

15 Stan naprężenia

Wstęp

Definicje

Wektor naprężenia p_i jest gęstością sił wewnętrznych w płaszczyźnie o normalnej zewnętrznej n_i , równoległej do (jednej z) osi układu współrzędnych.

Tensor naprężenia σ_{ij} jest macierzą składowych wektora naprężenia, zapisaną w danym układzie współrzędnych¹:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j$$

Składowe tensora naprężenia w nowym układzie współrzędnych są określone wzorami transformacyjnymi:

– w zapisie wskaźnikowym:

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

– w zapisie macierzowym:

$$\Sigma' = \mathbf{A} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{A}^T$$

gdzie:

– σ_{ij} jest macierzą naprężenia z naprężeniami normalnymi na przekątnej głównej i stycznymi poza nią:

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}}_{\text{(zapis naukowy)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\text{(zapis inżynierski)}}$$

Pierwszy indeks wskazuje kierunek normalnej do płaszczyzny cięcia. Drugi indeks – kierunek składowej naprężenia.

Macierz może być macierzą naprężenia jeśli spełnia równania równowagi wewnętrznej (układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, tzw. równania Naviera):

$$(\sigma_{ij,j} + P_i = 0, \quad i, j = x, y, z)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0$$

i statyczne warunki brzegowe:

$$q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$q_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \quad (q_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i, j = x, y, z)$$

$$q_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

¹ czyli rzutu wektora naprężenia na kierunki układu współrzędnych

Analiza stanu naprężenia

Głównym jej celem jest znalezienie kierunków, dla których wartości macierzy naprężenia są ekstremalne. Przypadek taki zachodzi, gdy kierunki normalnej zewnętrznej i wektora naprężenia są równoległe, co prowadzi do problemu własnego dla macierzy naprężenia:

$$\sigma_{ij}n_j = \lambda n_i \rightarrow (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0.$$

Układ liniowych równań algebraicznych m niezerowe (mówimy: nietrywialne) rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy wyznacznik główny układu jest równy zero. Z tego warunku otrzymujemy równanie sześciennic dla wartości własnych naprężeń:

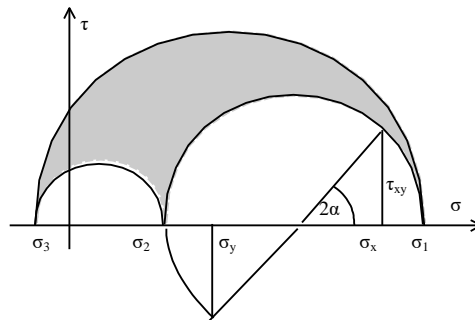
$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Macierz naprężenia w układzie własnym ma postać diagonalną: naprężenia styczne zerują się. Z algebry wiadomo, że naprężenia główne są ekstremalne a kierunki główne są prostopadłe do siebie:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\text{(układ wyjściowy)}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}}_{\text{(układ własny)}}$$

Koła Mohra

Transformacja przez obrót z jednego (wyjściowego) układu współrzędnych do innego powoduje zmianę składowych macierzy naprężenia. Zakres możliwych rozwiązań zawiera się wewnątrz kół Mohra, rys. 15.1 (obszar zakreskowany).



Rys. 15.1 Koła Mohra

Zasada de Saint-Venanta

Jeżeli obciążenie, działające na niewielkiej części brzegu², zastąpimy obciążeniem statycznie równoważnym, to dostatecznie daleko od tej części brzegu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia będą się różnić dostatecznie mało.

Przykłady

Trójwymiarowy stan naprężenia

Dana jest macierz naprężenia i wektor normalnej zewnętrznej. Określić kierunki główne naprężeń i ich wartości oraz składowe normalną i styczną naprężenia na płaszczyźnie określonej normalną.

