

## 12. Układy złożone

### Wstęp

#### Definicje

układ złożony – układ składający się z elementów różnego typu: belki, ramy, łuku czy kratownicy

element kratowy – pręt ze stałą siłą podłużną i zerowymi momentami zginającymi i siłami poprzecznymi

element belkowy (ramowy, zginany) – element z pełnym zestawem sił przekrojowych (zwykle zmiennych po długości)

#### Algorytm rozwiązania

Pierwszy krok powinna stanowić analiza geometrycznej niezmienności układu: wewnętrznej i zewnętrznej. Taka analiza nie tylko informuje o ew. metodzie obliczenia reakcji układu, ale też ułatwia znalezienie odpowiednich przekrojów rozcinań układu na podukłady.

W kolejnym kroku odróżniamy elementy kratowe od belkowych (np. pogrubiając elementy zginane).

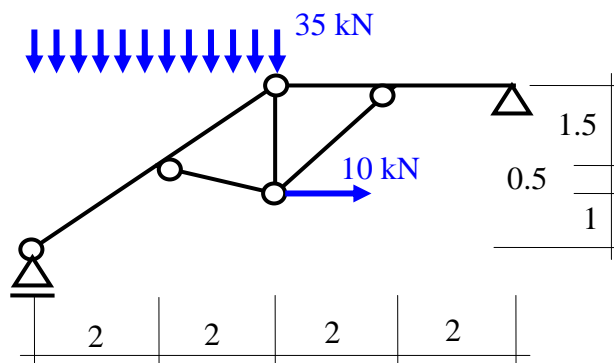
Najpierw przecinane i obliczane są elementy kratownicowe.

Na końcu wyznacza się siły przekrojowe w elementach belkowych.

Rozwiązaniem zadania są wykresy sił przekrojowych, przy czym dla prętów kratownicowych zerowanie się momentów i sił poprzecznych zaznacza się na prętach kółkiem (zerem) a wykresy sił podłużnych można zastąpić liczbą ze znakiem.

### Przykłady

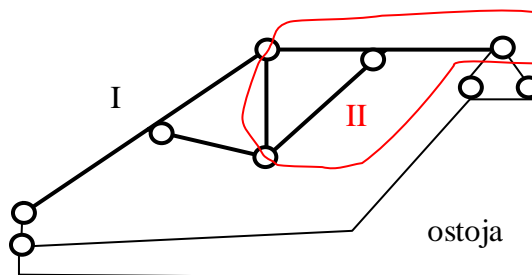
#### Przykład 1 – Układ wewnętrznie niezmienny



Rys. 12.1 Układ wewnętrznie niezmienny

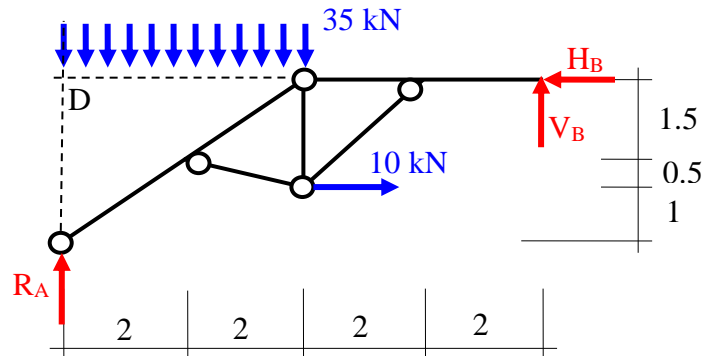
#### Rozwiązanie

Analiza geometrycznej niezmienności, rys. 12.2.



Rys. 12.2 Geometryczna niezmiennność układu

Układ wewnętrzny stanowią dwie tarcze (belki) połączone przegubem i prętem. Układ jest wewnętrznie niezmienny i jest połączony trzema prętami z ostoją. Jest więc także zewnętrznie niezmienny. Obliczenie reakcji, rys. 12.2



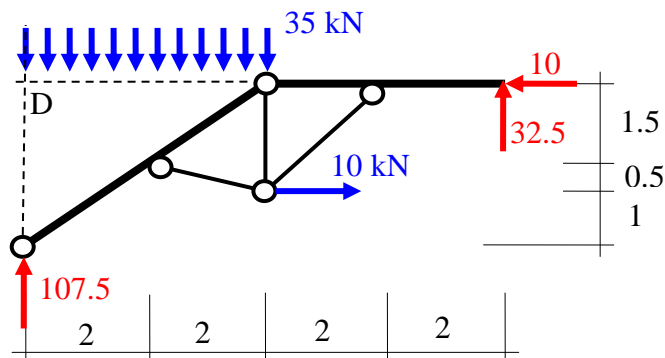
Rys. 12.2 Reakcje układu

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{35 \cdot 4 \cdot 6 + 10 \cdot 2}{8} = 107.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow V_B = \frac{35 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 2}{8} = 32.5 \text{ kN}$$

