

## 11. Łuki

### Wstęp

#### Definicje

łuk – zakrzywiona linia, zakrzywiony element konstrukcyjny

oś racjonalna łuku – oś łuku o takim kształcie, że znikają momenty zginające i siły poprzeczne i łuk pracuje wyłącznie na ściskanie

Związki różniczkowe pomiędzy siłami przekrojowymi w łuku

$$\begin{aligned} \frac{dM(s)}{ds} &= Q(s) \\ \frac{dQ(s)}{ds} + \frac{N(s)}{\rho} &= -q(s) \\ \frac{dN(s)}{ds} - \frac{Q(s)}{\rho} &= -p(s) \end{aligned}$$

*Wskazówka: Z pierwszego z równań wynika, że pochodna momentu zginającego po krzywoliniowej współrzędnej związanej z zakrzywioną osią łuku jest co do wartości równa sile poprzecznej (zgodność znaków zależy od przyjętych spodów, czyli od zdefiniowania zwrotu dodatniego momentu).*

*Wskazówka: Zerowanie się siły poprzecznej oznacza istnienie ekstremum momentu zginającego w tym przekroju. Ponieważ wyznaczenie miejsca zerowego siły poprzecznej z reguły wymaga rozwiązania równania przestępnego, zwykle ograniczamy się do przybliżonego oszacowania momentu maksymalnego.<sup>1</sup>*

### Przykłady

#### Łuk kołowy

Sporządzić wykresy sił przekrojowych łuku jak na rys. 11.1

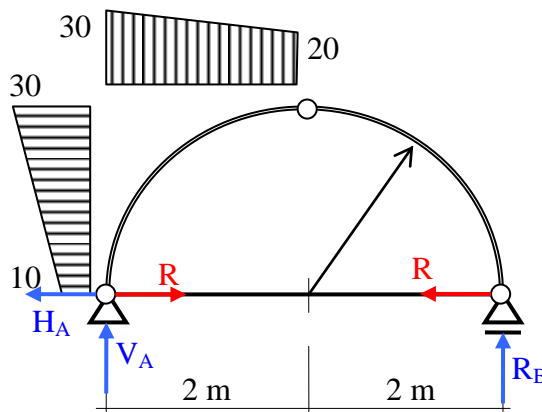


Fig. 11.1 Łuk kołowy ze ściągiem

#### Rozwiązanie

obliczenie reakcji:

$$H_A = 40 \text{ kN}$$

$$4V_A = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) \rightarrow V_A = 26.67 \text{ kN}$$

<sup>1</sup> im jest on mniejszy tym lepsze jest wykorzystanie specyfiki łuku

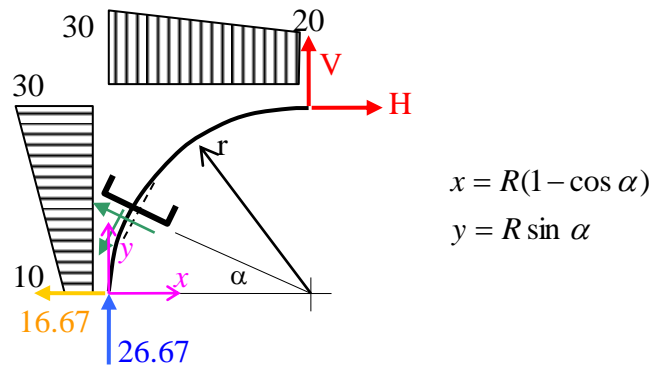
$$4R_B = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \rightarrow R_B = 23.33 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:  $\Sigma Y = 23.33 + 26.67 - \frac{1}{2} \cdot (20 + 20) \cdot 2 = 0$ , OK

Siła w ściągu:

$$\Sigma M_C^R = 0 \rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot 2R_B = 23.33 \text{ kN}$$

1<sup>szy</sup> przedział:



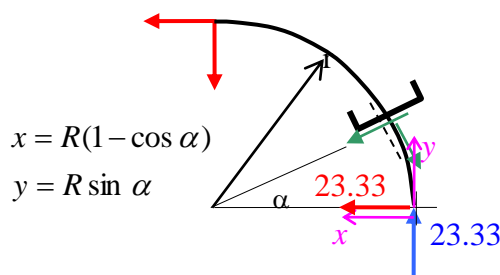
Rys. 11.2 1<sup>szy</sup> przedział

$$M(\alpha) = 26.67 \cdot x + 16.67 \cdot y - \frac{10y^2}{2} - \frac{20}{2} \cdot \frac{y^3}{6} - \frac{30x^2}{2} + \frac{10}{2} \cdot \frac{x^3}{6}$$

$$Q(\alpha) = \left( 26.67 - 30x + 5 \frac{x^2}{2} \right) \sin \alpha + \left( 16.67 - 10y - 10 \frac{y^2}{2} \right) \cos \alpha$$

$$N(\alpha) = \left( -26.67 + 30x - 5 \frac{x^2}{2} \right) \cos \alpha + \left( 16.67 - 10y - 10 \frac{y^2}{2} \right) \sin \alpha$$

2<sup>gi</sup> przedział



Rys. 11.3 2<sup>gi</sup> przedział

$$M(\alpha) = 23.33x - 23.33y$$

$$Q(\alpha) = 23.33 \cos \alpha - 23.33 \sin \alpha \text{ (najpierw siła pozioma)}$$

$$N(\alpha) = -23.33 \sin \alpha - 23.33 \cos \alpha \text{ (najpierw siła pozioma)}$$

