- jako intensywność na metr bieżący belki.

Oba warianty są rysowane odmiennie, rys. 8.1.



wypadkowa = qa wypadkowa = $q_1 l$

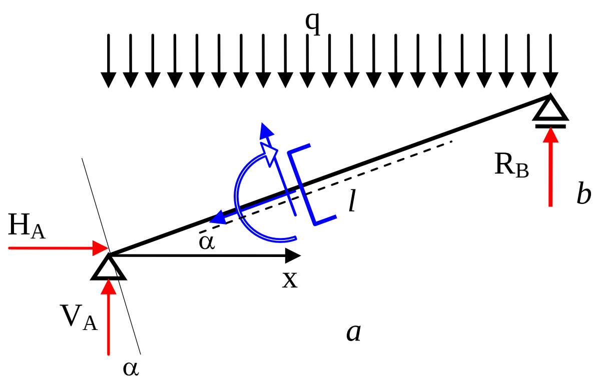
Rys. 8.1 Różne definicje intensywności obciążenia ciągłego

Oba warianty mogą być wzajemnie przeliczane, ponieważ: $qa = q_1 l$.

Przykłady

Przykład 1

Intensywność pionowego obciążenia ciągłego dana jest na metr rzutu, rys. 8.2.



Rys. 8.2 Belka ukośna z pionowym obciążeniem ciągłym

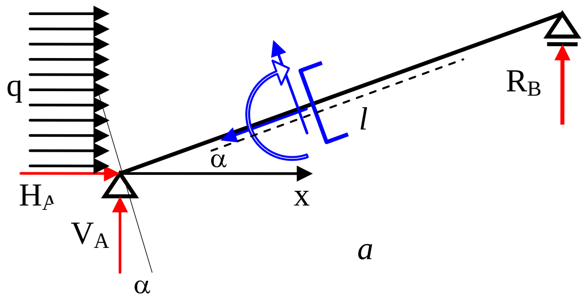
$$M(x) = V_A x - H_A y(x) - \frac{qx^2}{2}, \qquad \left(= V_A x - H_A x \underbrace{\frac{b}{a}}_{\mathrm{tg}\alpha} - \frac{qx^2}{2} \right)$$

$Q(x) = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - qx\cos\alpha$ (uwaga: $Q(x) = \frac{dM(s)}{ds} = \frac{dM(x)}{dx}\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \frac{dM(x)}{dx}$)

$N(x) = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha + qx\sin\alpha$

Przykład 2

Intensywność poziomego obciążenia ciągłego jest dana w rzucie na metr, rys. 8.3.

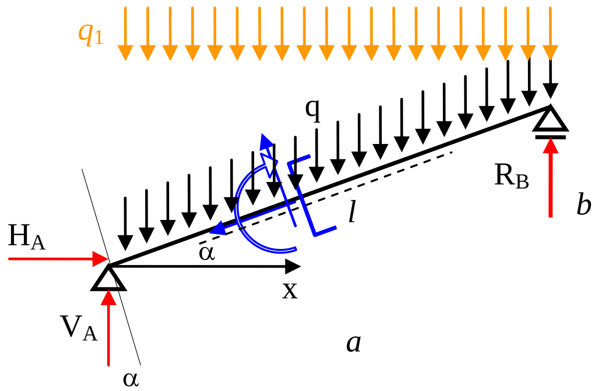


Rys. 8.3 Belka ukośna z poziomym obciążeniem ciągłym

$$M(x) = V_A x - H_A y - \frac{qy^2}{2}$$
$$Q(x) = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - qy\sin\alpha$$
$$N(x) = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha - qy\cos\alpha$$

Przykład 3

Intensywność pionowego obciążenia ciągłego jest dana na metr bieżący belki, rys. 8.4.



Rys. 8.4 Belka ukośna z pionowym obciążeniem ciągłym

Intensywność obciążenia na metr bieżący belki może być przeliczona na metr w rzucie: $q_1 = \frac{l}{a} q$,

i dalsze obliczenia będą takie same jak w przykładzie 1.

