

13. Charakterystyki geometryczne przekroju

Wstęp

Definicje

pole przekroju

$$A = \iint_A dA, [\text{m}^2]$$

momenty statyczne

$$S_y = \iint_A z dA, \quad S_z = \iint_A y dA, [\text{m}^3]$$

centroid (środek ciężkości)

$$C(y_c, z_c): \quad y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A}$$

osie centralne (środkowe) – osie przechodzące przez centroid (środek ciężkości)

momenty bezwładności i moment dewiacji

$$J_y = \iint_A z^2 dA, \quad J_z = \iint_A y^2 dA, \quad J_{yz} = \iint_A yz dA, [\text{m}^4]$$

centralne momenty bezwładności – momenty bezwładności względem osi centralnych
macierz momentów bezwładności¹

$$\begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$$

główne centralne osie bezwładności – osie x_1, x_2 względem którym momenty dewiacji zerują się

$$\begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

główne centralne momenty bezwładności – momenty bezwładności względem osi głównych centralnych

$$J_1 = \frac{J_y + J_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}, \quad J_2 = \frac{J_y + J_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}, \quad \tan \alpha = \frac{J_1 - J_y}{-J_{yz}},$$

główne centralne promienie bezwładności

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}}, [\text{m}]$$

elipsa bezwładności – elipsa której półosie są równe głównym centralnym promieniom bezwładności²
biegunowy moment bezwładności

$$J_O = \iint_A r^2 dA, [\text{m}^4]$$

Zasada superpozycji

Z addytywności całkowania wynika, że każda z całek może być obliczana jako suma całek w podobzarach. W tym celu można przekrój poprzeczny podzielić na prostsze figury geometryczne, dla których wynik całkowania jest znany, a wyniki zsumować.

Twierdzenia Steinera

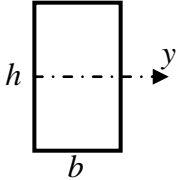
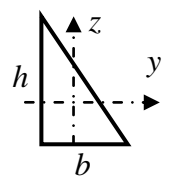
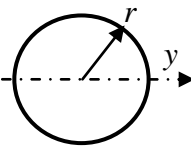
Znając wartości momentów statycznych i bezwładności względem osi centralnej można je odnieść do osi równoległej l , w odległości d od osi centralnej c :

¹ można pokazać, że tak zdefiniowana macierz momentów bezwładności jest tensorem

² uwaga: promień bezwładności względem osi y jest odkładany na osi z i na odwrot

$$S_l = S_c + A \cdot d, \quad J_l = J_c + A \cdot d^2$$

Podstawowe wzory do zapamiętania

figura	rysunek	pole	Moment bezwładności
prostokąt		bh	$J_y = \frac{bh^3}{12}$
trójkąt prostokątny		$\frac{1}{2}bh$	$J_y = \frac{bh^3}{36}$ $J_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$ ³
koło		πr^2	$J_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $J_0 = \frac{\pi r^4}{2}$

Tablica 13.1 Charakterystyki prostych figur

Wnioski wypływające z rachunku tensorowego

Osie główne centralna są prostopadłe do siebie.

Główne centralne momenty bezwładności są ekstremalne (jeden maksymalny a drugi minimalny).

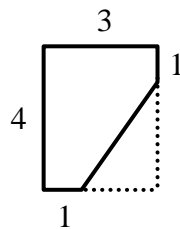
Oś symetrii jest osią główną centralną. Druga oś główna centralna jest do niej prostopadła (i również przechodzi przez środek ciężkości).

Wniosek: Obliczenia charakterystyk geometrycznych przekroju symetrycznego upraszczają się znacznie w stosunku do przypadku ogólnego – momenty główne centralne mogą być obliczane bezpośrednio, bez rozwiązywania problem własnego.

Jeżeli przekrój posiada więcej niż dwie osie symetrii (jak np. każdy z wielokątów foremnych), każda oś centralna jest zarazem główna.

Przykład

Określić charakterystyki geometryczne przekroju na rys. 13.1.