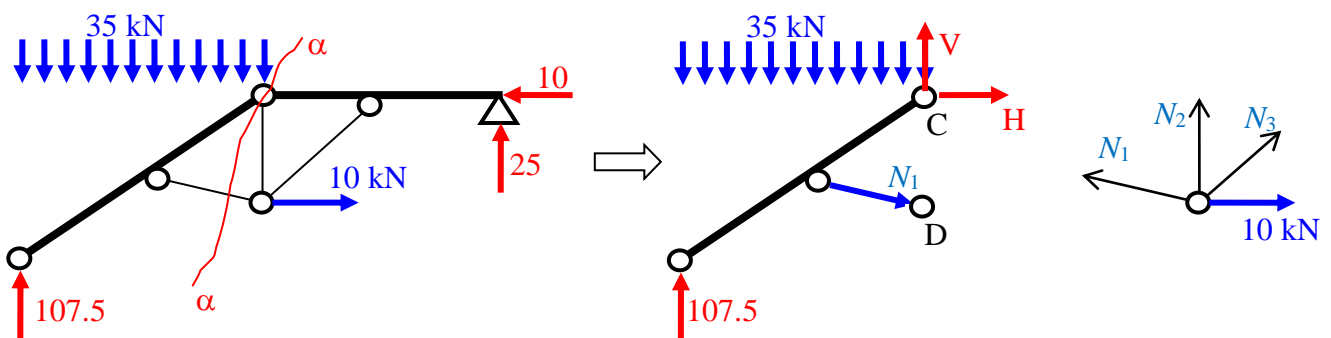
$$\sum X = 0 \rightarrow H_B = 10 \text{ kN}$$

wyróżnienie prętów belkowych (zginanych), rys. 12.3



Rys. 12.3 Elementy zginane wyróżnione

Obliczenie sił w prętach kratownicowych, rys. 12.4 (siłę  $N$  przesuwamy do punktu D i tu rozkładamy)



Rys. 12.4 Przekroje: przez przegub i pręt kratowy oraz odcięcie węzła D

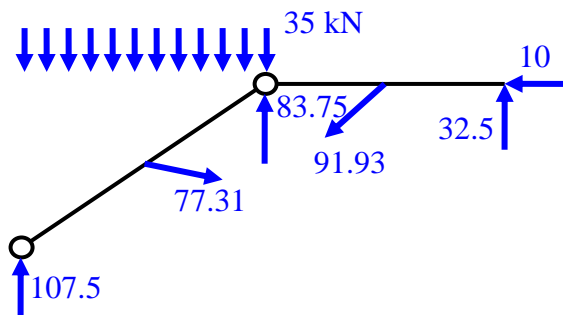
$$\sum M_C = 0 \rightarrow -107.5 \cdot 4 + 35 \cdot 4 \cdot 2 + N_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{0.5^2 + 2^2}} \cdot 2 = 0 \rightarrow N_1 = 77.31 \text{ kN}$$

równowaga węzła D:

$$\Sigma X = 0 \rightarrow -77.31 \cdot \frac{2}{\sqrt{0.5^2+2^2}} + N_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 = 0 \rightarrow N_3 = 91.93 \text{ kN}$$

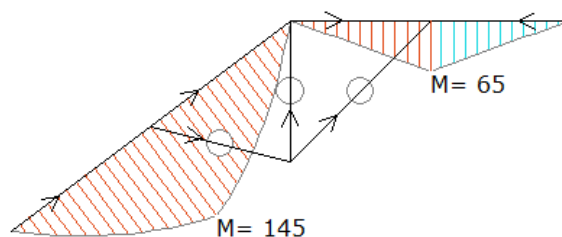
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 77.31 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{0.5^2+2^2}} + N_2 + 91.93 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow N_2 = -83.75 \text{ kN}$$

Elementy belkowe, rys. 12.5:

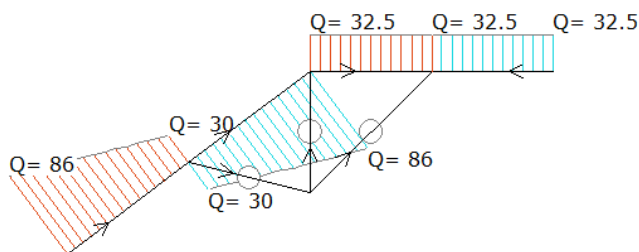


Rys. 12.5 Elementy zginane

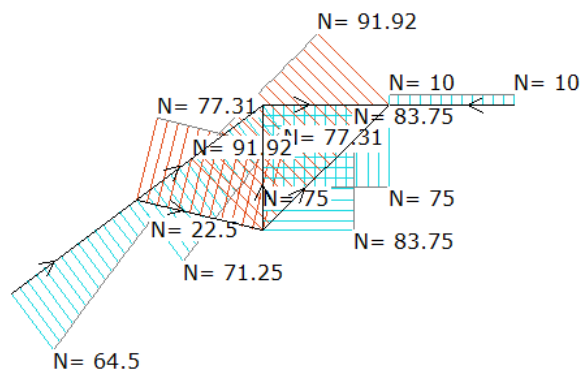
Wykresy sił przekrojowych z programu statyka.exe przedstawiają rys. 12.6, 12.7 oraz 12.8.