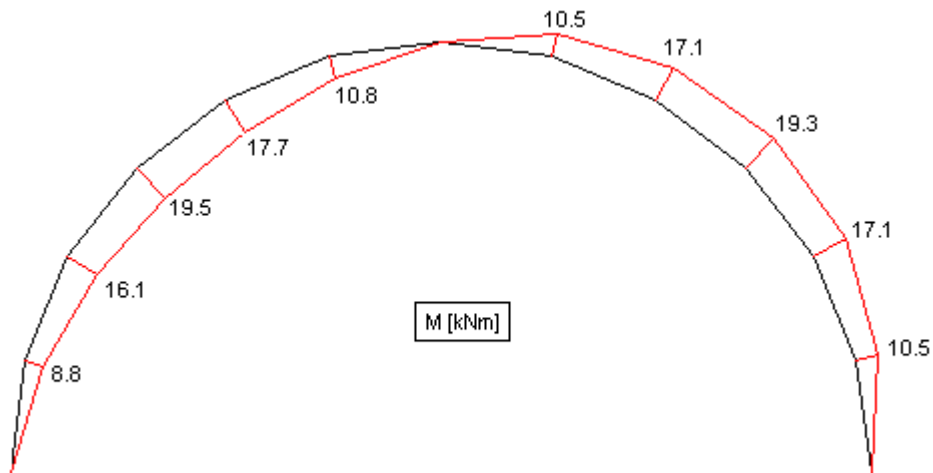
Wyniki numeryczne przedstawia tabela 11.1:

alfa	x	y	M	Q	N
0	0	0	0	16,67	-26,67
0,26	0,07	0,52	8,81	16,18	-21,17
0,52	0,27	1,00	16,09	10,85	-15,46
0,79	0,59	1,41	19,50	1,76	-12,32
1,05	1,00	1,73	17,72	-8,54	-13,14

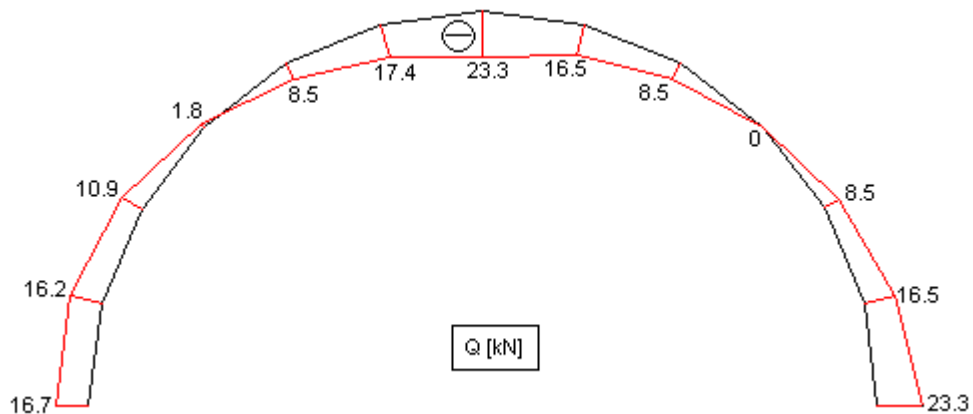
1,31	1,48	1,93	10,82	-17,40	-17,40
1,57	2,00	2,00	0,01	-23,33	-23,33
<b>alpha</b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>y<sub>1</sub></b>	<b>M</b>	<b>Q</b>	<b>N</b>
1,57	2,00	2,00	-0,00	-23,33	-23,33
1,31	1,48	1,93	-10,49	-16,50	-28,57
1,05	1,00	1,73	-17,08	-8,54	-31,87
0,79	0,59	1,41	-19,33	0,00	-32,99
0,52	0,27	1,00	-17,08	8,54	-31,87
0,26	0,07	0,52	-10,49	16,50	-28,57
0	0	0	0	23,33	-23,33

Tab. 11.1 Łuk kołowy – wyniki numeryczne

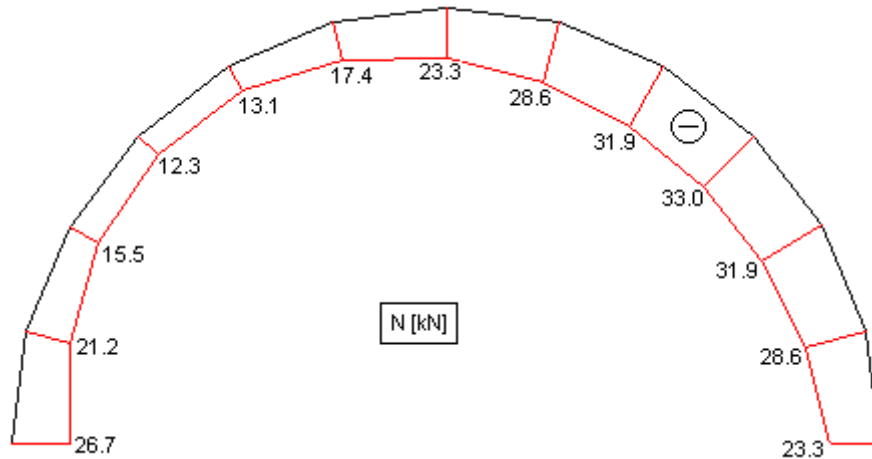
Wykresy sił przekrojowych przedstawiają rys. 11.4, 11.5 i 11.6.



Rys. 11.4 Łuk kołowy – momenty zginające

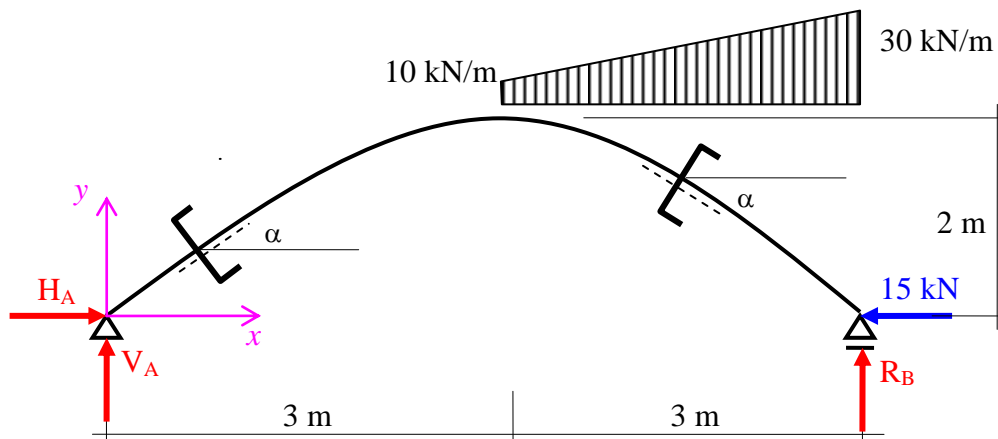


Rys. 11.5 Łuk kołowy – siły poprzeczne



Rys. 11.6 Łuk kołowy – siły osiowe

### Łuk niekołowy



Rys. 11.7 Łuk paraboliczny

### Rozwiązanie

Reakcje podparć:

