

## 10. Ramy proste

### Wstęp

#### Definicje

węzeł – sztywne połączenie prętów (prostych)

węzeł prosty – sztywne połączenie dwóch prostopadłych prętów

węzeł złożony – węzeł, który nie jest prosty

rama – układ prętów prostych połączonych w węzłach

rama prosta – rama statycznie wyznaczalna o niewielkiej liczbie prętów

rygiel – poziomy element konstrukcyjny w ramie

słup – pionowy element konstrukcyjny

#### Rozwiązywanie prostych ram

Siły przekrojowe w prostych ramach mogą być określane w poszczególnych prętach oddzielnie. Po sporządzeniu wykresów zbiorczych sił przekrojowych rozwiązanie należy zweryfikować przez sprawdzenie równowagi węzłów, zwłaszcza węzłów złożonych. Równowaga węzła oznacza, że siły wewnętrzne działające na węzeł są równoważne układowi zerowemu.

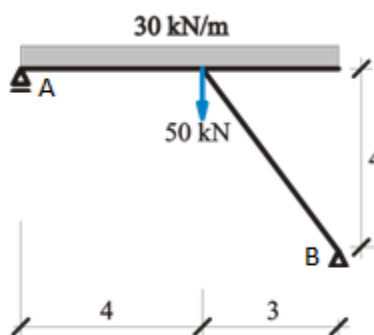
Należy pamiętać, że ponieważ naszym końcowym rozwiązaniem są wykresy sił przekrojowych, końcowe sprawdzenie powinno odnosić się do wykresów (a nie poprzedzających obliczeń). Wycinając węzeł ponownie stosujemy konwencję znakowania momentów (zależnie od przyjętych spodów) oraz sił podłużnych i poprzecznych.

Ponieważ równowaga węzła dotyczy punktu materialnego, długości odciętych przyległych prętów są zerowe<sup>1</sup>. Wynika stąd że na moment względem punktu węzła mają wpływ jedynie momenty zginające, a równowaga rzutów sił z kolei zależy jedynie od sił podłużnych i poprzecznych.

Dlatego sprawdzenia równowagi węzła dokonujemy często na dwóch oddzielnych rysunkach: osobno dla momentów a osobno dla sił podłużnych wraz z poprzecznymi.

#### Przykład

Określić siły przekrojowe w ramie prostej, jak na rys. 10.1.



Rys. 10.1 Rama prosta

#### Rozwiązanie

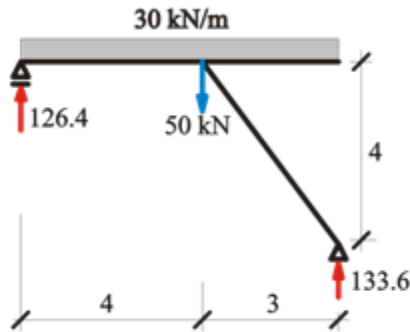
Obliczenie reakcji:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{30 \cdot 7 \cdot 3.5 + 50 \cdot 3}{7} = 126.4 \text{ kN}$$

<sup>1</sup> mimo, że na poglądowym szkicu rysujemy to nieco inaczej

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B = \frac{30 \cdot 7 \cdot 3.5 + 50 \cdot 4}{7} = 133.6 \text{ kN}$$

$$H_B = 0$$



Rys. 10.2 Rama wraz z obliczonymi reakcjami

Obliczamy siły przekrojowe dla belek składowych, zaczynając od końców przeciwnych do węzła ramy.

a) pozioma belka od lewej

$Q(x) = 126.4 - 30 \cdot x$ ,  $Q(0) = 126.4 \text{ kN}$ ,  $Q(4) = 126.4 - 120 = 6.4 \text{ kN}$  (brak zmiany znaku, nie ma ekstremum momentu)

$$M(x) = 126.4 \cdot x - 30 \frac{x^2}{2}, \quad M(0) = 0, \quad M(4) = 256.6 \text{ kNm}$$

b) wspornik od prawej

$$M(x) = -30 \frac{x^2}{2}, \quad M(0) = 0, \quad M(3) = 135 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = 30 \cdot x, \quad Q(0) = 0, \quad Q(3) = 90 \text{ kN}$$