² w stosunku do największego wymiaru ciała

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 240 & -17 & 40 \\ -17 & 85 & 60 \\ 40 & 60 & -120 \end{pmatrix}, \mathbf{n}(\sqrt{7}, 2, -2)$$

Rozwiązanie

Obliczamy niezmienniki:

$$I_1 = \text{tr}(\sigma_{ij}) = 240 + 85 - 120 = 205$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 240 & -17 \\ -17 & 85 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 85 & 60 \\ 60 & -120 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 240 & 40 \\ 40 & -120 \end{vmatrix} = -24089$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = 240 \cdot \begin{vmatrix} 85 & 60 \\ 60 & -120 \end{vmatrix} + 17 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 60 \\ 40 & -120 \end{vmatrix} + 40 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 85 \\ 40 & 60 \end{vmatrix} = 3494920$$

Równanie sześciennic:

$$\sigma^3 - 205 \cdot \sigma^2 - 24089 \cdot \sigma - 3494920 = 0$$

posiada pierwiastki:

$$\sigma_1 = 245.1, \quad \sigma_2 = 101.0, \quad \sigma_3 = -141.1.$$

Kierunki główne są dane macierzą przejścia (transformacji):

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0.9929 & 0.0404 & -0.1123 \\ 0.0689 & 0.9624 & -0.2627 \\ 0.9583 & 0.2686 & 0.9583 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}.$$

1 2 3

Długość wektora normalnej zewnętrznej:

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{7 + 4 + 4} = 3.8730$$

stąd wersor normalnej zewnętrznej

$$\mathbf{n}(0.6831, 0.5164, -0.5164)$$

Wektor naprężenia:

$$p_j = \sigma_{ij} n_i \rightarrow p(134.5, 1.30, 120.3)$$

jego długość:

$$|\mathbf{p}| = 180.5$$

składowa normalna wektora naprężenia:

$$\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_i n_i = 30.45$$

a składowa styczna:

$$|\tau| = \sqrt{p^2 - \sigma^2} = 177.9$$

Płaski stan naprężenia

Dla zadanego tensora naprężenia, określić wartości własne naprężeń i ich kierunki.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ 16 & -10 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie

Naprężenia główne dane są wzorami:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40 - 10}{2} + \sqrt{\left(\frac{40 + 10}{2}\right)^2 + 16^2} = 44.68$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40 - 10}{2} - \sqrt{\left(\frac{40 + 10}{2}\right)^2 + 16^2} = -14.68$$

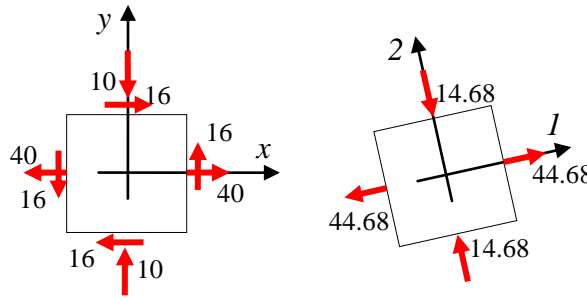
a kierunki główne:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{44.68 - 40}{16} = 0.2925 \rightarrow \alpha_1 = 0.285, (16.3^\circ)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{-14.68 - 40}{16} = -3.4175 \Rightarrow \alpha_2 = -1.286, (-73.7^\circ)$$

Macierz przejścia i tensor naprężenia w układzie głównym zapiszą się, rys. 15.2:

| | | | |
|---|--------|---------|--|
| | 1 | 2 | |
| x | 0.9598 | -0.2808 | $T_\sigma = \begin{pmatrix} 44.68 & 0 \\ 0 & -14.68 \end{pmatrix}$ |
| y | 0.2808 | 0.9598 | |



