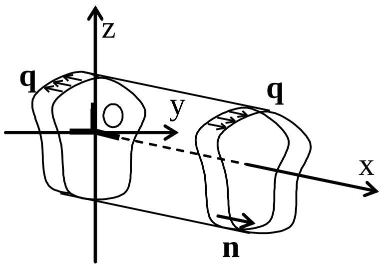
Rozciąganie statycznie wyznaczalne

Sformułowanie problemu



Rys. 1 Sformułowanie problemu

Rozpatrujemy pręt prosty, utwierdzony na jednym końcu w środku przekroju O, obciążony na obu końcach przez stałe obciążenie powierzchniowe działające w kierunku zgodnym z normalnymi zewnętrznymi do powierzchni obciążonych.
Przyjmujemy początku układu w punkcie O, oś *x* jest osią pręta a osie *y*, *z* są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju.
Poszukujemy rozwiązania w postaci naprężeń, odkształceń i przemieszczeń pręta.

Zagadnienie brzegowe

Statyczne warunki brzegowe:

– na pobocznicy:

$$\mathbf{n}(0, n_y, n_z): \quad q_i = 0,$$

– na denkach:

$$\mathbf{n}(\pm 1,0,0): \quad \mathbf{q}(\pm q,0,0)$$

skąd:

$$0 = \tau_{xy}\alpha_{xy} + \tau_{xz}\alpha_{xz}, \qquad \pm q = \pm\sigma_x,$$
$$0 = \sigma_y\alpha_{xy} + \tau_{yz}\alpha_{xz},, \text{ i } \; 0 = \pm\tau_{xy},$$
$$0 = \tau_{yz}\alpha_{xy} + \sigma_z\alpha_{xz}, \qquad 0 = \pm\tau_{xz}.$$

Kinematyczne warunki brzegowe dla równań Cauchy'ego w punkcie $O(0,0,0)$ są:

$$u_i(0,0,0) = 0, \quad u_{i,j}(0,0,0) = 0$$

Podejście statyczne

Na podstawie statycznych warunków brzegowych przewidujemy rozwiązanie w postaci macierzy naprężenia:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

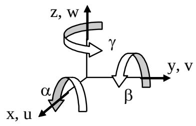
spełniającej statyczne warunki brzegowe oraz równania Naviera przy założeniu braku sił masowych.
Z równań Hooke'a znajdujemy macierz odkształcenia:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{q}{E} & 0 & 0 \\ & -\nu\frac{q}{E} & 0 \\ & & -\nu\frac{q}{E} \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy, że macierz ta spełnia warunki nierozdzielności. Całka ogólna układu równań niejednorodnych Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{q}{E}, & \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\nu \dfrac{q}{E}, & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\nu \dfrac{q}{E}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

jest sumą całki ogólnej układu równań jednorodnych i całki szczególnej pełnego układu równań. Wiedząc że jednorodny układ oznacza zerową macierz odkształcenia, co z kolei oznacza brak odkształceń, całka ogólna układu jednorodnego może być zapisana na podstawie ruchu ciała sztywnego o 6 stopniach swobody: 3 translacjach wzdłuż osi, $\mathbf{u}(a,b,c)$, i 3 obrotach wokół tych osi, $\boldsymbol{\omega}(\alpha,\beta,\gamma)$, rys. 2.



Rys. 2 Stopnie swobody ciała sztywnego

Możemy zapisać:

$$u^0 = a + \beta z - \gamma y,$$
$$v^0 = b - \alpha z + \gamma x,$$
$$w^0 = c - \beta x + \alpha y.$$

Całkę szczególną znajdujemy metodą przewidywania:

$$u^p = \frac{q}{E} x, \quad v^p = -\nu \frac{q}{E} y, \quad w^s = -\nu \frac{q}{E} z.$$

Dodając oba rozwiązania wyznaczamy stałe z kinematycznych warunków brzegowych, otrzymując:

$$a = b = c = \alpha = \beta = \gamma = 0 .$$

Tak więc całka szczególna jest zarazem całką ogólną rozwiązania. W ten sposób zagadnienie brzegowe zostało rozwiązane.

Stan naprężenia jest jednorodny i jednoosiowy a stan odkształcenia jest jednorodny i trójosiowy. Na podstawie hipotezy de Saint-Venanta rozwiązanie można traktować jako ważne również dla każdego innego, statycznie równoważnego układu obciążenia pręta, z wypadkową w postaci siły podłużnej. Podstawiając $q = N/A$, otrzymujemy wzory na naprężenie oraz na wydłużenie pręta:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \Delta l = \varepsilon_x l = \frac{Nl}{EA}$$

Iloczyn EA oznacza *sztywność rozciągania*.

Warunki wymiarowania

- warunek nośności (wytrzymałościowy):
  $$\max(\sigma_x) \le R$$
- warunek użytkowania (sztywności):
  $$\Delta l \le \Delta l_{\mathrm{acc}} .$$

Ściskanie prętów krępych

Rozwiązanie dla ściskania prętów krępych uzyskujemy poprzez zmianę znaku. Jednak rozwiązanie nie może być zastosowane w przypadku smukłych prętów ściskanych. Różnica bowiem jest jakościowa, jak można wnioskować z rozwiązania następującego przykładu.

Dla danych: R = 300 MPa, γst = 78 kN/m^3 określić maksymalną długość wiszącego stalowego pręta obciążonego ciężarem własnym.