c) belka ukośna, od dołu

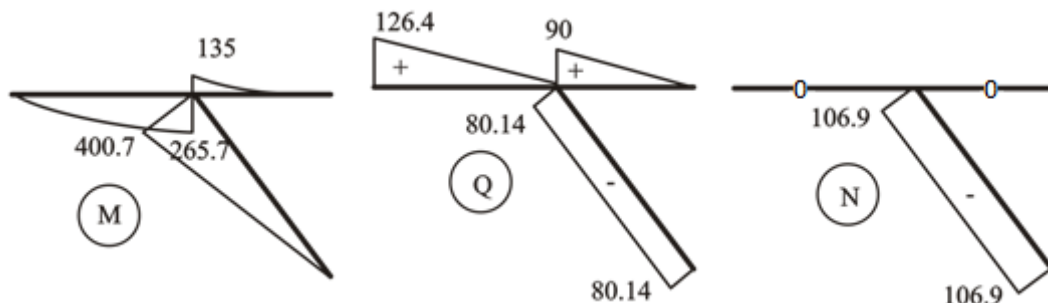
$$M(x) = 133.6 \cdot x, \quad M(0) = 0, \quad M(3) = 400.7 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -133.6 \cdot \underbrace{0.6}_{\cos \alpha} = -80.16 \text{ kN}$$

$$N(x) = -133.6 \cdot \underbrace{0.8}_{\sin \alpha} = -106.9 \text{ kN}$$

(Dla tak prostej ramy nie ma jednak potrzeby układania równań sił przekrojowych. Równania mają dla nas znaczenie jedynie pomocnicze i są niezbędne tylko w przypadku konieczności obliczania położenia ekstremum momentów zginających.)

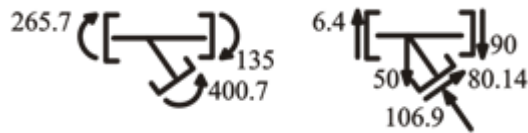
Wykresy sił przekrojowych przedstawia rysunek 10.3.



Rys. 10.3 Wykresy momentów zginających, sił poprzecznych i sił podłużnych

Sprawdzenia równowagi węzła, rys. 10.4, dokonujemy na podstawie wykresów z rys. 10.3, zaznaczając zwroty uogólnionych sił przekrojowych<sup>2</sup> zgodnie z konwencją znakowania. Przykładamy też wszystkie siły i momenty skupione, przyłożone w węzle.

<sup>2</sup> czyli momentów i samych sił



Rys. 10.4 Równowaga węzła

Weryfikujemy równowagę węzła:

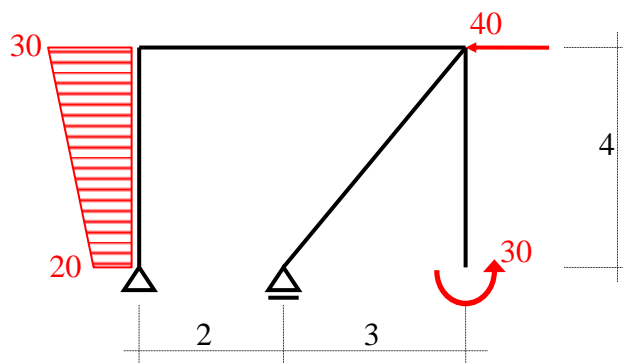
$$\Sigma M = 400.7 - 265.7 - 135 = 0, \text{ OK}$$

$$\Sigma X = 80.4 \cdot \frac{4}{5} - 106.9 \cdot \frac{3}{5} = 0.18 \approx 0, \text{ OK}$$

$$\Sigma Y = 6.4 - 90 + 80.4 \cdot \frac{3}{5} + 106.9 \cdot \frac{4}{5} - 50 = 0.16 \approx 0, \text{ OK}$$

### Problem 1

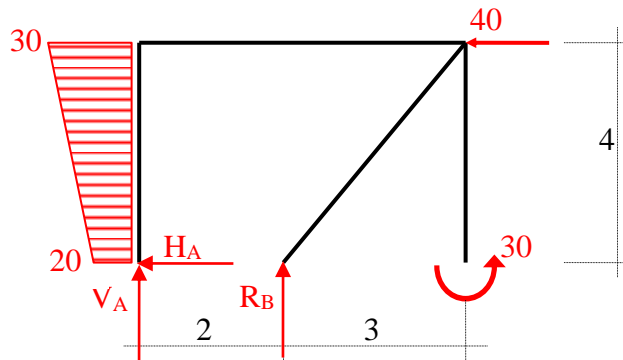
Określić siły przekrojowe w ramie jak na rys. 10.5 i sprawdzić równowagę węzła.



Rys. 10.5 Problem 1

### Rozwiązanie

Obliczenie reakcji, rys. 10.6.