Rys. 14.1 Przekrój poprzeczny

³ the sign of the product moment changes each time a reflection is made

Rozwiązanie

Obliczenia wykonywane będą dla prostokąta opisanego „minus” trójkąt.
pole przekroju:

$$A = 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$$

środek ciężkości:

$$y_c = \frac{12 \cdot 1.5 - 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2\right)}{9} = 1.222 \text{ cm}$$

$$z_c = \frac{12 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3}{9} = 2.333 \text{ cm}$$

centralne momenty bezwładności:

$$J_{yc} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} + 12 \cdot (2 - 2.333)^2 - \frac{2 \cdot 3^3}{36} - 3 \cdot (1 - 2.333)^2 = 10.5 \text{ cm}^4$$

$$J_{zc} = \frac{3^3 \cdot 4}{12} + 12 \cdot (1.5 - 1.222)^2 - \frac{2^3 \cdot 3}{36} - 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2 - 1.222\right)^2 = 5.556 \text{ cm}^4$$

$$J_{zycc} = 0 + 12 \cdot (2 - 2.333) \cdot (1.5 - 1.222) - \frac{2^2 \cdot 3^2}{72} - 3 \cdot (1 - 2.333) \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2 - 1.222\right) = 2.833 \text{ cm}^4$$

główne centralne momenty bezwładności i kierunki główne

$$J_1 = \frac{10.5 + 5.556}{2} + \sqrt{\left(\frac{10.5 - 5.556}{2}\right)^2 + 2.833^2} = 11.79 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{10.5 + 5.556}{2} - \sqrt{\left(\frac{10.5 - 5.556}{2}\right)^2 + 2.833^2} = 4.27 \text{ cm}^4$$

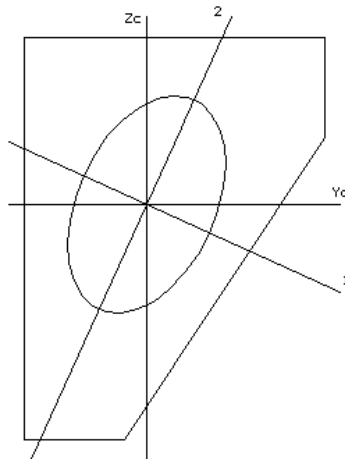
$$\tan \alpha = \frac{11.79 - 10.5}{-2.833} = -0.4553 \rightarrow \alpha = -0.4273 \quad (-24.48^\circ)$$

główne centralne promienie bezwładności:

$$i_1 = \sqrt{\frac{11.79}{9}} = 1.14 \text{ cm}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{4.27}{9}} = 0.69 \text{ cm}$$

elipsa bezwładności (z programu przekroj.exe):

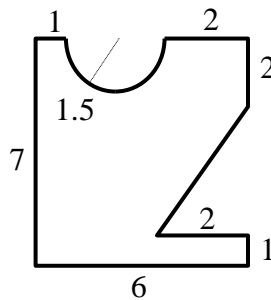


Rys. 13.2 Elipsa bezwładności przekroju

Ćwiczenia

Problem 1

Określić charakterystyki przekroju z rys. 13.3.



Rys. 13.3 Problem 1

Rozwiązanie

obliczamy: prostokąt „minus” trójkąt „minus” półkole

pole przekroju: $A = 7 \cdot 6 - 0.5 \cdot 2 \cdot 4 - 0.5 \cdot \pi \cdot 1.5^2 = 34.47 \text{ cm}^2$

środek ciężkości:

$$y_c = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3 - 0.5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(4 + \frac{4}{3}\right) - \frac{\pi 1.5^2}{2} \cdot 2.5}{34.47} = 2.78$$

$$z_c = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3.5 - 0.5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) - \frac{\pi 1.5^2}{2} \cdot \left(7 - \frac{4 \cdot 1.5}{3 \cdot \pi}\right)}{34.47} = 3.34$$

centralne momenty bezwładności

$$I_{y_c} = \frac{6 \cdot 7^3}{12} + 42 \cdot (3.5 - 3.34)^2 - \frac{2 \cdot 4^3}{36} - 4 \cdot \left(\frac{7}{3} - 3.34\right)^2 - 1.5^4 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) - \frac{\pi 1.5^2}{2} \cdot \left(7 - \frac{6}{3\pi} - 3.34\right)^2 = 132.1 \text{ cm}^4$$

$$I_{z_c} = \frac{7 \cdot 6^3}{12} + 42 \cdot (3 - 2.78)^2 - \frac{4 \cdot 2^3}{36} - 4 \cdot \left(\frac{13}{3} - 2.78\right)^2 - \frac{\pi 1.5^4}{8} - \frac{\pi 1.5^2}{2} \cdot (2.5 - 2.78)^2 = 98.80 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_c z_c} = 0 + 42 \cdot (3.5 - 3.34) \cdot (3 - 2.78) - \frac{2^2 \cdot 4^2}{72} - 4 \cdot \left(\frac{7}{3} - 3.34\right) \cdot \left(\frac{13}{3} - 2.78\right) - 0 - \frac{\pi 1.5^2}{2} \cdot \left(7 - \frac{6}{3\pi} - 3.34\right) \cdot (2.5 - 2.78) = 13.86 \text{ cm}^4$$