Można jednak zapisać równania sił przekrojowych „bezpośrednio” (nie zalecane):

$$M(x) = V_A x - H_A y - \underbrace{qx\frac{l}{a}}_{\text{wypadkowa}} \cdot \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{ramię}}$$

$$Q(x) = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - qx\frac{l}{a}\cos\alpha$$

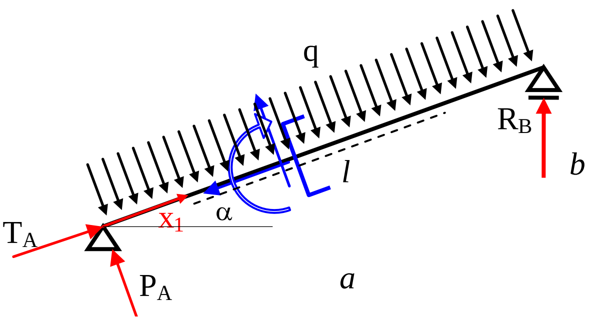
$$N(x) = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha + qx\frac{l}{a}\sin\alpha$$

ponownie sprawdzamy, że pochodna momentu jest (co do znaku) równa sile poprzecznej:

$$\frac{\partial M(s)}{\partial s} = \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \left(V_A - H_A \tan\alpha - qx \cdot \frac{l}{a}\right) \cdot \cos\alpha = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - qx \cdot \frac{l}{a} \cdot \cos a$$

Przykład 4

Obciążenie ciągłe jest prostopadłe do osi belki, rys. 8.5.



Rys. 8.5 Belka ukośna z obciążeniem ciągłym prostopadłym do osi

Obciążenie ciągłe prostopadłe do osi belki może być rozłożone na dwa obciążenia: pionowe i poziome, o tej samej intensywności (por. 1. Wstęp).

Niemniej jednak problem może być rozwiązywany jako prosto podparta belka obrócona o kąt α. Ponieważ składowe reakcji w punkcie *A* mogą być wybrane arbitralnie, najprościej jest przyjąć kierunki składowych jak I układu współrzędnych jako prostopadłe i styczne do osi belki (P_A – prostopadłe, T_A – styczne).

(1szy wariant)

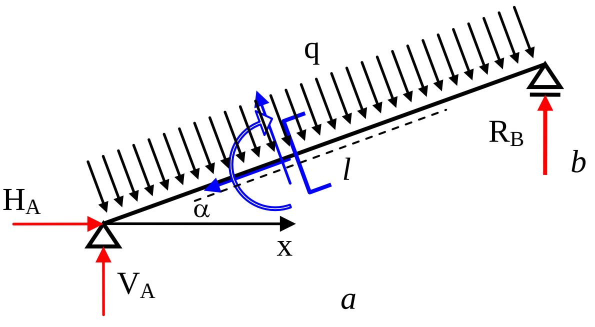
$$M(x_1) = P_A x_1 - \frac{q x_1^{\,2}}{2}$$

$$Q(x_1) = P_A - q x_1$$

$$N(x_1) = -T_A$$

Równanie sił przekrojowych mogą być także zapisane w innym układzie, bez obrotu, rys. 8.6.

(2gi wariant)



Rys. 8.6 Układ współrzędnych nie obrócony

$$M(x) = V_A x - H_A y - \frac{q x_1^2}{2} = V_A x - H_A y - \frac{q}{2}\left(x\frac{l}{a}\right)^2$$

$$Q(x) = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - q x_1 = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - q x \frac{l}{a}$$

$$N(x) = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha$$

Sprawdźmy siłę poprzeczną. Ponieważ $V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha = P_A$ oraz $q x \frac{l}{a} = q x_1$, rozwiązania są identyczne.