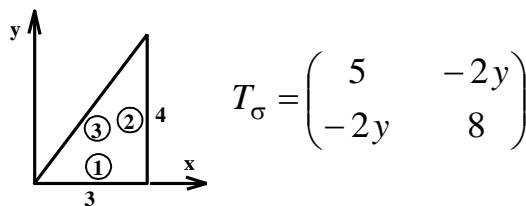
Rys. 15.2 Płaski stan naprężenia – transformacja do układu własnego

lub, w notacji 3D:

| | | | | |
|---|---------|---|---------|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| x | -0.9598 | 0 | 0.2808 | $T_\sigma = \begin{pmatrix} 44.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.68 \end{pmatrix}$ |
| y | -0.2808 | 0 | -0.9598 | |
| z | 0 | 1 | 0 | |

Statyczne warunki brzegowe

Dla zadanego w tarczy tensora naprężenia określić siły masowe i obciążenie brzegu tarczy, rys. 15.3.



Rys. 15.3 Tarcza i stan naprężenia

Rozwiązanie

Siły masowe znajdujemy z równań Naviera: $\mathbf{P}(2, 0)$

statyczne warunki brzegowe, po rozpisaniu

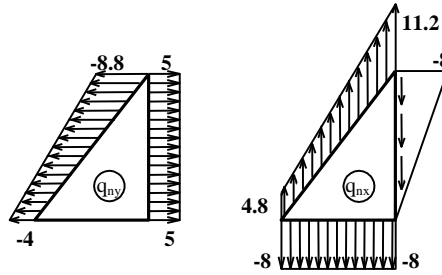
$$\begin{cases} q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ q_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{cases}$$

na części brzegu (1): $\mathbf{n}(0,-1) \rightarrow q_x = 2y = 0, \quad q_y = -8$

na części brzegu (2): $\mathbf{n}(1,0) \rightarrow q_x = 5, \quad q_y = -2y$

na części brzegu (3): $\mathbf{n}(-0.8,0.6) \rightarrow q_x = -4 - 1.2y, \quad q_y = 1.6y + 4.8$

Obciążenie przedstawia rys. 15.4.



Rys. 15.4 Obciążenie tarczy

Sprawdzenie równowagi tarczy:

$$\sum X = -\frac{1}{2} \cdot (8.8 + 4) \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 0, \text{ OK, podobnie: } \sum Y = \dots = 0, \quad \sum M_o = \dots = 0$$

Ćwiczenia

Problem 1

Przykład 4: płaski stan naprężenia

Dla podanego płaskiego stanu naprężenia, określić wartości własne, kierunki główne i macierz przejścia. Transformację układu zinterpretować graficznie. Rozpisać tensorowe prawo transformacji dla składowych σ_{11} i τ_{12} tensora w kierunkach głównych i porównać ich wartości z wyliczonymi z zagadnienia wartości własnych.

Dane: $\sigma_x = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -15 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -15 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie:

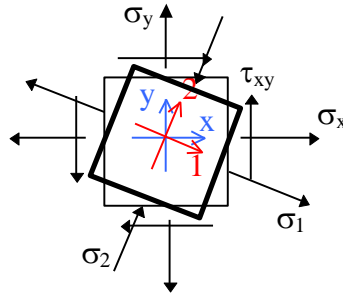
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_1 = 25.55 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -20.55 \text{ MPa}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = -0.185, \quad \alpha_1 = -10.48^\circ$$

macierz przejścia:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} \\ a_{1y} & a_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9833 & -0.1819 \\ 0.1819 & 0.9833 \end{pmatrix}$$

interpretacja graficzna:



Rys. 15.5 Transformacja naprężeń

z tensorowego prawo transformacji dla p.s.n.:

$$\sigma_{11} = a_{1x}^2 \sigma_{xx} + a_{1y}^2 \sigma_{yy} + 2a_{1x} a_{1y} \tau_{xy} = \dots = 25.55 \text{ MPa} = \sigma_1,$$

$$\sigma_{12} = a_{1x} a_{2x} \sigma_{xx} + a_{1y} a_{2y} \sigma_{yy} + a_{1x} a_{2y} \tau_{xy} + a_{1y} a_{2x} \tau_{yx} = \dots = 0.$$