$$H_A = 15 \text{ kN}$$

$$6V_A = 10 \cdot 3 \cdot 1.5 + \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 3 \cdot 1 \rightarrow V_A = 12.5 \text{ kN}$$

$$6R_B = 10 \cdot 3 \cdot 4.5 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow R_B = 47.5 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:  $\sum Y = 12.5 + 47.5 - 60 = 0$ , OK

Równanie osi łuku:

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \text{ z warunkami: } y(0) = 0, \quad y(3) = 2, \quad y(6) = 0, \text{ skąd mamy:}$$

$$y(x) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x, \text{ oraz } y'(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} = \tan \alpha$$

1<sup>szy</sup> przedział

$$M(x) = V_A x - H_A y$$

$$Q(x) = V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha$$

$$N(x) = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha$$

2<sup>gi</sup> przedział

$$M(x) = V_A x - H_A y - \frac{10(x-3)^2}{2} - \frac{20}{3} \cdot \frac{(x-3)^3}{6}$$

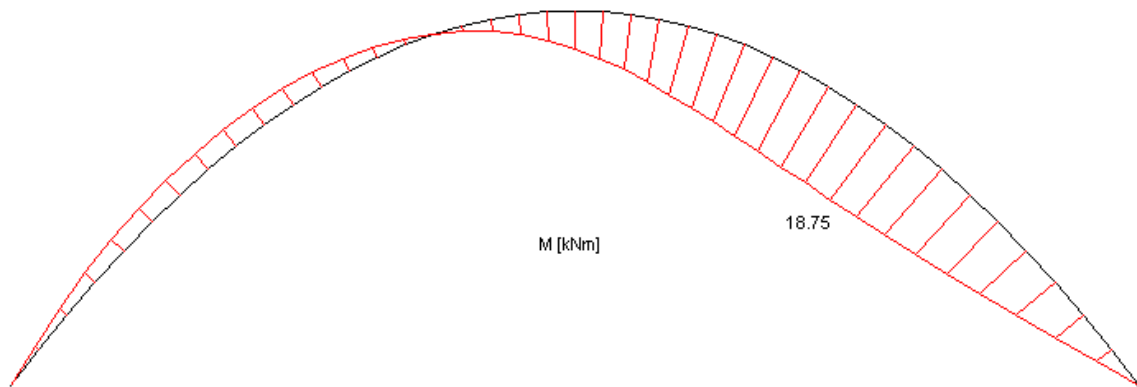
$$Q(x) = \left( V_A - 10(x-3) - \frac{20}{3} \frac{(x-3)^2}{2} \right) \cos \alpha - H_A \sin \alpha$$

$$N(x) = \left( -V_A + 10(x-3) + \frac{20}{3} \frac{(x-3)^2}{2} \right) \sin \alpha - H_A \cos \alpha$$

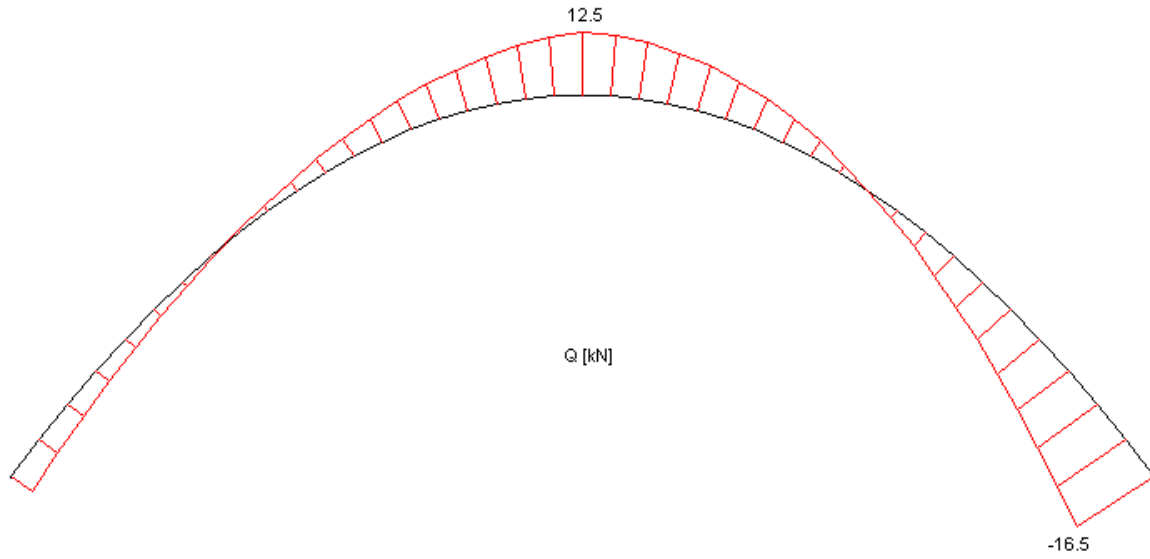
Wyniki numeryczne z program Matlab pokazuje tablica 11.2 a wykresy sił przekrojowych przedstawiają rys. 11.8, 11.9 i 11.10.