Dokonując dekompozycji obciążenia na składowe poziomą i pionową, mamy:

(3ci wariant)

$$M(x) = V_A x - H_A y - \frac{qx^2}{2} - \frac{qy^2}{2} = V_A x - H_A y - \frac{qx^2}{2}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) = \ldots = V_A x - H_A y - \frac{qx_1^{\,2}}{2}$$

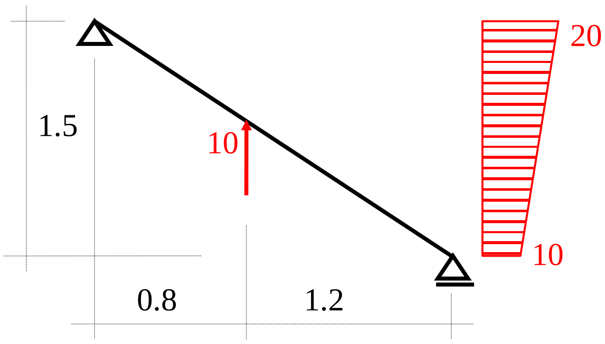
$$Q(x) = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - qx\cos\alpha - qy\sin\alpha = V_A\cos\alpha - H_A \sin\alpha - qx\frac{l}{a}\left(= P_A - qx_1\right)$$

$$N(x) = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha + qx\sin\alpha - qy\cos\alpha = \ldots = -T_A$$

Ćwiczenia

Problem 1

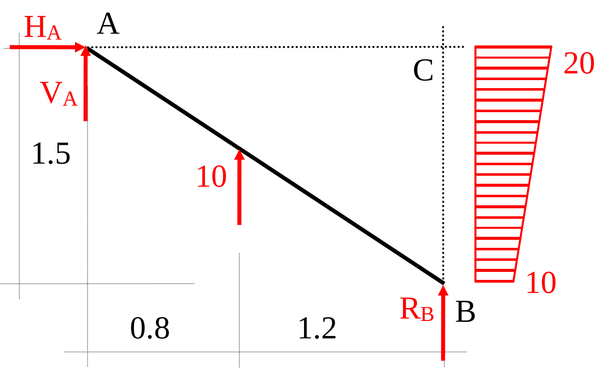
Określić reakcje, zapisać równania i sporządzić wykresy sił przekrojowych dla belki z rys. 8.7.



Rys. 8.7 Problem 1

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji, rys. 8.8.



Rys. 8.8 Reakcje układu – problem 1

$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 0.5 \cdot (20 + 10) \cdot 1.5 = 22.5$ kN

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow -2 \cdot V_A - 1.2 \cdot 10 - 0.5 \cdot 1.5 \cdot 20 \cdot 0.5 - 0.5 \cdot 1.5 \cdot 10 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_A = -13.5$ kN

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 2 \cdot R_B + 10 \cdot 0.8 - 0.5 \cdot 1.5 \cdot 20 \cdot 0.5 - 0.5 \cdot 1.5 \cdot 10 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_B = 3.5$ kN

Spr.: $\Sigma Y = 13.5 - 10 - 3.5 = 0$, OK

Równania sił przekrojowych, rys. 8.9.

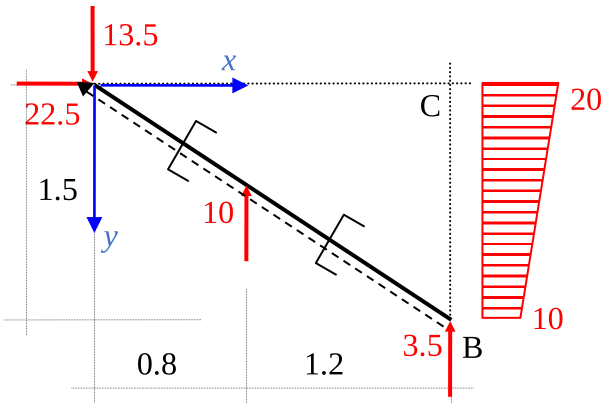
$0 \leq x \leq 0.8$

$M(x) = -13.5 \cdot x + 22.5 \cdot y - 20 \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{10}{1.5} \cdot \frac{y^3}{6}$, $M(0) = 0$, $M(x = 0.8, y = 0.6) = -0.66$ kNm

