

## 14. Stan odkształcenia

### Wstęp

#### Definicje

deformacja – zmiana kąta lub/i odległości pomiędzy dwoma infinitezymalnymi punktami ciała  
rozróżniamy dwie konfiguracje: pierwotną (niezdeformowaną) i końcową (zdeformowaną)

przemieszczenie – różnica położenia punktu w konfiguracji aktualnej i pierwotnej

opis materialny (Lagrange’a) – pierwotna konfiguracja materialna jest konfiguracją odniesienia (zwykle stosowana w mechanice ciała stałego, np. obserwujemy deformację osi belki pod wpływem obciążenia)

opis przestrzenny (Eulera) – konfiguracja przestrzenna jest konfiguracją odniesienia (zwykle stosowana w hydromechanice, np. obserwujemy prędkość przepływu lub ciśnienie w punkcie przekroju rurociągu, nie interesują nas natomiast same cząstki materialne przepływające przez ten punkt)

odkształcenie – miara deformacji z wykluczeniem translacji (przesuwów: ciała lub układu odniesienia)

odkształcenie Lagrange’a – odkształcenie określane z użyciem pierwotnej konfiguracji jako odniesienia

odkształcenie Eulera – odkształcenie określane z użyciem konfiguracji aktualnej (końcowej, zdeformowanej) jako odniesienia

odkształcenie liniowe – względna zmiana długości

odkształcenie kątowe – połowa<sup>1</sup> zmiany kąta prostego

*Uwaga:* odkształcenie jest bezwymiarowe

zajmujemy się przypadkami, w których odkształcenie jest znacznie mniejsze od jedności (np. mniejsze od 0.001) jest to odkształcenie infinitezymalne (t.j. nieskończenie małe)

dla odkształceń infinitezymalnych różnica pomiędzy odkształceniem Lagrange’a a Eulera jest nieistotna

macierz odkształcenia – macierz z liniowymi odkształceniami na przekątnej głównej i kątowymi poza nią  
macierz odkształcenia jest tensorem drugiego rzędu, czyli transformuje się zgodnie z prawem transformacji tensorowej:

– w zapisie indeksowym:

$$\varepsilon_{ij} = a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl}$$

– w zapisie macierzowym:

$$E' = \mathbf{A} \cdot E \cdot \mathbf{A}^T$$

gdzie:

–  $\varepsilon_{ij}$  jest macierzą odkształcenia, z odkształceniami liniowymi na przekątnej i kątowymi poza nią:

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}}_{\text{(scientific notation)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{(engineering notation)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{("old" engineering notation)}}$$

Pojedynczy indeks wskazuje kierunek włókna, para indeksów wskazuje kierunki włókien określających kąt zawarty między nimi.

Macierz może być macierzą odkształcenia jeśli spełnia warunki zgodności (zwane równaniami nierozdzielności), tzn. że określa ciągłe pole przemieszczeń<sup>2</sup>:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

wraz z kinematycznymi warunkami brzegowymi.

<sup>1</sup> to, że połowa, wynika z rachunku tensorowego

<sup>2</sup> z założenia kontinuum materialnego wynika, że tylko zajmujemy się jedynie takimi polami

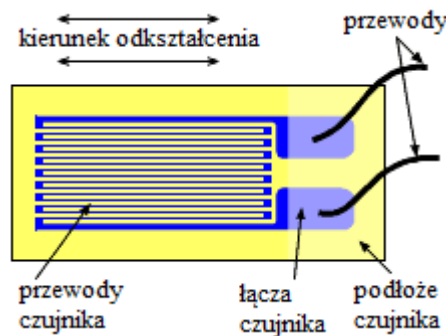
Związki pomiędzy wektorem przemieszczenia i infinitezymalnymi odkształceniami wyrażają się poprzez pochodne cząstkowe (równania Cauchy, geometryczne):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Analiza stanu odkształcenia oznacza rozwiązanie zagadnienia wartości własnych macierzy odkształcenia.