x	y	cosine	sine	M	Q	N
0	0	0.6000	0.8000	0	-4.50	-19.00
0.5	0.61	0.6690	0.7433	-2.92	-2.79	-19.33
1.0	1.11	0.7474	0.6644	-4.17	-0.62	-19.52
1.5	1.50	0.8321	0.5547	-3.75	2.08	-19.41
2.0	1.78	0.9138	0.4061	-1.67	5.33	-18.78
2.5	1.94	0.9762	0.2169	2.08	8.95	-17.35
3.0	2.00	1.0000	0	7.5	12.50	-15.00
3.5	1.94	0.9762	-0.2169	13.19	9.76	-13.20
4.0	1.78	0.9138	-0.4061	17.22	5.33	-14.05
4.5	1.50	0.8321	-0.5547	18.75	0	-18.03
5.0	1.11	0.7474	-0.6644	16.94	-5.61	-25.05
5.5	0.61	0.6690	-0.7433	10.97	-11.15	-34.81
6.0	0	0.6000	-0.8000	0	-16.5	-47.00

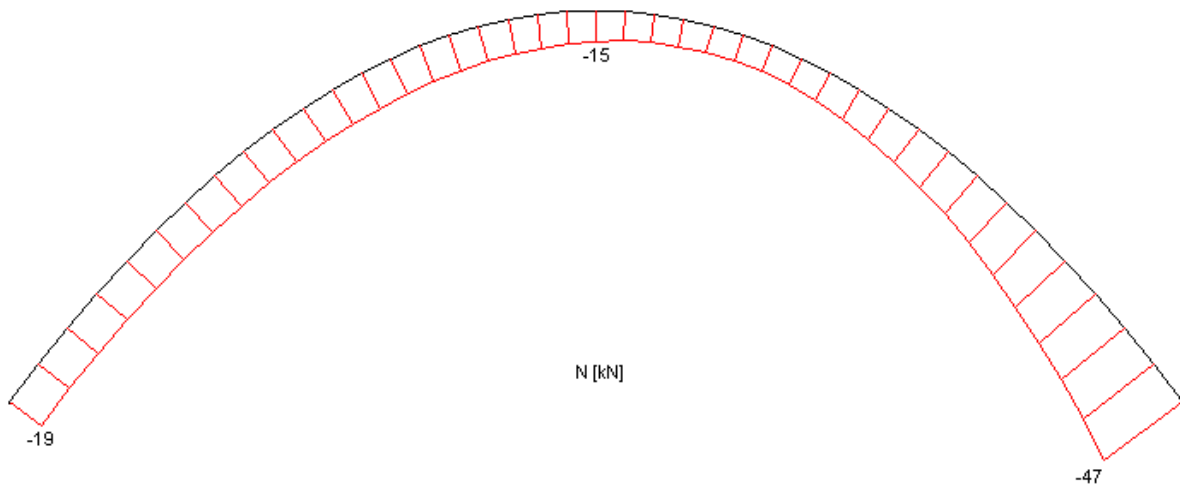
Tab. 11.2 Łuk paraboliczny – wyniki numeryczne



Rys. 11.8 Łuk paraboliczny – momenty zginające



Rys. 11.9 Łuk paraboliczny – siły poprzeczne

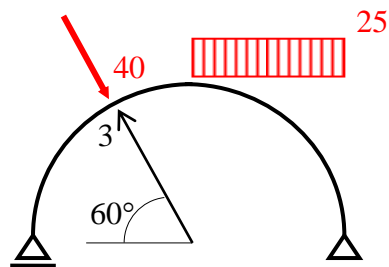


Rys. 11.10 Łuk paraboliczny – siły osiowe

## Ćwiczenia

### Problem 1

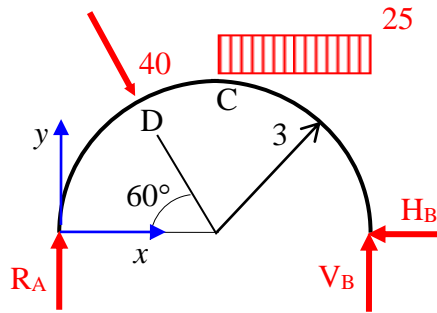
Narysować wykresy sił przekrojowych łuku kołowego, rys. 11.11.



Rys. 11.11 Problem 1

### Rozwiązanie

Obliczenie reakcji, rys. 11.12.



Rys. 11.12 Reakcje łuku

współrzędne punktu D:  $D(1,5, 2,60)$ , składowe siły P:  $P(20, 34,64)$

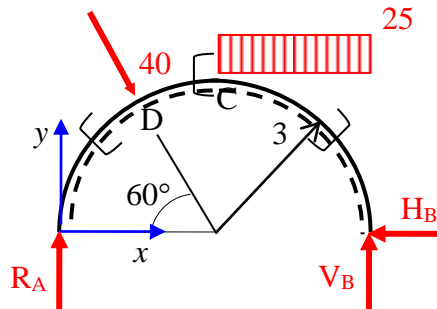
$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{40 \cdot 0,866 \cdot 4,5 - 40 \cdot 0,5 \cdot 2,6 + 25 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = 36,06 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B = \frac{40 \cdot 0,866 \cdot 1,5 + 40 \cdot 0,5 \cdot 2,6 + 25 \cdot 3 \cdot 4,5}{6} = 73,57 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_B = 20 \text{ kN}$$

Spr.:  $\Sigma M_0 = -36,06 \cdot 3 - 25 \cdot 3 \cdot 1,5 + 73,57 \cdot 3 = 0,03 \approx 0$ , OK

Równania sił przekrojowych, przedziałami, rys. 11.13.