Problem 2

Przestrzenny stan naprężenia

Dana jest macierz naprężenia oraz wektor normalnej zewnętrznej do brzegu ciała. Określić wektor obciążenia i jego składowe: normalną i styczną.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 200 & -300 & 100 \\ & -200 & 150 \\ & & 100 \end{pmatrix} \text{ MPa, } \bar{n}(-2,3,2)$$

Określić rzuty wektora naprężenia na kierunki wersorów $v_1(0,-0.5547,0.8320)$, $v_2(0.8745,0.4036,0.2691)$. Wyniki obliczeń zilustrować rysunkiem.

Rozwiązanie:

wersor normalnej: $\bar{n}(-0.4851,0.7276,0.4851)$

wektor obciążenia: $q_i = \sigma_{ij} n_j$, co rozpisujemy:

$$q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \quad q_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \quad q_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

$$q_x = 200 \cdot (-0.4851) - 300 \cdot 0.7276 + 100 \cdot 0.4851 = -266.8$$

$$q_y = -300 \cdot (-0.4851) - 200 \cdot 0.7276 + 150 \cdot 0.4851 = 72.78$$

$$q_z = 100 \cdot (-0.4851) + 150 \cdot 0.7276 + 100 \cdot 0.4851 = 109.1$$

$$\text{długość wektora obciążenia: } q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \sqrt{266.8^2 + 72.78^2 + 109.1^2} = 297.3$$

składową normalną obliczamy rzutując wektor obciążenia na kierunek normalnej:

$$\sigma = q_i n_i = q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = -266.8 \cdot (-0.4851) + 72.78 \cdot 0.7276 + 109.1 \cdot 0.4851 = 235.3$$

a jego składową styczną z równoległoboku sił:

$$\tau = \sqrt{q^2 - \sigma^2} = \sqrt{297.3^2 - 235.3^2} = 181.7$$

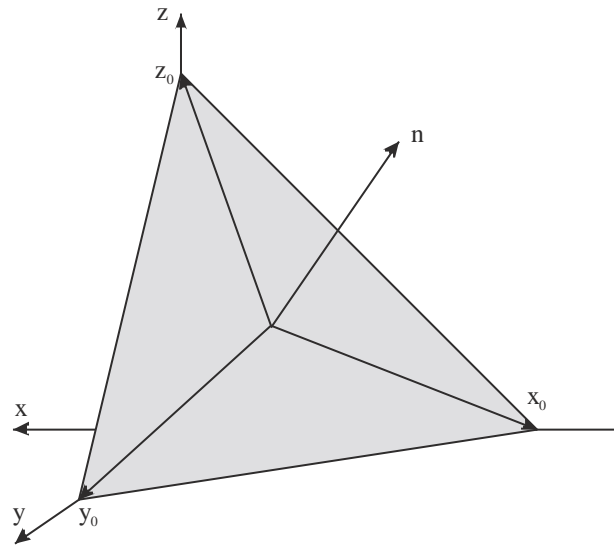
Rzuty na kierunki wektorów v_1 i v_2 wynoszą odpowiednio:

$$\tau_1 = q_i v_i = -266.8 \cdot 0 + 72.78 \cdot (-0.5547) + 109.1 \cdot 0.8320 = 50.40$$

$$\tau_2 = q_i v_i = -266.8 \cdot 0.8745 + 72.78 \cdot 0.4036 + 109.1 \cdot 0.2691 = -174.6$$

Wyniki obliczeń przedstawiamy na rysunku. Aby prawidłowo narysować płaszczyznę cięcia, zakładamy że przechodzi ona przez punkt nieco przesunięty względem początku układu, np. (1,1,1). Przecina ona osie układu współrzędnych w punktach $(x_0,0,0)$, $(0,y_0,0)$, $(0,0,z_0)$.