Rys. 12.6 Momenty zginające

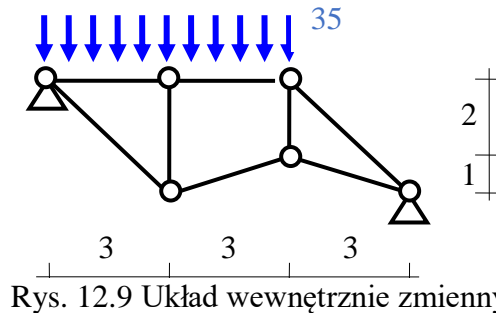


Rys. 12.7 Siły poprzeczne



Rys. 12.8 Siły podłużne

**Przykład 2 – układ wewnętrznie zmienny**



Rys. 12.9 Układ wewnętrznie zmienny

**Rozwiązanie**

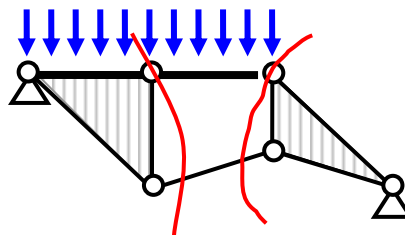
Analiza geometrycznej niezmienności

układ wewnętrzny stanowią dwie tarcze połączone jedynie dwoma prętami (brakuje jednego pręta), więc z twierdzenia 2T wynika, że układ jest wewnętrznie zmienny

zewnętrznie, trzy tarcze połączone są, każda z każdą, parami prętów których kierunki przecinają się w punktach nie leżących na jednej prostej; zgodnie więc z twierdzeniem 3T układ jest zewnętrznie geometrycznie niezmienny

wyróżnienie elementów belkowych, rys.12.10

są jedynie dwa elementy belkowe; z analizy geometrycznej niezmienności wynika, że pierwsze przekroje powinny rozciąć sztywne tarcze, co można zrobić na dwa sposoby, rys.12.10.



Rys. 12.10 Elementy belkowe i sugerowane przekroje

obliczenie reakcji układu

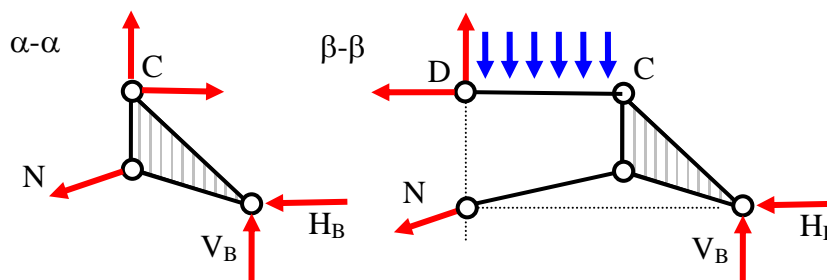
mamy do wyznaczenia cztery niewiadome a tylko 3 liniowo niezależne równania statyki dodatkowo, z przekrojów z rys. 12.10 mamy 1 niewiadomą (kluczowe jest to, że dwukrotnie tnjemy ten sam pręt) i dwa równania

podsumowując, mamy 5 niewiadomych i 5 równań do ich wyznaczenia

Dla całego układu mamy:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3 \cdot H_B - 9 \cdot V_B + 35 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

Dla części układów, rys. 12.11, mamy:



Rys. 12.11 Obliczenie reakcji

$$\sum M_C = 0 \rightarrow -2 \cdot N \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} - 3 \cdot H_B + 3 \cdot V_B = 0$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow -3 \cdot N \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} - 3 \cdot H_B + 6 \cdot V_B - 35 \cdot 3 \cdot 1.5 = 0$$

Mamy teraz układ 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$3 \cdot H_B - 9 \cdot V_B + 630 = 0$$

$$-1.897 \cdot N - 3 \cdot H_B + 3 \cdot V_B = 0$$

$$-2.846 \cdot N - 3 \cdot H_B + 6 \cdot V_B - 157.5 = 0$$

którego rozwiązaniem są wartości:

$$N = 83.00 \text{ kN}$$

$$H_B = 26.27 \text{ kN}$$

$$V_B = 78.76 \text{ kN}$$

mamy więc ponadto:

$$\sum X = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0 \rightarrow H_A = 26.27 \text{ kN}$$