Rys. 11.13 Przekroje charakterystyczne

$$0 \leq \alpha \leq 60^\circ$$

$$M(x) = 36,06 \cdot x$$

$$Q(x) = 36,06 \cdot \sin \alpha$$

$$N(x) = -36,06 \cdot \cos \alpha$$

$$60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$M(x) = 36,06 \cdot x - 34,64 \cdot (x - 1,5) - 20 \cdot (y - 2,6)$$

$$Q(x) = (36,06 - 34,64) \cdot \sin \alpha - 20 \cdot \cos \alpha$$

$$N(x) = (-36,06 + 34,64) \cdot \cos \alpha - 20 \cdot \sin \alpha$$

$$0 \leq \beta \leq 90^\circ$$

$$M(x) = 73,53 \cdot x_1 - 25 \cdot \frac{x_1^2}{2} - 20 \cdot y$$

$$Q(x) = -36,06 \cdot \sin \alpha_1 + 20 \cdot \cos \alpha_1 + 25 \cdot x_1 \cdot \sin \alpha_1$$

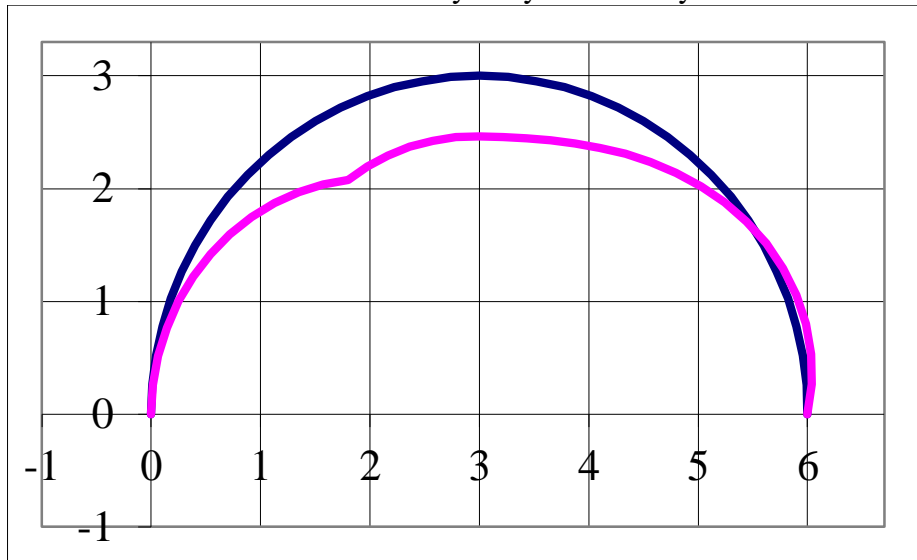
$$N(x) = (-36,06 + 25 \cdot x_1) \cdot \cos \alpha_1 - 20 \cdot \sin \alpha_1$$

Wyniki numeryczne przedstawia poniższa tabela 11.3.

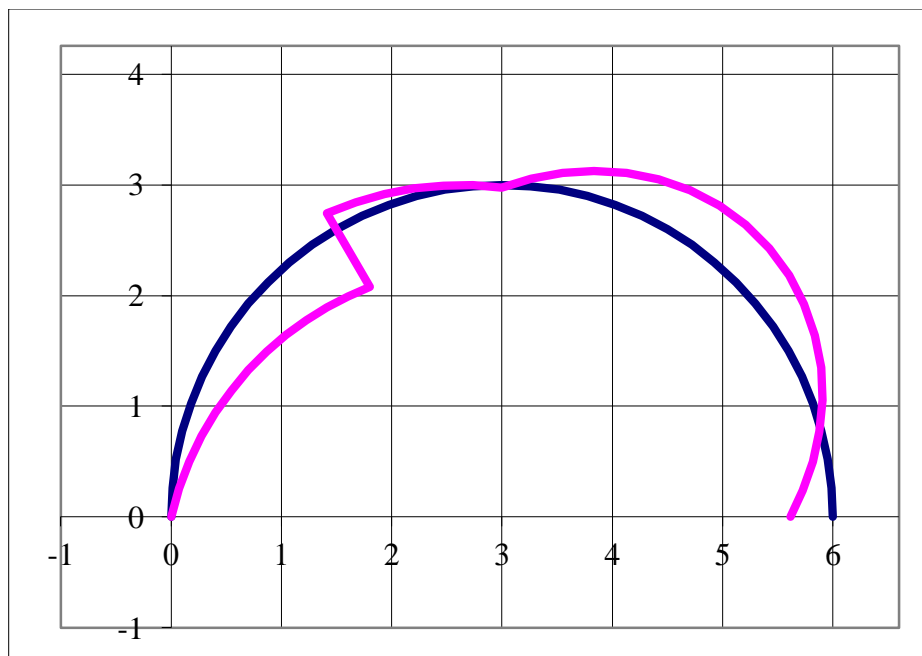
$\alpha$	$\alpha$ [rd]	x	y	M	Q	N
0	0	0	0	0	0	-36,0705
15	0,261799	0,102223	0,776457	3,687218	9,335734	-34,8414
30	0,523599	0,401924	1,5	14,4976	18,03525	-31,238
45	0,785398	0,87868	2,12132	31,69442	25,5057	-25,5057
60	1,047198	1,5	2,598076	54,10576	31,23798	-18,0353
60	1,047198	1,5	2,598076	54,10576	-8,76202	-18,0353

75	1,308997	2,223543	2,897777	49,14604	-3,7956	-19,6885
90	1,570796	3	3	48,21152	1,429492	-20
90	1,570796	3	3	48,21152	1,429492	-20
75	1,308997	2,223543	2,897777	43,82984	-12,1928	-23,9726
60	1,047198	1,5	2,598076	30,26924	-21,238	-35,3558
45	0,785398	0,87868	2,12132	12,56753	-22,3471	-50,6313
30	0,523599	0,401924	1,5	-2,44955	-14,4407	-65,012
15	0,261799	0,102223	0,776457	-8,1392	0,938496	-73,7716
0	0	0	0	0	20	-73,5705