Współrzędne punktów znajdziemy z warunku ortogonalności wektorów łączących te punkty z punktem (1,1,1) z wersorem normalnej zewnętrznej, por. rys.: 15.6



Rys. 15.6 Cięcie płaszczyzną o zadanej normalnej

$$(n_x, n_y, n_z) \perp (x_0 - 1, -1, -1) \rightarrow n_x(x_0 - 1) - n_y - n_z = 0 \rightarrow$$

$$x_0 = \frac{n_x + n_y + n_z}{n_x}$$

$$(n_x, n_y, n_z) \perp (-1, y_0 - 1, -1) \rightarrow -n_x + n_y(y_0 - 1) - n_z = 0 \rightarrow$$

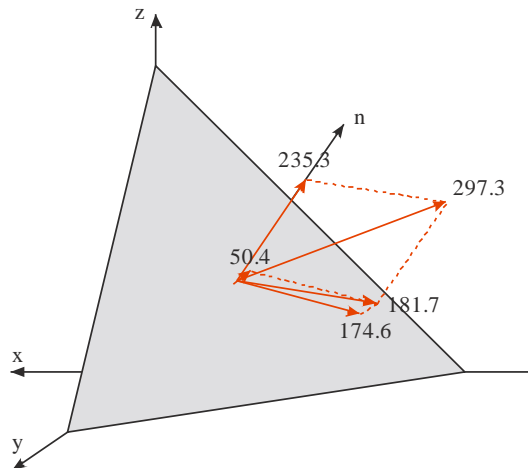
$$y_0 = \frac{n_x + x_y + n_z}{n_y}$$

$$(n_x, n_y, n_z) \perp (-1, -1, z_0 - 1) \rightarrow -n_x - n_y + n_z(z_0 - 1) = 0 \rightarrow$$

$$z_0 = \frac{n_x + n_y + n_z}{n_z}$$

skąd: $x_0 = -1.50$, $y_0 = 1.00$, $z_0 = 1.50$.

Dobieramy kąt widzenia zapewniający widoczność płaszczyzny cięcia a odkładając współrzędne wektorów uwzględniamy skrót perspektywiczny, rys. 15.7.



Rys. 15.7 Ilustracja graficzna rozwiązania

Problem 3:

Przestrzenny stan naprężenia

Dana jest macierz naprężenia. Określić naprężenia i kierunki główne. Obliczyć wektor naprężenia na płaszczyźnie o zadanej normalnej zewnętrznej \mathbf{n} . Obliczyć składowe normalną i styczną wektora obciążenia.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}(1, -1, \sqrt{7})$$

Rozwiązanie:

Obliczamy niezmienniki podstawowe:

$$I_1 = \{\text{suma po przekątnej}\} = 5 + 8 - 7 = 6,$$

$$I_2 = \{\text{suma podwyznaczników}\} = 5 \cdot 8 - 2 \cdot 2 - 8 \cdot 7 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 4 \cdot 4 = 40 - 4 - 56 - 36 - 35 - 16 = -107,$$

$$I_3 = \{\text{wyznacznik z macierzy, } \det(T_{\sigma})\} = 5 \cdot (-8 \cdot 7 - 6 \cdot 6) + 2 \cdot (2 \cdot 7 - 4 \cdot 6) + 4 \cdot (-2 \cdot 6 - 8 \cdot 4) = -656$$

Równanie sześciennic ma postać:

$$\sigma^3 - 6\sigma^2 - 107\sigma + 656 = 0$$

pierwiastki tego równania, czyli wartości własne (wartości główne, niezmienniki główne, naprężenia główne), wynoszą:

$$\sigma_1 = 10.1809$$

$$\sigma_2 = 6.20436$$

$$\sigma_3 = -10.3853$$

Rozwiązujemy (programem naprez.exe, ©A. Zaborski) zagadnienie wartości własnych kolejno dla każdego z pierwiastków z osobna, otrzymując wersory kolejnych kierunków własnych (głównych):