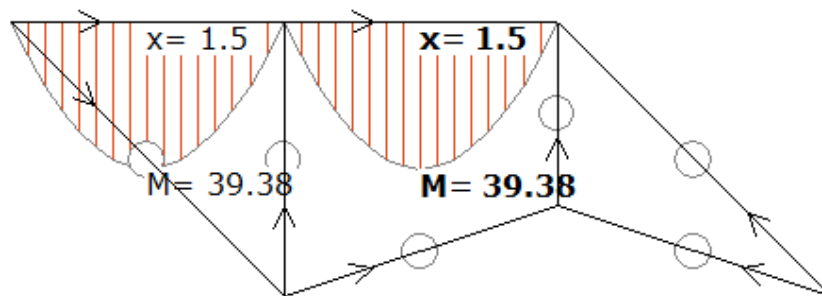
$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A = \frac{35 \cdot 6 \cdot 6 - 26.27 \cdot 3}{9} = 131.2 \text{ kN}$$

siły przekrojowe

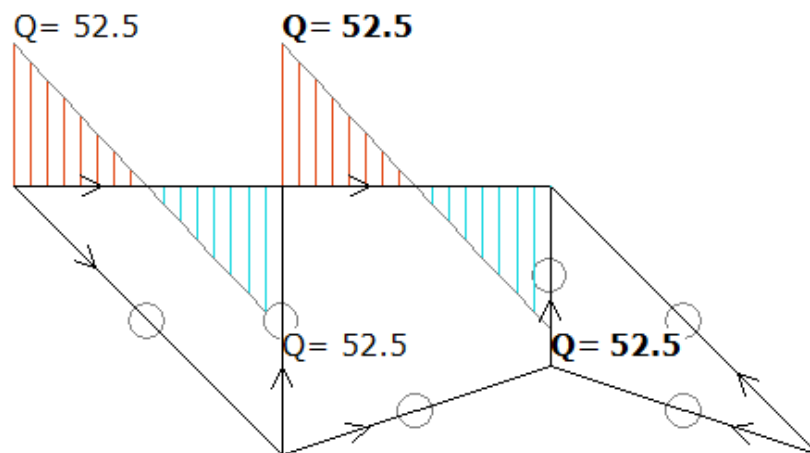
jeden z prętów kratownicowych został obliczony, pozostałe pręty kratownicowe znajdujemy z warunków równowagi węzłów, połączonych obliczonym prętem

siły przekrojowe w elementach belkowych wyznaczamy jako ostatnie (dwie banalne belki na  $\frac{ql^2}{8}$ )

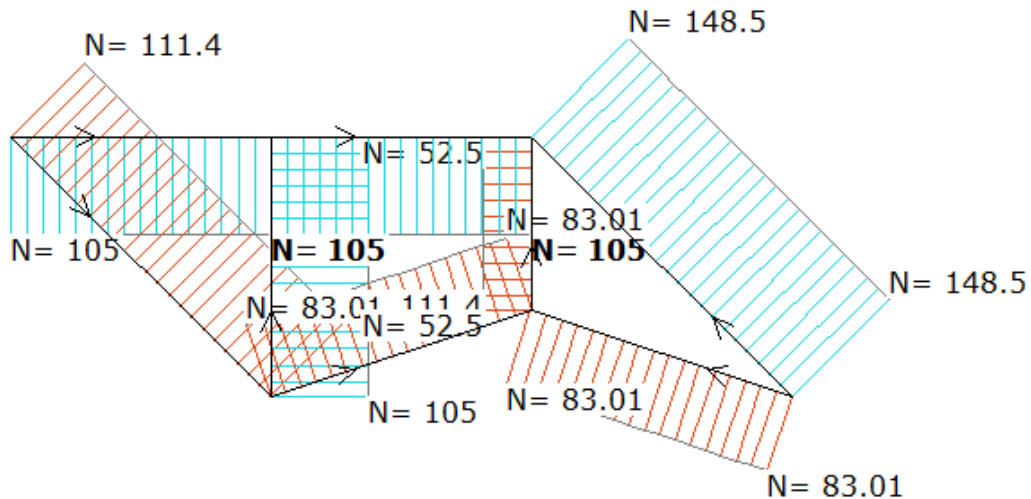
wykresy zbiorcze sił przekrojowych uzyskane z programu statyka.exe przedstawiają rys. 12.12, 12.13 oraz 12.14.



Rys. 12.12 Momenty zginające



Rys. 12.13 Siły poprzeczne

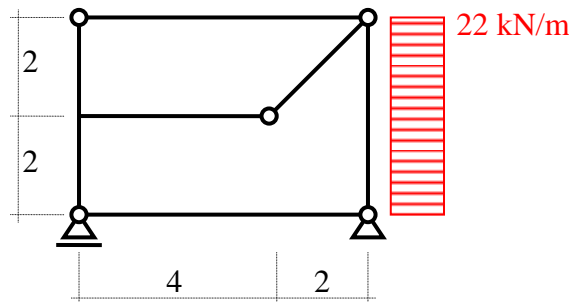


Rys. 12.14 Siły podłużne

## Ćwiczenia

### Problem 1

Określić siły przekrojowe w układzie, rys.12.15.