$Q(x) = -13.5 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+1.5^2}} + \left(22.5 - 20 \cdot y + \frac{10}{1.5} \cdot \frac{y^2}{2}\right) \cdot \frac{1.5}{\sqrt{2^2+1.5^2}}$,

$Q(0) = 2.7$ kN, $Q(x = 0.8, y = 0.6) = -3.78$ kN

siła poprzeczna zmienia znak, poszukujemy więc miejsca zerowego odpowiadającego ekstremum momentu, przy czym $y = 0.75x$



Rys. 8.9 Przekroje w przedziałach charakterystycznych

$Q(x) = 2.7 - 9 \cdot x + 1.125 \cdot x^2 = 0 \rightarrow x = 0.3122$ m, $M(x = 0.3122, y = 0.2342) = 0.521$ kNm

$N(x) = -13.5 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{2^2+1.5^2}} + \left(-22.5 + 20 \cdot y - \frac{10}{1.5} \cdot \frac{y^2}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+1.5^2}},$

$N(0) = -26.1$ kN, $N(x = 0.8, y = 0.6) = -17.46$ kN

$0.8 \leq x \leq 2$

$M(x) = -13.5 \cdot x + 22.5 \cdot y - 20 \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{10}{1.5} \cdot \frac{y^3}{6} + 10 \cdot (x - 0.8),$

$M(x = 0.8, y = 0.6) = -0.66$ kNm, $M(x = 2, y = 1.5) = 0$ kNm

$Q(x) = (-13.5 + 10) \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+1.5^2}} + \left(22.5 - 20 \cdot y + \frac{10}{1.5} \cdot \frac{y^2}{2}\right) \cdot \frac{1.5}{\sqrt{2^2+1.5^2}},$

$Q(x = 0.8, y = 0.6) = 4.22$ kN, $Q(x = 2, y = 1.5) = -2.8$ kN

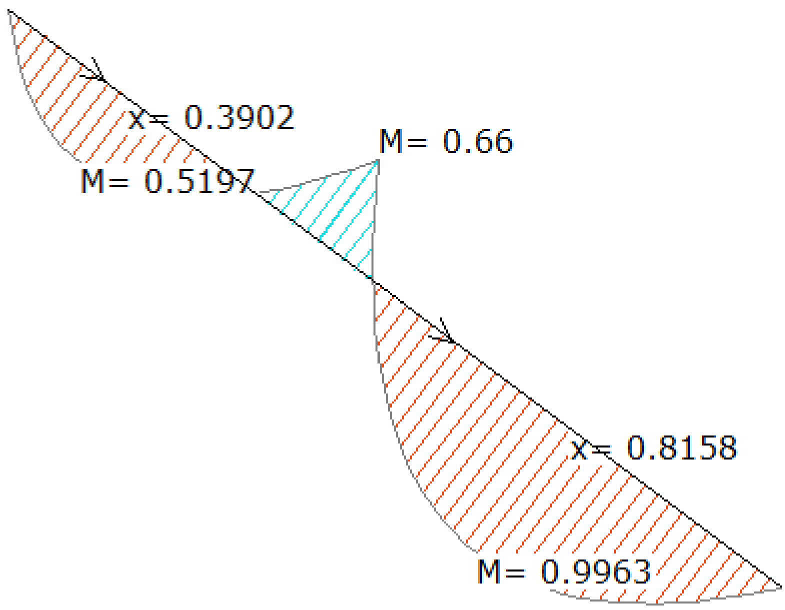
podobnie jak poprzednio, siła poprzeczna zmienia znak, poszukujemy więc miejsca zerowego odpowiadającego ekstremum momentu

$Q(x) = 10.7 - 9 \cdot x + 1.125 \cdot x^2 = 0 \rightarrow x = 1.453$ m, $M(x = 1.453, y = 1.090) = 0.997$ kNm