### Pomiar odkształcenia w płaskim stanie odkształcenia

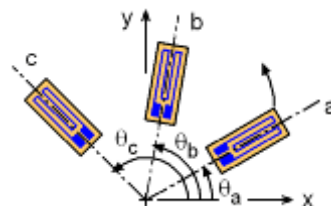
Odształcenie może być mierzone (pośrednio) czujnikami odkształcenia. Odształcenie liniowe mierzone jest czujnikiem, którym przewód doznaje rozciągania/ściskania, rys. 14.1, przytwierdzonym do powierzchni testowanego elementu.



Rys. 14.1 Czujnik odkształcenia

Opór elektryczny przewodu czujnika zmienia się przeciwnie do zmiany odkształcenia (dla rozciągania rośnie a maleje dla ściskania). Większość urządzeń współpracujących z czujnikami tego typu zamienia zmiany oporu na odkształcenia.

Ponieważ pojedynczy czujnik mierzy odkształcenie w jednym określonym kierunku, dwa czujniki są niezbędne aby pomierzyć odkształcenia liniowe w płaskim stanie odkształcenia (na płaszczyźnie obiektu testowanego). Pomiar odkształceń kątowych takimi czujnikami wymaga specyficznej budowy, i takie czujniki są bardzo rzadko stosowane. Zamiast tego wystarcza pomiar odkształcenia z trzecim, niezależnym kierunku. Trzy czujniki umieszczone w jednym punkcie (no, raczej miejscu) badanego obiektu nazywa się rozetą tensometryczną, rys. 14.2.



Rys. 14.2 Rozeta tensometryczna

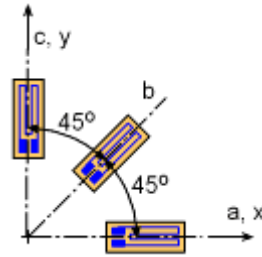
Mając pomiar odkształceń liniowych w trzech kierunkach można określić macierz odkształceń w płaskim stanie odkształcenia z rachunku tensorowego.

### Przykład – rozeta 45°

Odształcenia są mierzone na kierunkach 0°, 45°, 90° i wynoszą:  $\varepsilon_a = 0.0005$ ,  $\varepsilon_b = 0.0002$ ,  $\varepsilon_c = -0.0003$ . Określić składowe macierzy odkształcenia, odkształcenia główne i ich kierunki.

#### Rozwiązanie

Czujniki znajdują się pod kątem°, rys. 14.3:



Rys. 14.3 Rozeta tensometryczna 45°

Kierunki  $a$  oraz  $x$  pokrywają się  $\varepsilon_x = \varepsilon_a = 0.0005$ . Podobnie dla kierunku  $c$  oraz  $y$ , więc

$\varepsilon_y = \varepsilon_c = -0.0003$ . Dla odkształcenia w kierunku  $b$  mamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \varepsilon_x \cos^2(b, x) + \varepsilon_y \cos^2(b, y) + \varepsilon_{xy} \cos(b, x) \cos(b, y) + \varepsilon_{yx} \cos(b, y) \cos(b, x) = \\ &= 0.0005 \cdot (\cos 45^\circ)^2 - 0.0003 \cdot (\cos 45^\circ)^2 + 2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0.0005 \cdot 0.5 - 0.0003 \cdot 0.5 + 2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot 0.5 = \\ &= 0.00025 - 0.00015 + \varepsilon_{xy} \end{aligned}$$

Ponieważ  $\varepsilon_b = 0.0002$ , mamy:

$$0.0001 + \varepsilon_{xy} = 0.0002 \rightarrow \varepsilon_{xy} = 0.0001$$

oraz

$$T_e = \begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.0003 \end{pmatrix}.$$

Wartości własne odkształceń obliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \frac{0.0005 - 0.0003}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.0005 + 0.0003}{2}\right)^2 + 0.0001^2} = \\ &= 0.0001 + 0.000412 = 0.000512 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \frac{0.0005 - 0.0003}{2} - \sqrt{\left(\frac{0.0005 + 0.0003}{2}\right)^2 + 0.0001^2} = \\ &= 0.0001 - 0.000412 = 0.000312 \end{aligned}$$