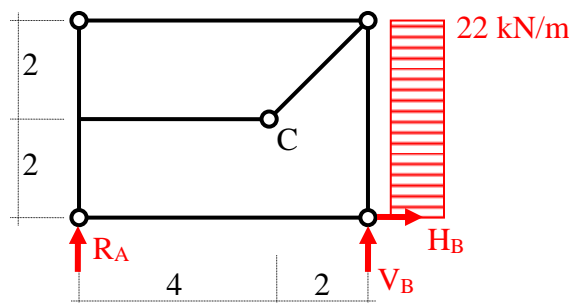


Rys. 12.14 Problem 1

### Rozwiązanie

układ jest wewnątrz i zewnątrz geometrycznie niezmienny

Obliczenie reakcji, rys. 12.16



Rys. 12.16 Reakcje układu

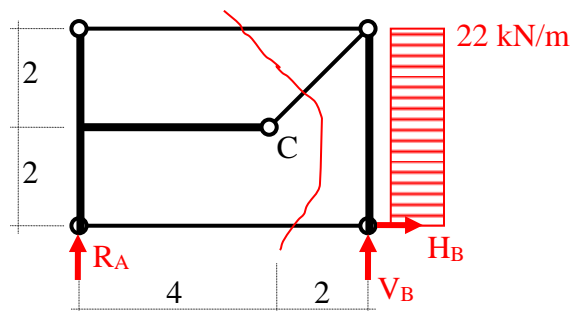
$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{22 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 29.33 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B = \frac{-22 \cdot 4 \cdot 2}{6} = -29.33 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow H_B - 22 \cdot 4 = 0 \rightarrow H_B = 88 \text{ kN}$$

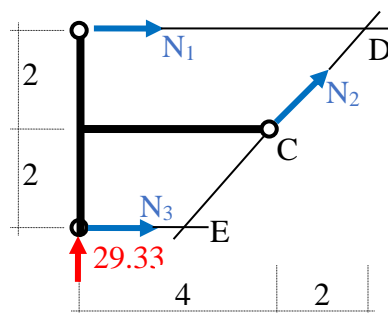
$$\text{Spr. } \sum M_C = -29.33 \cdot 4 - 29.33 \cdot 2 + 88 \cdot 2 = 0.02 \approx 0, \text{ OK}$$

Wyróżnienie elementów zginanych, rys. 12.17



Rys.12.17 Elementy zginane i przekrój cięcia przez elementy kratowe

Obliczenie elementów kratownicowych, rys. 12.18



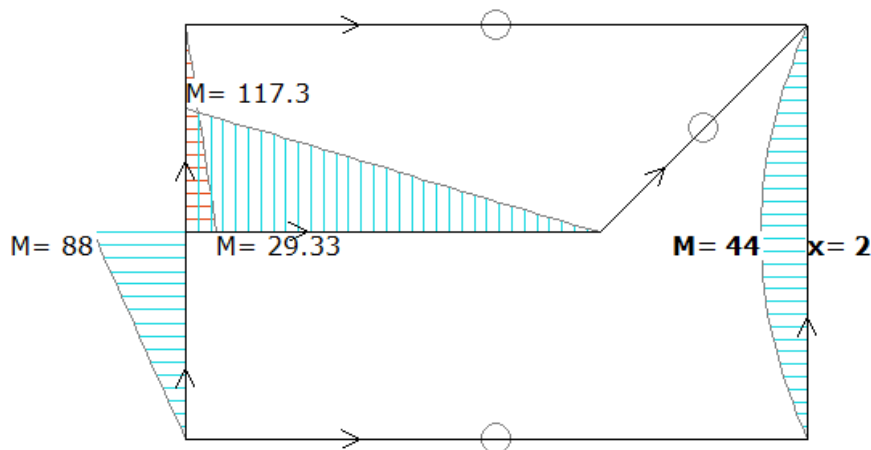
Rys. 12.18 Pręty kratowe

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -2 \cdot R_A - 2 \cdot N_1 = 0 \rightarrow N_1 = -29.33 \text{ kN}$$

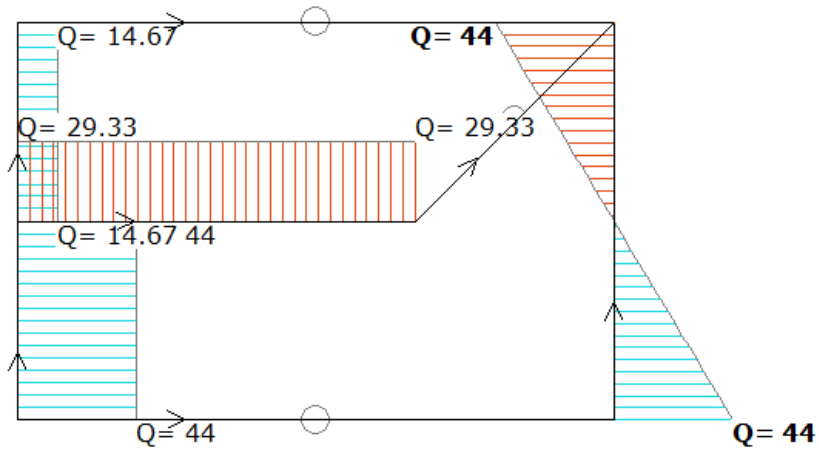
$$\sum Y = 0 \rightarrow 29.33 + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow N_2 = -41.48 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow 29.33 \cdot 6 - 4 \cdot N_3 = 0 \rightarrow N_3 = 44.0 \text{ kN}$$