Tab. 11.3 Łuk kołowy – wyniki numeryczne

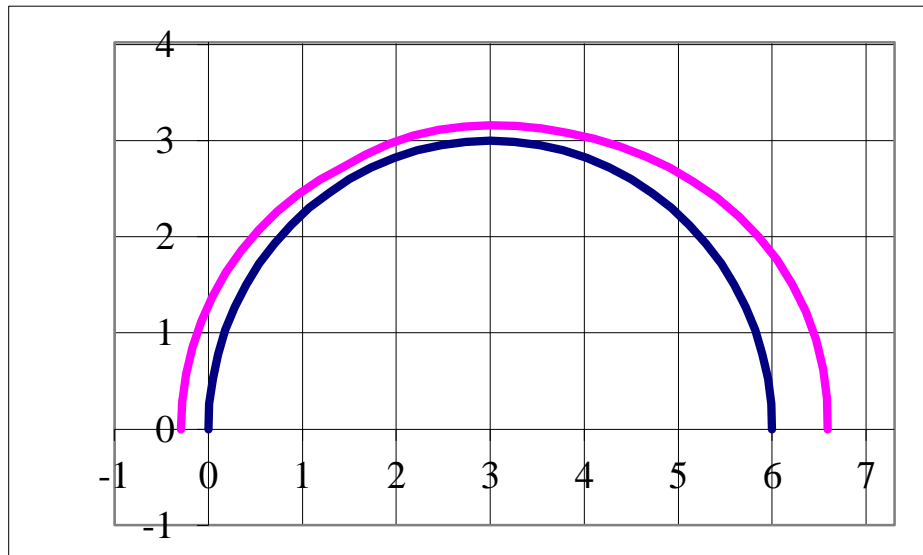


Rys. 11.14 Łuk kołowy – momenty zginające



Rys 11.15 Łuk kołowy – siły poprzeczne

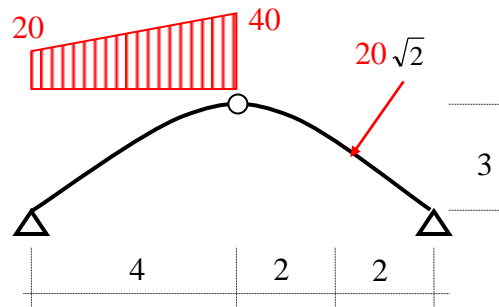




Rys. 11.16 Łuk kołowy – siły podłużne

### Problem 2

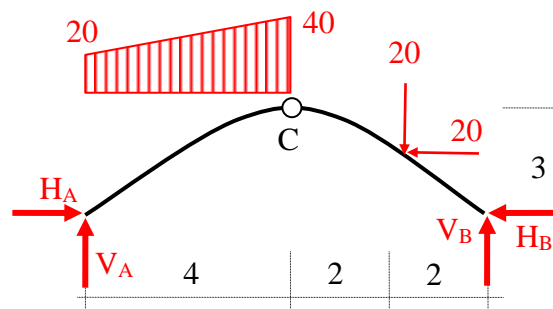
Narysować wykresy sił przekrojowych łuku parabolicznego, rys. 11.17.



Rys. 11.17 Łuk paraboliczny

### Rozwiązanie

Obliczenie reakcji, rys. 11.18.



Rys. 11.18 Reakcje łuku parabolicznego

równanie osi łuku:  $ax^2 + bx + c = 0$ , z warunkami:  $y(0) = 0 \rightarrow c = 0$ ,  $y(8) = 0 \rightarrow 64a + 8b = 0$ ,  
 $y(4) = 3 \rightarrow 16a + 4b = 3$ , skąd:

$$y(x) = -0.1875 \cdot x^2 + 1.5 \cdot x,$$

$$y'(x) = -0.375 \cdot x + 1.5$$

położenie punktu P:  $P(6, 2.25)$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A = \frac{20 \cdot 4 \cdot 6 + 0.5 \cdot 20 \cdot 4 \cdot \left(4 + \frac{4}{3}\right) + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2.25}{8} = 97.29 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B = \frac{20 \cdot 4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 20 \cdot 6 - 20 \cdot 2.25}{8} = 42.71 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^P = 0 \rightarrow 42.71 \cdot 4 - 3 \cdot H_B - 0.75 \cdot 20 - 2 \cdot 20 = 0 \rightarrow H_B = 38.61 \text{ kN}$$

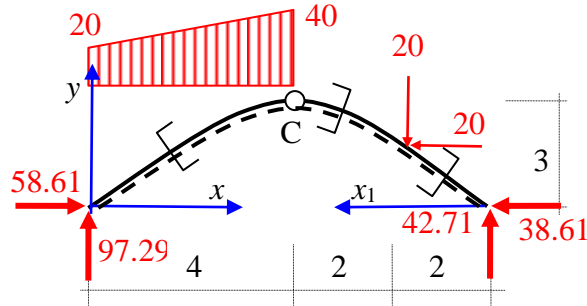
$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A - 20 - H_B = 0 \rightarrow H_A = 58.61 \text{ kN}$$

Sprawdzenie obliczeń

$$\Sigma Y = 97.29 + 42.71 - 30 \cdot 4 - 20 = 0$$

$$\Sigma M_C^L = -97.29 \cdot 4 + 58.61 \cdot 3 + 20 \cdot 4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} = 0.003 \approx 0, \text{ OK}$$

Równania sił przekrojowych, przedziałami, rys. 11.19.



Rys. 11.19 Siły przekrojowe – przedziały charakterystyczne

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M(x) = 97.29 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \frac{x^3}{6},$$

$$Q(x) = \left( 97.29 - 20 \cdot x - 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot \cos \alpha - 58.61 \cdot \sin \alpha$$

$$N(x) = \left( -97.29 + 20 \cdot x + 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot \sin \alpha - 58.61 \cdot \cos \alpha$$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$M(x_1) = 42.71 \cdot x_1 - 38.61 \cdot y$$

$$Q(x_1) = -42.71 \cdot \cos \alpha + 38.61 \cdot \sin \alpha$$

$$N(x_1) = -42.71 \cdot \sin \alpha - 38.61 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \leq x_1 \leq 4$$

$$M(x_1) = 42.71 \cdot x_1 - 38.61 \cdot y - 20 \cdot (x_1 - 2) - 20 \cdot (y - 2.25)$$