$$\text{dla } \sigma_1: (-0.134093, 0.944864, 0.29875)$$

$$\text{dla } \sigma_2: (0.951374, 0.0383786, 0.305639)$$

$$\text{dla } \sigma_3: (0.277321, 0.325207, -0.904065)$$

i w rezultacie macierz przejścia z układu wyjściowego do własnego ma postać:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -0.134093 & 0.944864 & 0.29875 \\ 0.951374 & 0.0383786 & 0.305639 \\ 0.277321 & 0.325207 & -0.904065 \end{pmatrix}$$

gdzie np. kosinus kąta między osią „y” a „3” wynosi 0.325207. Macierz jest ortogonalna i unormowana (czyli ortonormalna), co łatwo sprawdzić. Jedyne 3 jej składowe są niezależne.

Interpretacja geometryczna. Transformacja wyjściowego układu współrzędnych (x, y, z) do układu własnego polega na złożeniu 3 obrotów względem osi współrzędnych. Zakładając, że obroty są wykonywane w kolejności względem osi z, potem x a na końcu względem y, obliczamy współrzędne wersorów układu wyjściowego po transformacji, składając poszczególne transformacje:

$$A = (\text{3 wersory}) (\text{obrót wzgl.z}) (\text{obrót wzgl.x}) (\text{obrót wzgl.y})$$

czyli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

gdzie α , β , γ oznaczają odpowiednie kąty obrotu względem osi, otrzymując:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

skąd wyliczamy (np. Matlabem):

$$\alpha = 1.5302072 \text{ (ok. } 87.57^\circ)$$

$$\beta = -0.33123062 \text{ (ok. } -18.98^\circ)$$

$$\gamma = 2.8439558 \text{ (ok. } 162.9^\circ)$$

Oczywiście zmieniając kolejność obrotów (składania transformacji składowych) otrzymamy inne kąty gdyż mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Sprawdźmy macierz przejścia obliczając transformację z prawa transformacji tensorowej:

$$\sigma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{x1} a_{x1} \sigma_{xx} + a_{x1} a_{y1} \tau_{xy} + a_{x1} a_{z1} \tau_{xz} + \\ &+ a_{y1} a_{x1} \tau_{yx} + a_{y1} a_{y1} \sigma_{yy} + a_{y1} a_{z1} \tau_{yz} + \\ &+ a_{z1} a_{x1} \tau_{zx} + a_{z1} a_{y1} \tau_{zy} + a_{z1} a_{z1} \sigma_{zz} = \\ &= (-0.134094) \cdot [-0.134093 \cdot 5 + 0.944864 \cdot (-2) + 0.29875 \cdot 4] + \\ &+ 0.944864 \cdot [-0.134093 \cdot (-2) + 0.944864 \cdot 8 + 0.29875 \cdot 6] + \\ &+ 0.29875 \cdot [-0.134093 \cdot 4 + 0.944864 \cdot 6 + 0.29875 \cdot (-7)] = 10.1809 \text{ \{OK.\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= a_{x1} a_{x2} \sigma_{xx} + a_{x1} a_{y2} \tau_{xy} + a_{x1} a_{z2} \tau_{xz} + \\ &+ a_{y1} a_{x2} \tau_{yx} + a_{y1} a_{y2} \sigma_{yy} + a_{y1} a_{z2} \tau_{yz} + \\ &+ a_{z1} a_{x2} \tau_{zx} + a_{z1} a_{y2} \tau_{zy} + a_{z1} a_{z2} \sigma_{zz} = \\ &= (-0.134094) \cdot [0.951374 \cdot 5 + 0.0383786 \cdot (-2) + 0.305639 \cdot 4] + \\ &+ 0.944864 \cdot [0.951374 \cdot (-2) + 0.0383786 \cdot 8 + 0.305639 \cdot 6] + \\ &+ 0.29875 \cdot [0.951374 \cdot 4 + 0.0383786 \cdot 6 + 0.305639 \cdot (-7)] = -5.8 \cdot 10^{-15} \cong 0 \text{ \{OK.\}} \end{aligned}$$

(itd.)