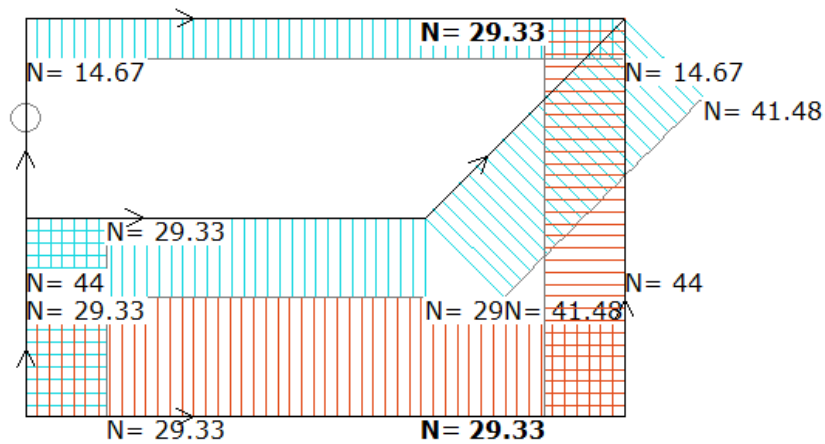
Siły przekrojowe w elementach zginanych obliczane są standardowo, przechodzimy od razu do wykresów, wykonanych programem statyka.exe, rys. 12.19, 12.20 oraz 12.21.



Rys. 12.19 Momenty zginające



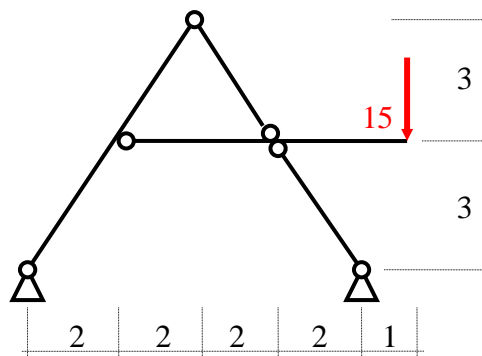
Rys. 12.20 Siły poprzeczne



Rys. 12.21 Siły podłużne

**Problem 2**

Określić siły przekrojowe w układzie, rys.12.22.



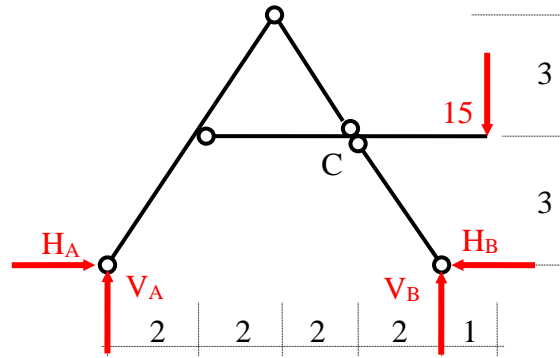
Rys. 12.22 Free-body unstable structure

**Rozwiązanie**

Układ jest wewnętrznie geometrycznie zmienny, zewnętrznie niezmienny – układ jest układem trójprzegubowym

Obliczenie reakcji, rys. 12.23:





Rys. 12.23 Reakcje układu

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A = \frac{-15 \cdot 1}{8} = -1.88 \text{ kN}$$

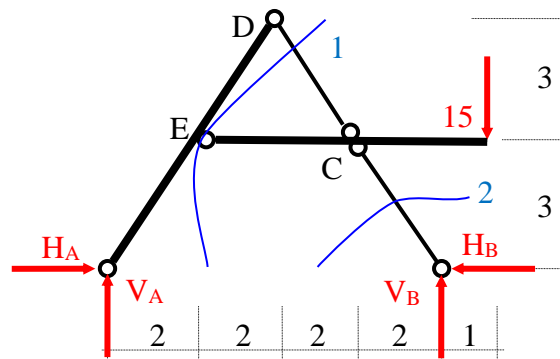
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B = \frac{15 \cdot 9}{8} = 16.88 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^P = 0 \rightarrow H_B = \frac{16.88 \cdot 2}{3} = 11.25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^L = 0 \rightarrow H_A = \frac{-6 \cdot 1.875 + 15 \cdot 3}{3} = 11.25 \text{ kN}$$

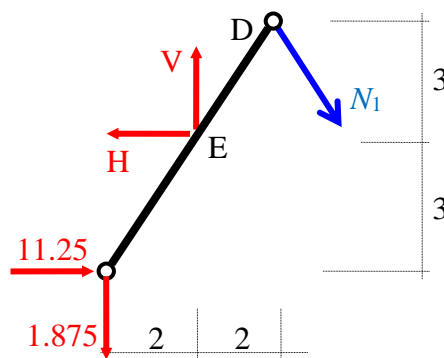
Spr.:  $\Sigma X = 11.25 - 11.25 = 0$ ,  $\Sigma Y = -1.88 - 15 + 16.88 = 0$ , OK

W układzie dwa elementy są zginane, rys. 12.24:



Rys. 12.24 Problem 2 – elementy zginane i przekroje

przekrój 1-1, rys. 12.25



Rys. 12.25 Przekrój 1-1

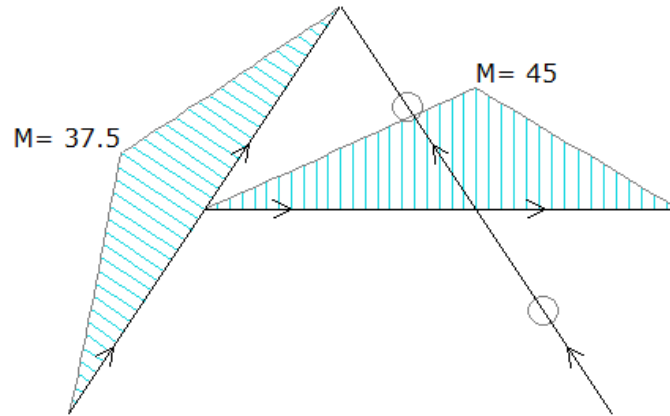
(siłę  $N_1$  przesuwamy do punktu C i rozkładamy)

$$\Sigma M_E = 0 \rightarrow 1.875 \cdot 2 + 11.25 \cdot 3 - N_1 \cdot \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} \cdot 4 = 0 \rightarrow 11.27 \text{ kN}$$

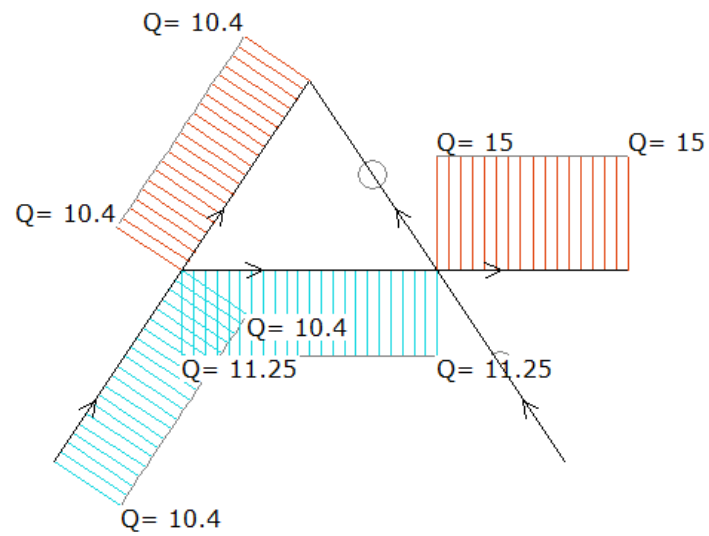
przekrój 2-2, równowaga węzła B:

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 16.88 + N_2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0 \rightarrow N_2 = -20.29 \text{ kN}$$

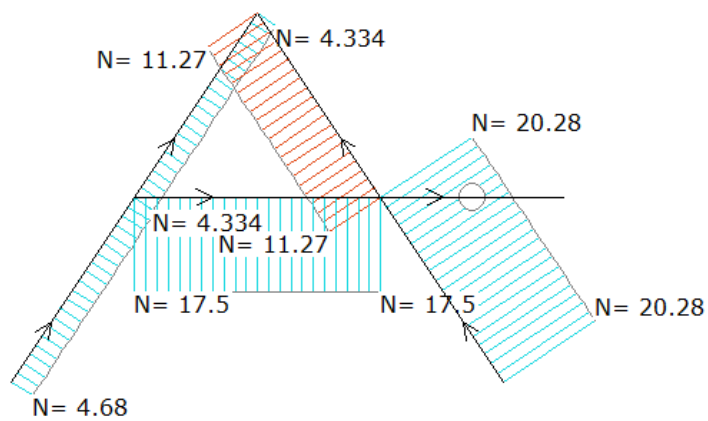
Siły przekrojowe w elementach zginanych obliczane są standardowo, przechodzimy od razu do wykresów, wykonanych programem statyka.exe, rys. 12.26, 12.27 oraz 12.28.