$$Q(x_1) = (-42.71 + 20) \cdot \cos \alpha + (38.61 + 20) \cdot \sin \alpha$$

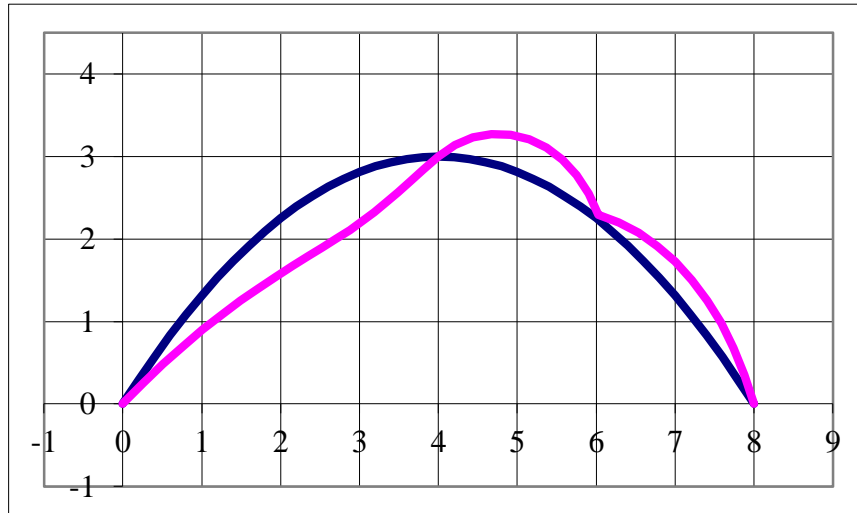
$$N(x_1) = (-42.71 + 20) \cdot \sin \alpha - (38.61 + 20) \cdot \cos \alpha$$

Wyniki obliczeń numerycznych programem Microsoft Excel przedstawia tabela 11.4.

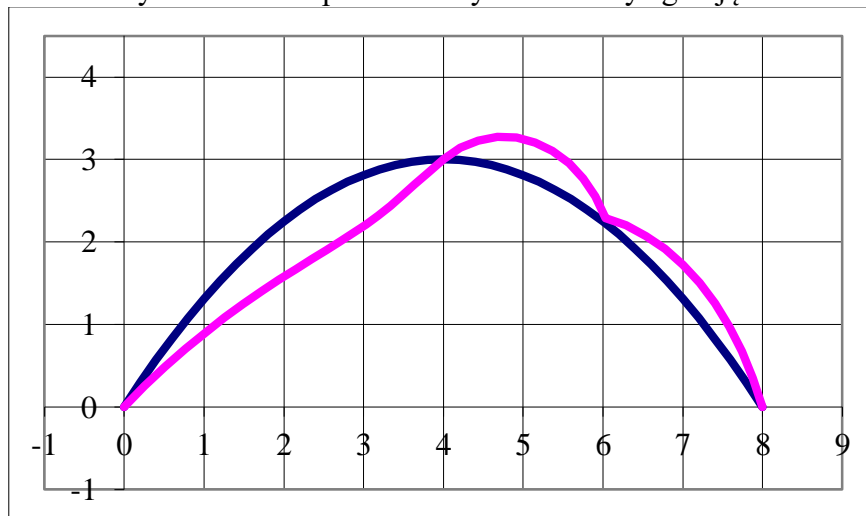
x	y	y_p	cosa	sina	M	Q	N
0	0	1,5	0,5547	0,83205	0	5,200314	-113,4632
0,67	0,916667	1,25	0,624695	0,780869	6,442901	5,986661	-101,3069
1,33	1,666667	1	0,707107	0,707107	12,28395	5,352405	-88,24103
2	2,25	0,75	0,8	0,6	16,04167	2,666667	-75,26389
2,67	2,666667	0,5	0,894427	0,447214	16,23457	-2,79508	-64,13167
3,33	2,916667	0,25	0,970143	0,242536	11,38117	-11,4531	-57,55168
4	3	0	1	0	0	-22,7083	-58,61111
4,67	2,916667	-0,25	0,970143	-0,24254	-10,2546	-7,81504	-62,36871
5,33	2,666667	-0,5	0,894427	-0,44721	-10,7407	5,900735	-62,57885
6	2,25	-0,75	0,8	-0,6	-1,45833	17	-60,51389
6	2,25	-0,75	0,8	-0,6	-1,45833	-11	-56,51389
6,67	1,666667	-1	0,707107	-0,70711	-7,40741	-2,89717	-57,50153
7,33	0,916667	-1,25	0,624695	-0,78087	-6,9213	3,470528	-57,46978
8	0	-1,5	0,5547	-0,83205	0	8,436065	-56,95307

Tab. 11.4 Wyniki numeryczne – łuk paraboliczny

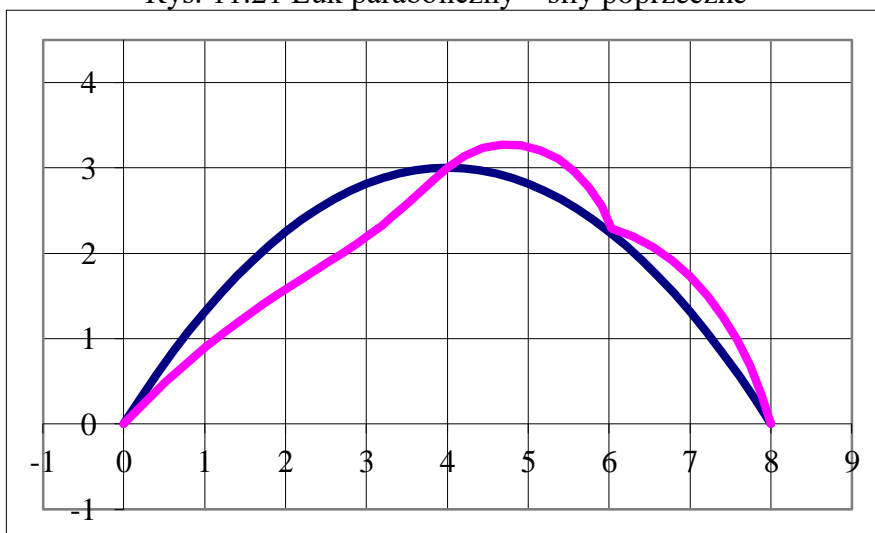
Wykresy sił przekrojowych przedstawiają rys. 11.20, 11.21 oraz 11.22.