Po obliczeniu wszystkich współrzędnych, otrzymujemy macierz naprężenia w postaci diagonalnej:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 10.1809 & 0 & 0 \\ 0 & 6.20436 & 0 \\ 0 & 0 & -10.3853 \end{pmatrix}$$

Obliczamy wersor płaszczyzny cięcia (normujemy wektor normalnej zewn.):

$$\mathbf{n}(1, -1, \sqrt{7}) \Rightarrow \mathbf{n}(0.3333, -0.3333, 0.8820)$$

2. Obliczenia w układzie wyjściowym (x, y, z):

obliczamy wektor obciążenia, w układzie wyjściowym (x, y, z), ze wzoru: $p_i = \sigma_{ij} n_j$, mamy:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3333 \\ -0.3333 \\ 0.8820 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.861 \\ 1.958 \\ -6.840 \end{pmatrix}$$

jego długość wynosi: $p = 9.218$. Aby obliczyć składową normalną wektora, rzucamy go na kierunek normalnej, czyli – zgodnie z interpretacją iloczynu skalarnego – jest ona równa iloczynowi skalarnemu wektora i wersora normalnej:

$$\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \dots = -4.731.$$

Składową styczną możemy obliczyć z dokładnością do znaku z twierdzenia Pitagorasa:

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2} = \dots = 7.911.$$

Teraz to samo, ale obliczane w układzie głównym (własnym), (1, 2, 3):

transformujemy wersor normalnej zewnętrznej wg wzoru:

$$n_i = a_{ij} n_j = (-0.0962 \quad 0.5739 \quad -0.8133),$$

obliczamy składowe wektora obciążenia:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 10.1809 & 0 & 0 \\ 0 & 6.20436 & 0 \\ 0 & 0 & -10.3853 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0962 \\ 0.5739 \\ -0.8133 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9792 \\ 3.5606 \\ 8.4461 \end{pmatrix}$$

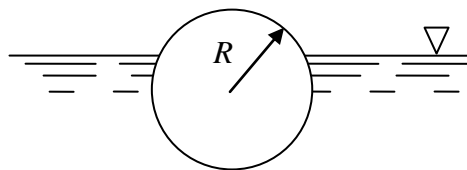
sprawdzamy jego długość: $p = 9.218$ (jak poprzednio) i składową normalną:

$$\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \dots = -4.731 \text{ (jak poprzednio).}$$

Współrzędne wektora różnią się w obu układach, ale długość wektora obciążenia i jego składowe: normalna i styczna, są identyczne.

Problem 2

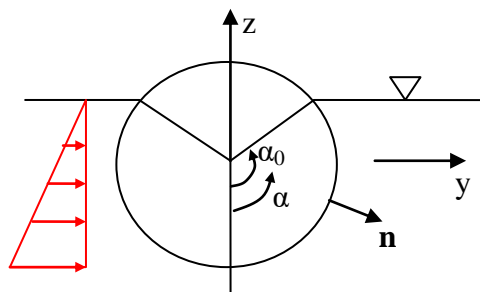
Kłoc drewna o przekroju kołowym pływa w wodzie zanurzony w 2/3 obwodu. Zapisać statyczne warunki brzegowe na obciążonej części pobocznicy i denek walca.



Rys. 15.8 Pływająca drewniana belka

Rozwiązanie

Jak wiadomo z twierdzenia Pascala, ciśnienie hydrostatyczne wody (a tym samym i jej parcie na zanurzone ciało) rośnie liniowo z głębokością, por. rys. 15.9.