Rys. 12.26 Problem 2 – momenty zginające



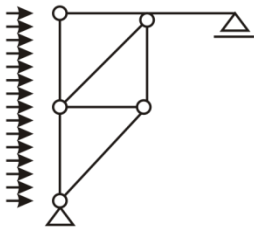
Rys. 12.27 Problem 2 – siły poprzeczne



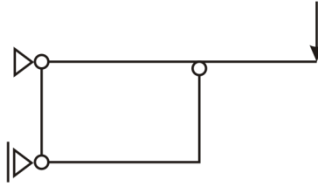
Rys. 12.28 Problem 2 – siły podłużne

Zadania do samodzielnego rozwiązania

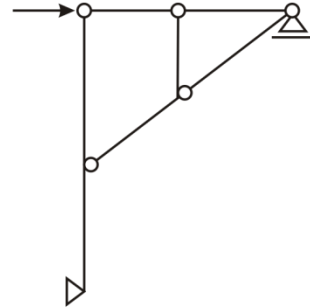
1



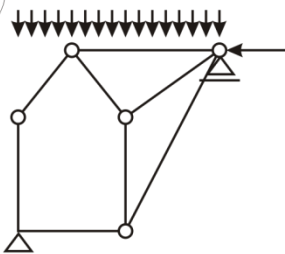
2



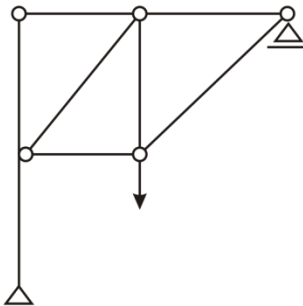
3



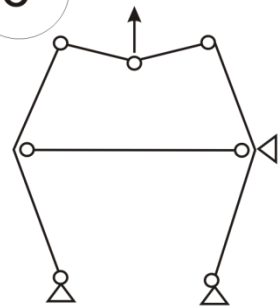
4



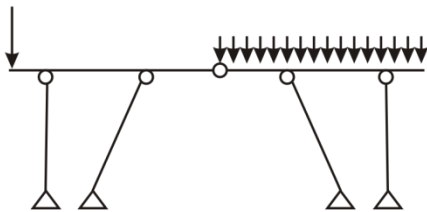
5



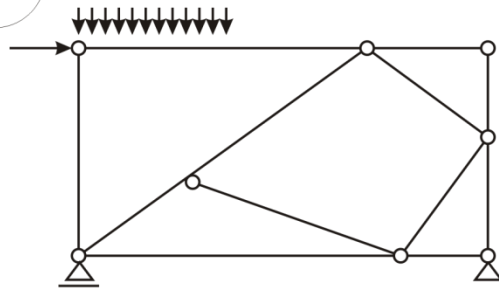
6



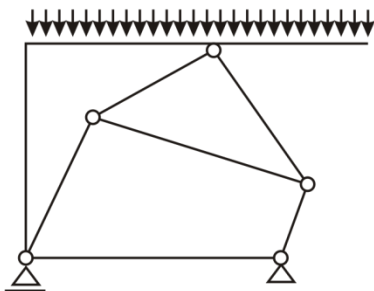
7



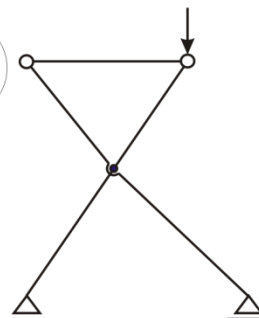
8



9



10



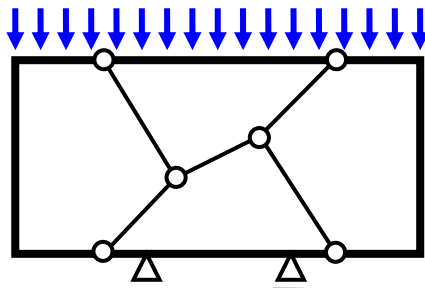
Rys. 12.29 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Dodatek

**Wskazówki**

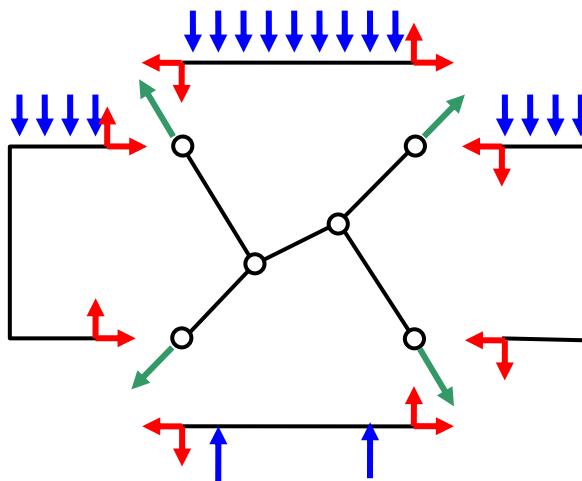
Obliczenia można uprościć odpowiednio dobierając punkt redukcji momentów lub taką oś rzutowania, aby jak najwięcej niewiadomych zniknęło. Taki wybór nie tylko oszczędza czas i wysiłek ale też daje większą szansę prawidłowości uzyskanych wyników.

W przypadkach „ekstremalnych” gdy nie mamy jasnej idei rozwiązania, można rozbić układ na oddzielne podukłady oraz zapisać dla nich równania równowagi, 12.30.



Rys. 12.30 Układ z prętami kratownicowymi „wewnątrz” elementów belkowych

Otrzymujemy cztery element ramowe i pięć kratowych, rys. 12.31.



Rys. 12.31 Dekompozycja układu

Mamy cztery tarcze, pięć prętów i trzy reakcje, a więc:  $4 \cdot 4 + 5 + 3 = 24$  niewiadome. Mamy też trzy równania równowagi dla każdej tarczy i dwa równania dla każdego przegubu „kratowego”, więc  $4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 24$  równań. Nie oznacza to, że musimy rozwiązać pełny układ 24 równań z 24 niewiadomymi – wiele z nich da się rozprzęgnąć na mniejsze podukłady.