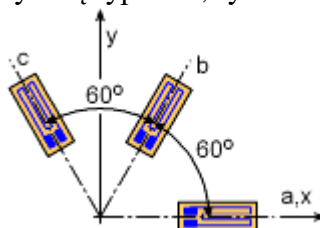
Kierunki główne obliczamy ze wzoru:

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\varepsilon_{xy}} = \frac{0.000512 - 0.0005}{0.0001} = 0.12 \rightarrow \alpha = 0.12 \quad (= 6.8^\circ)$$

## Ćwiczenia

### Problem 1

Odkształcenia mierzone rozetą tensometryczną typu  $\Delta^3$ , rys. 14.4, wynoszą:



Rys. 14.4 Rozeta tensometryczna 60°

<sup>3</sup> delta, od greckiej litery, w której kąty są – w przybliżeniu – 60 stopni; często też czujniki są tak rozmieszczone (wokół punktu)

$$\varepsilon_a = -0.0001, \varepsilon_b = -0.0004, \varepsilon_c = 0.0002.$$

Określić odkształcenia główne i ich kierunki.

### Rozwiązanie

Kierunki  $a$  oraz  $x$  pokrywają się  $\varepsilon_x = \varepsilon_a = -0.0001$ .

Dla odkształcenia w kierunku  $b$  mamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \varepsilon_x \cos^2(b, x) + \varepsilon_y \cos^2(b, y) + \varepsilon_{xy} \cos(b, x) \cos(b, y) + \varepsilon_{yx} \cos(b, y) \cos(b, x) = \\ &= -0.0001 \cdot (\cos 60) ^2 + \varepsilon_y \cdot (\cos 30) ^2 + 2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot \cos 60 \cdot \cos 30 = -0.0001 \cdot 0.5 + 0.75 \cdot \varepsilon_y + 0.866 \cdot \varepsilon_{xy} = . \\ &= -0.00005 + 0.75 \cdot \varepsilon_y + 0.866 \cdot \varepsilon_{xy} \end{aligned}$$

Podobnie dla odkształcenia w kierunku  $c$  mamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \varepsilon_x \cos^2(c, x) + \varepsilon_y \cos^2(c, y) + \varepsilon_{xy} \cos(c, x) \cos(c, y) + \varepsilon_{yx} \cos(c, y) \cos(c, x) = \\ &= -0.0001 \cdot (\cos 120) ^2 - 0.0003 \cdot (\cos 30) ^2 + 2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot \cos 120 \cdot \cos 30 = -0.0001 \cdot 0.25 + \varepsilon_y \cdot 0.75 - 0.866 \cdot \varepsilon_{xy} = . \\ &= -0.000025 + 0.75 \cdot \varepsilon_y - 0.866 \cdot \varepsilon_{xy} \end{aligned}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest:  $\varepsilon_y = 0.00005$ ,  $\varepsilon_{xy} = 0.0000144$

a więc:

$$T_e = \begin{pmatrix} -0.0001 & 0.0000144 \\ 0.0000144 & 0.00005 \end{pmatrix}.$$

Wartości własne odkształceń obliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \frac{-0.0001 + 0.00005}{2} + \sqrt{\left(\frac{-0.0001 - 0.00005}{2}\right)^2 + 0.0000144^2} = \\ &= 0.0000514 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \frac{-0.0001 + 0.00005}{2} - \sqrt{\left(\frac{-0.0001 + 0.00005}{2}\right)^2 + 0.0000144^2} = \\ &= -0.000101 \end{aligned}$$

Kierunki główne obliczamy ze wzoru:

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\varepsilon_{xy}} = \frac{0.0000514 + 0.0001}{0.0000144} = 10.51 \rightarrow \alpha = 84.56^\circ$$