Rys. 11.20 Łuk paraboliczny – momenty zginające



Rys. 11.21 Łuk paraboliczny – siły poprzeczne



Rys. 11.22 Łuk paraboliczny – siły podłużne

### Zadania do samodzielnego rozwiązania

Określić siły przekrojowe w wybranym przekroju łuków, rys.11.23

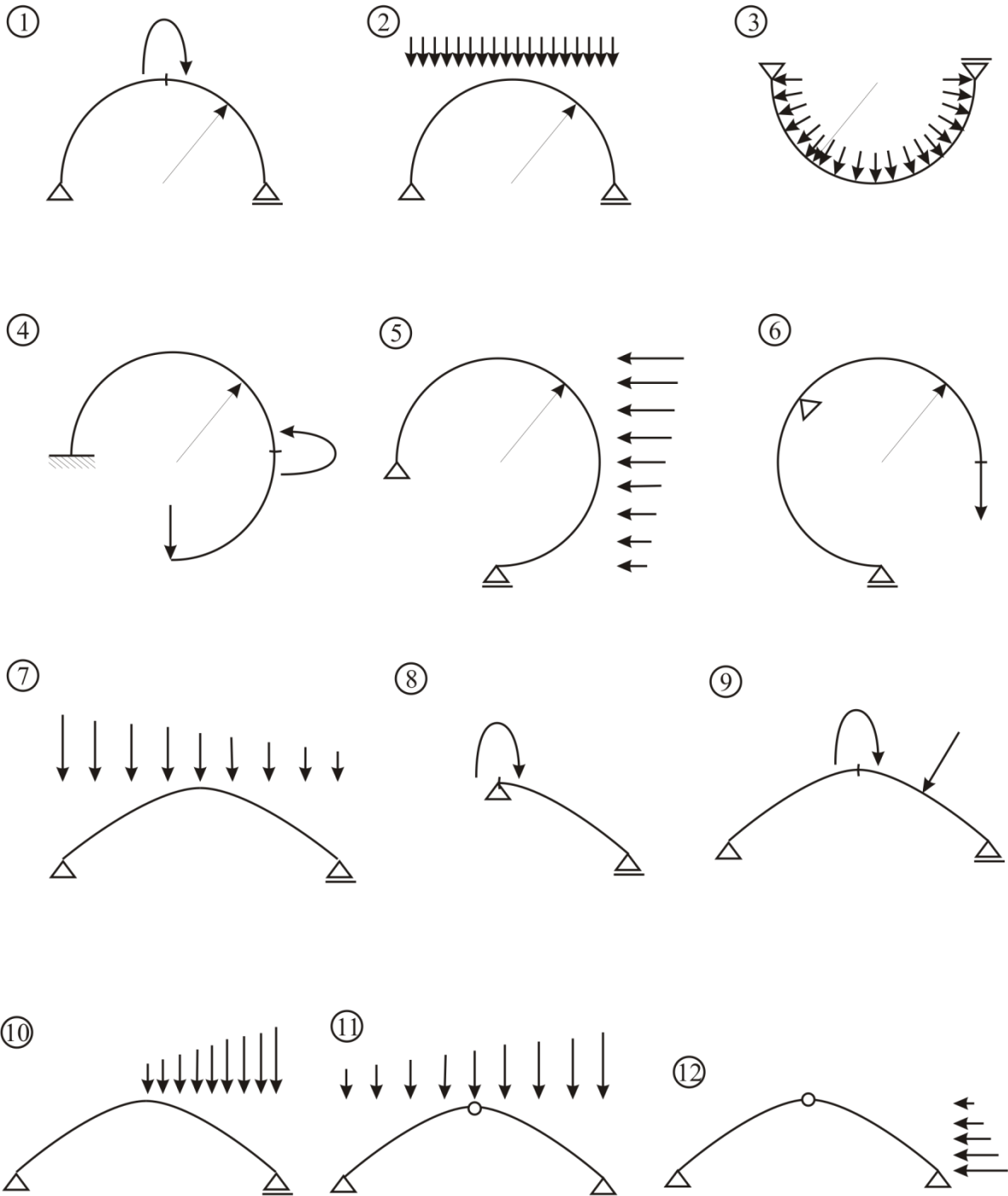


Fig. 11.23 Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Dodatek – Kod Matlaba do rysowania sił przekrojowych łuków**

Aby narysować siły przekrojowe łuku trzeba obliczyć punkty osi łuku oraz wartości sił przekrojowych, odpowiednio skalowane. Wartości powinny być odkładane prostopadle do osi łuku. Poniższy kod przedstawia ideę jak to zrobić.

```
n = 20; % liczba punktów pośrednich
figure(1) % definicja rysunku momentów zginających
plot(x,y, 'k'), axis equal, hold on % x, y –punkty osi (kolor czarny)
x1(n) = 0; y1(n) = 0; k_m = 0.01; % alokacja pamięci i współczynnik skali
for i = 1: n % moment gnący dodatni rozciąga dolne włókna
% alf(i) – kąt pomiędzy styczną a osią współrzędnych
x1(i) = x(i) + k_m * M(i) * cos(alf(i)); % równanie parametryczne łuku, współrzędna x
y1(i) = y(i) - k_m * M(i) * sin(alf(i)); % równanie parametryczne łuku, współrzędna y
end
plot(x1,y1,'r'), hold on % punkty wykresu (kolor czerwony)
for i = 1: n % pętla zakreskowania wykresu
line([x(i) x1(i)], [y(i) y1(i)], 'Color', [1 0 0]) % kolor czerwony
end
hold off
(powtórzyć figure(2) i figure(3) dla pozostałych wykresów sił poprzecznych i podłużnych)
```

Tab. 11.3 Kod Matlaba wykresów dla łuku kołowego