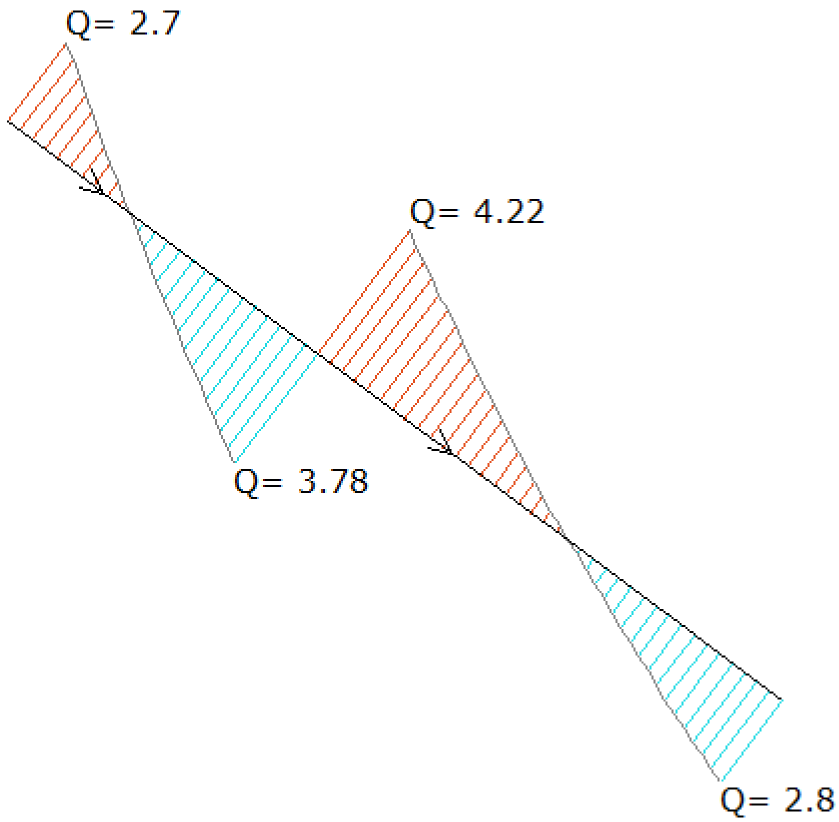
$N(x) = (-13.5 + 10) \cdot \frac{1.5}{\sqrt{2^2+1.5^2}} + \left(-22.5 + 20 \cdot y - \frac{10}{1.5} \cdot \frac{y^2}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+1.5^2}},$

$N(x = 0.8, y = 0.6) = -11.46$ kN, $N(x = 2, y = 1.5) = -2.1$ kN

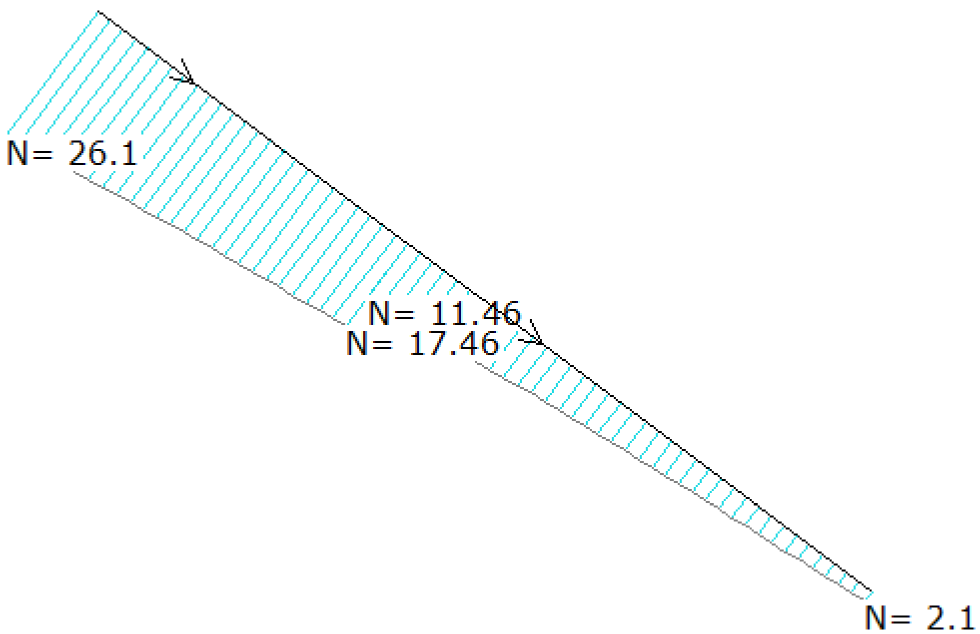
Wykresy sił przekrojowych, uzyskane z programu statyka.exe, przedstawiają kolejne rysunki.