Rys. 15.9 Rozkład ciśnienia

wersor normalnej zewnętrznej: $\mathbf{n}(\sin \alpha, -\cos \alpha)$

a ponieważ zwrot ciśnienia jest przeciwny do normalnej zewnętrznej, mamy wyrażenie na całkowite parcie:

$$q = R(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

(przyjęty jednostkowy ciężar właściwy wody)

i po zrzutowaniu na osie, składowe:

$$q_y = -R(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \sin \alpha$$

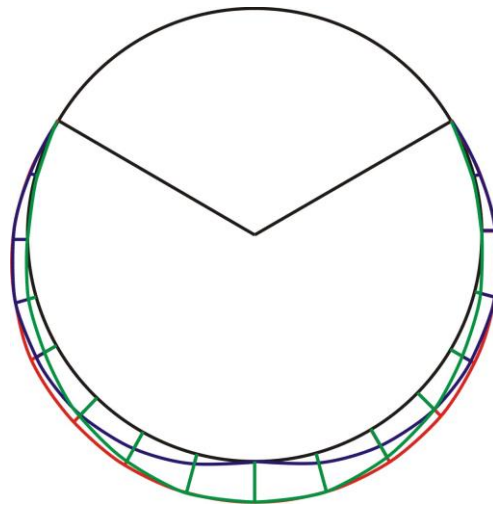
$$q_z = R(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \cos \alpha$$

Wyniki przedstawia tabelka 15.1 i rysunek 15.10.

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|--|------|------|------|------|------|------|-----|
| | 0 | 15 | | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 |
| q | 4.50 | 4.40 | | 4.10 | 3.62 | 3.00 | 2.28 | 1.50 | 0.72 | 0 |
| q_y | 0 | - | | - | - | - | - | -1.5 | - | 0 |
| | | 1.14 | | 2.05 | 2.56 | 2.60 | 2.20 | | 0.70 | |

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|--|------|------|------|------|---|------|---|
| q_z | 4.50 | 4.25 | | 3.55 | 2.56 | 1.50 | 0.59 | 0 | - | 0 |
| | | | | | | | | | 0.19 | |

Tab. 15.1 Wyniki numeryczne



Rys. 15.10 Obciążenie pobocznic walca

Na denkach walca, dla $z < -R \cos \alpha_0 = z_0$:

$$q_x = z - z_0, \quad q_y = q_z = 0$$

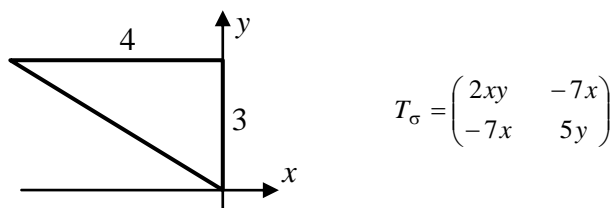
Na nieobciążonej części brzegu jest oczywiście $q_x = q_y = q_z = 0$ (pobocznica i denka nad lustrem wody).

Zadania do samodzielnego rozwiązania

- 1) Zadana jest macierz naprężenia, znaleźć naprężenia główne i ich kierunki. Zilustrować macierz naprężenia przed i po transformacji.

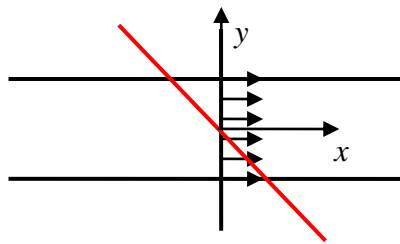
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 150 \\ 150 & 0 \end{pmatrix} \text{ [MPa]}$$

- 2) Dany jest stan naprężenia w tarczy, rys. 15.11, określić siły masowe i obciążenie brzegu.



Rys.15.11 Płaski stan naprężenia

- 3) W przekroju poprzecznym pręta, rys. 15.12 stan naprężenia jest jednoosiowy: $\sigma_x = 150$ [MPa]. Określić składowe naprężenia w przekroju obróconym o 45 stopni wokół osi z, rys. 15.12.



Rys. 15.12 Jednoosiowy stan naprężenia