Rys. 10.6 Rama wraz z reakcjami

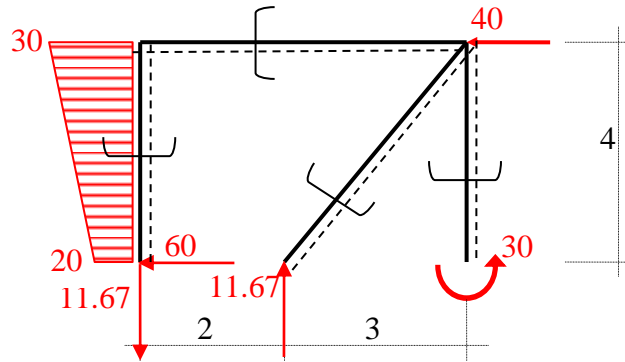
$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A = \frac{-20 \cdot 4 \cdot 2 - 0.5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 30}{2} = -11.67 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B = \frac{20 \cdot 4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - 40 \cdot 4 - 30}{2} = 11.67 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 25 \cdot 4 - 40 = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Spr. } \Sigma Y = -11.67 + 11.67 = 0, \text{ OK}$$

Obliczenie sił przekrojowych dla belek (zgodnie z przekrojami, rys. 10.7)



Rys. 10.7 Przekroje obliczeniowe sił przekrojowych ramy

słup z lewej

$$M(x) = 60 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} - 2.5 \cdot \frac{x^3}{6}, M(0) = 0, M(4) = 53.33 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = 60 - 20 \cdot x - 2.5 \cdot \frac{x^2}{2}, Q(0) = 0, Q(4) = -40 \text{ kN}$$

$$N(x) = 11.67 \text{ kN}$$

rygiel od lewej

$$M(x) = 60 \cdot 4 - 11.67 \cdot x - 20 \cdot 4 \cdot 2 - 0.5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}, M(0) = 53.33 \text{ kNm}, M(5) = -5 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -11.67 \text{ kN}$$

$$N(x) = 60 - 25 \cdot 4 = -40 \text{ kN}$$

belka ukośna od dołu ( $x$  poziomo)

$$M(x) = 11.67 \cdot x, M(0) = 0, M(x = 3) = 35 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = 11.67 \cdot \frac{3}{5} = 7 \text{ kN}$$

$$N(x) = -11.67 \cdot \frac{4}{5} = -9.33 \text{ kN}$$

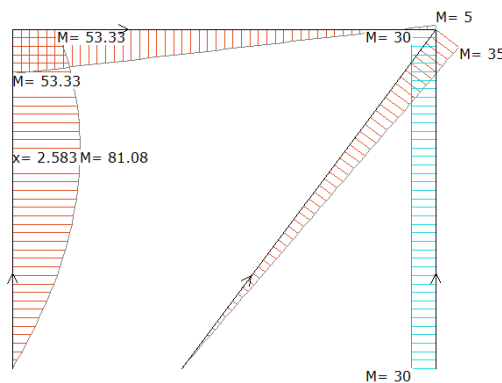
słup z prawej

$$M(x) = -30 \text{ kNm}$$

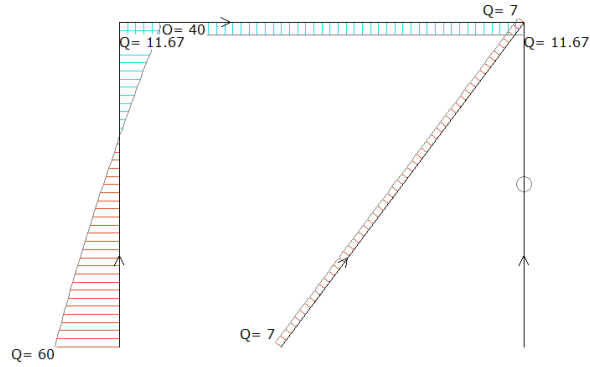
$$Q(x) = 0$$

$$N(x) = 0$$

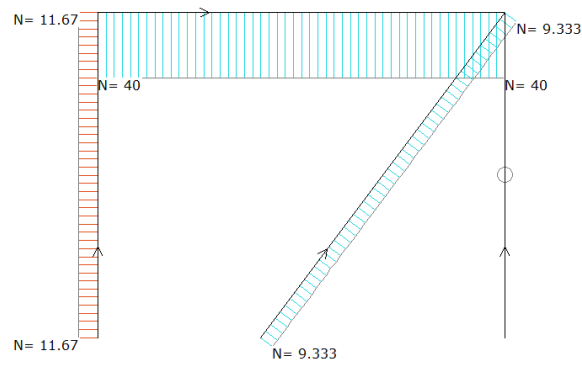
Wykresy sił przekrojowych (z programu statyka.exe), przedstawiają rys. 10.8, 10.9 i 10.10.



Rys. 10.8 Wykres momentów

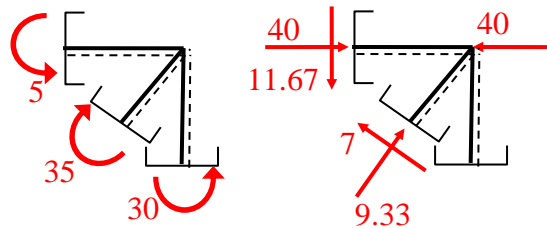


Rys. 10.9 Wykres sił poprzecznych



Rys. 10.10 Wykres sił podłużnych

Sprawdzenie równowagi węzła, rys. 10.11.