Rys. 8.10 Wykres momentów zginających



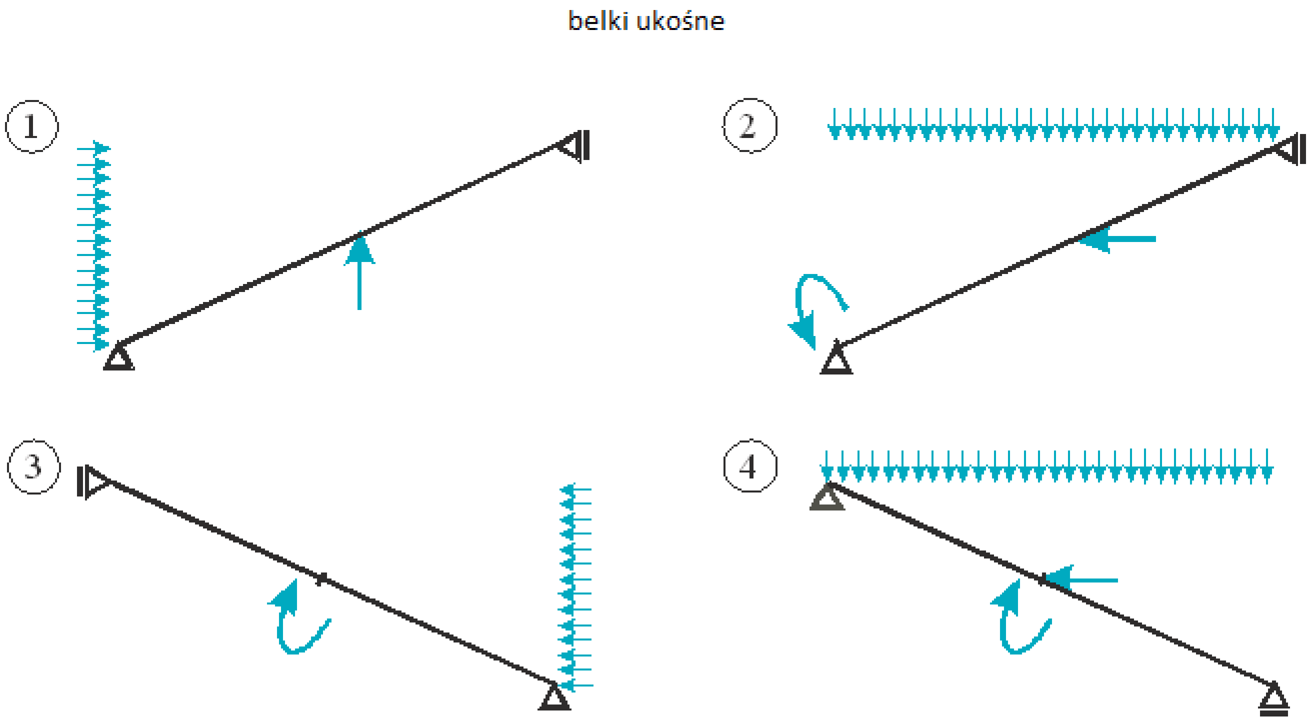
Rys. 8.11 Wykres sił poprzecznych



Rys. 8.12 Wykres sił podłużnych

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadania należy zawsze rozwiązywać na konkretnych liczbach, przyjmując odpowiednie dane liczbowe.



Rys. 8.13 Zadania do samodzielnego rozwiązania