główne centralne momenty bezwładności

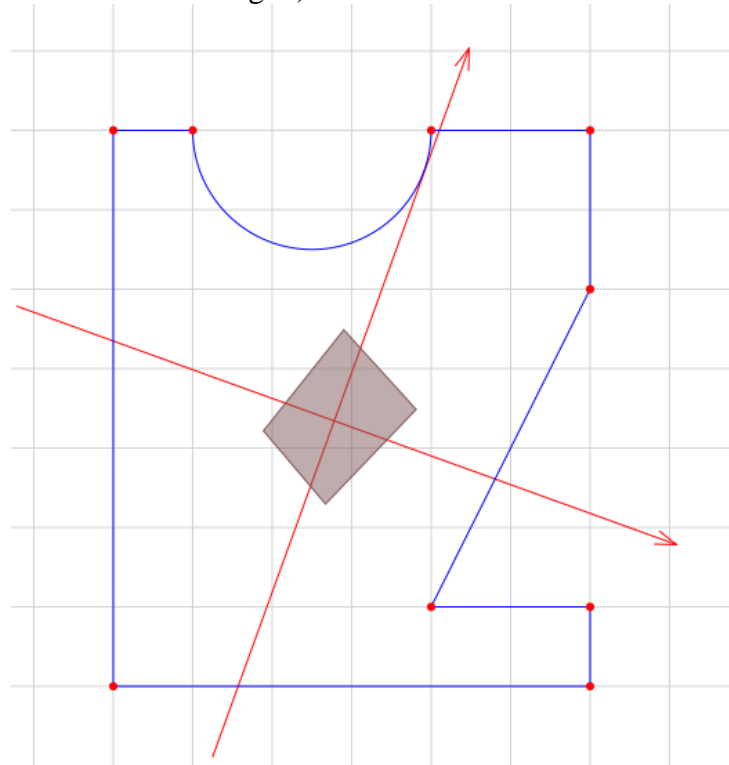
$$I_y = \frac{132.1+98.8}{2} + \sqrt{\left(\frac{132.1-98.8}{2}\right)^2 + 4 \cdot 13.86^2} = 137.1 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{132.1+98.8}{2} - \sqrt{\left(\frac{132.1-98.8}{2}\right)^2 + 4 \cdot 13.86^2} = 93.79 \text{ cm}^4$$

kierunki główne (kąąt obrotu)

$$\tan \alpha = \frac{I_y - I_{yc}}{-I_{ycz_c}} = \frac{(137.1 - 132.1)}{-13.86} = -0.361 \rightarrow \alpha = -19.9^\circ$$

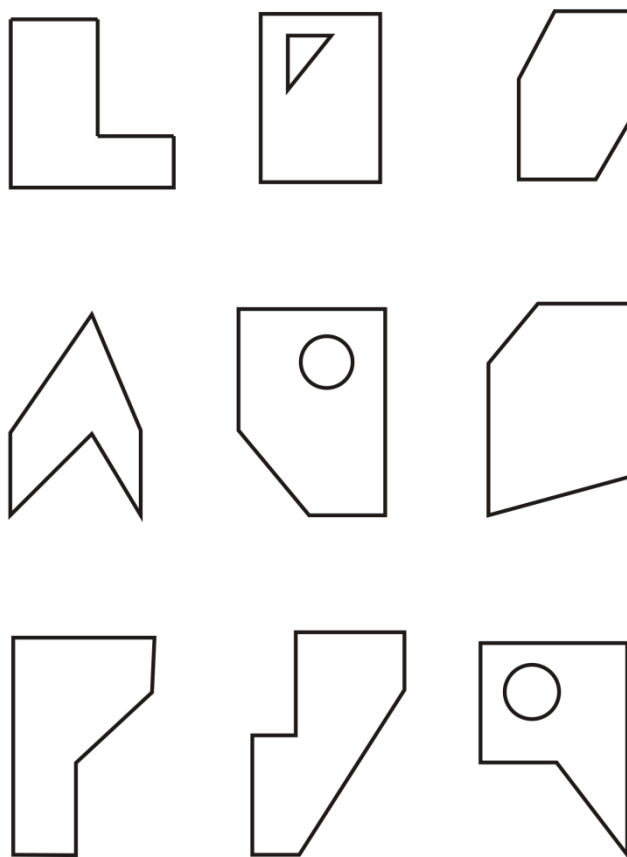
rysunek osi głównych przedstawia rys. 13.4, wygenerowany programem *section.exe*⁴ wraz z tzw. rdzeniem przekroju (o czym w semestrze drugim)



Rys. 13.4 Ośie główne centralne i rdzeń przekroju

⁴ © Paweł Zaborski

Zadania do samodzielnego rozwiązania



Rys. 13.4 Zadania do samodzielnego rozwiązania