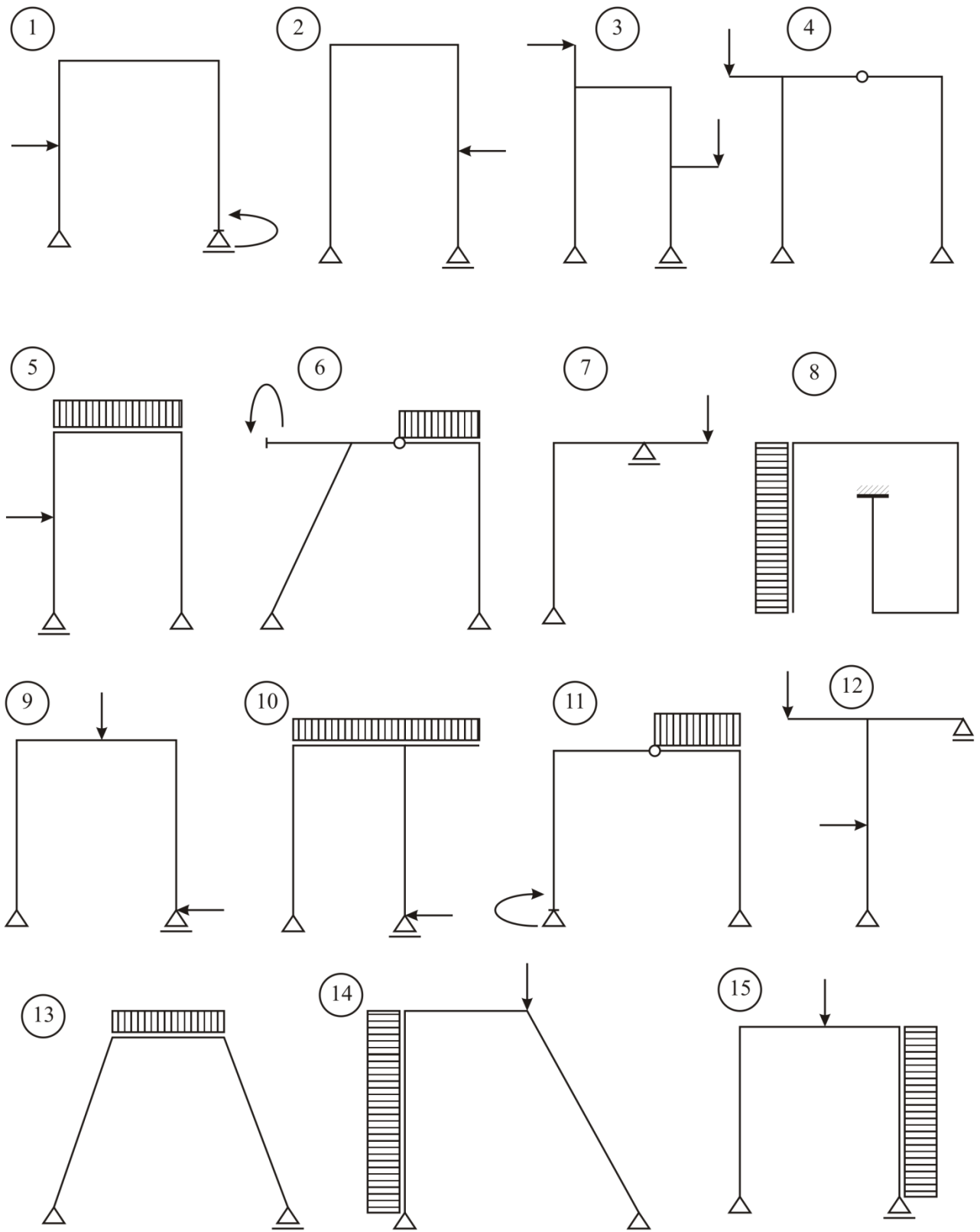
Rys. 10.11 Równowaga węzła

$$\Sigma M = 5 + 30 - 35 = 0,$$

$$\Sigma X = 40 - 40 - 7 \cdot \frac{4}{5} + 9.33 \cdot \frac{3}{5} = -0.002 \approx 0$$

$$\Sigma Y = -11.67 + 7 \cdot \frac{3}{5} + 9.33 \cdot \frac{4}{5} = -0.006 \approx 0, \text{ OK}$$

**Zadania do samodzielnego rozwiązania**



Rys. 10.12 Ramy – zadania do samodzielnego rozwiązania