Rozwiązanie

Przyjmujemy początek układu współrzędnych na swobodnie wiszącym końcu pręta, mamy:

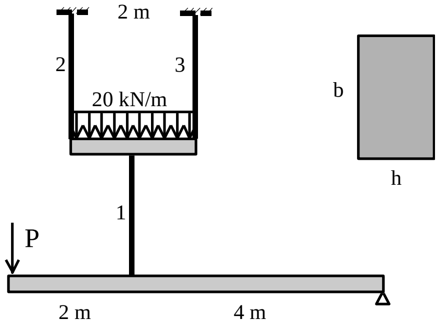
$$N(x) = \gamma A x, \quad \max(\sigma_x) = \frac{N(l)}{A} = \gamma l \le R = 300 \cdot 10^6 \quad \rightarrow \quad l \le 3.85 \text{ km}.$$

Jest oczywiste, że taka długość pręta nie jest możliwa w przypadku wolno stojącego masztu.

Przykłady

Przykład 1

Określić przekrój rozciąganych prętów, rys. 3. Określić zmianę wymiarów prętów.



Rys. 3 Rozciągane pręty

Dane: P = 150 kN, R = 100 MPa, b/h = 0.5, $l_1 = l_2 = l_3 = 2$ m, E = 210 GPa, ν = 0.27.

Rozwiązanie

Z równań statyki mamy:

$N_1 = 225$ kN, $N_2 = N_3 = 132.5$ kN.

Z warunków wymiarowania mamy:

$A_1 \ge 22.5 \text{ cm}^2 \Rightarrow h_1 \ge 6.71$ cm,

$A_2 = A_3 \ge 13.25$ cm2 $\Rightarrow h_2 = h_3 \ge 5.15$ cm.

Przyjmujemy: $A_1 = 7.0 \times 3.5$ cm, $A_2 = A_3 = 5.2 \times 2.6$ cm, wówczas naprężenia są $\sigma_1 = 91.8$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_3 = 98.0$ MPa.

Zmiana wymiarów pręta nr 2 i 3 wynosi:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\sigma_x^{(2)}}{E} = 4.67 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_y^{(2)} = \varepsilon_z^{(2)} = -\nu \varepsilon_x^{(2)} = -1.40 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta l_2 = 9.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \ \Delta h_2 = -7.28 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \ \Delta b_2 = -3.64 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

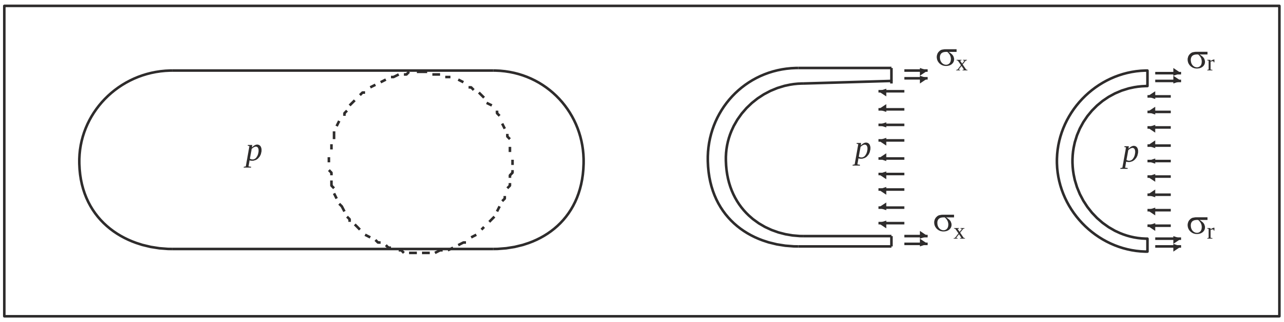
Zmiana objętości wynosi:

$$\Delta V = V - V' = lbh - (l + \Delta l)(h + \Delta h)(b + \Delta b) = lbh\left[1 - (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)\right] = 7.47 \cdot 10^{-4}\, lbh$$, czyli 0.00747%.

Jak widać, wydłużenia prętów są znikome, choć nie mogą być pomijane.

Przykład 2

Określić naprężenia obwodowe i podłużne kotła, rys. 4, pod ciśnieniem wewnętrznym. Grubość ścianki jest stała i niewielka.



Rys. 4 Kocioł pod ciśnieniem wewnętrznym i przekroje: wzdłużny i poprzeczny

Rozwiązanie

Rozpatrujemy dwa przekroje: wzdłużny i poprzeczny. Ciśnienie działa we wszystkich kierunkach, ale interesuje nas jedynie jego składowa pozioma. Pozostałe składowe równoważą się wskutek osiowej symetrii zadania. Zakładamy stałe naprężenia po grubości ścianki.

Z pierwszego przekroju dostajemy siłę osiową

$$N = p\frac{\pi D^2}{4}$$

która jest przenoszona przez naprężenia w ściance:

$A = \pi D\delta$, gdzie δ - grubość ścianki

stąd, naprężenie poosiowe (wzdłużne) jest:

$$\sigma_a = \frac{pD}{4\delta}.$$

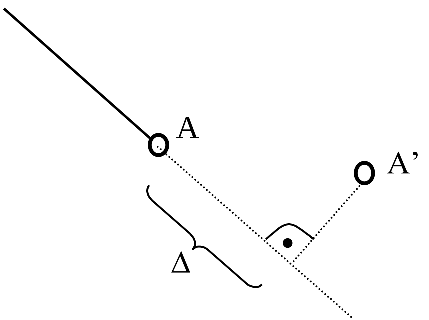
Z drugiego przekroju, stosując podobne rozumowanie, mamy (na metr długości kotła):

$$N = pD\cdot 1,\quad A = 2\delta\cdot 1,\quad \sigma_c = \frac{pD}{2\delta}.$$

Naprężenia obwodowe są dwukrotnie większe niż osiowe, co tłumaczy fakt pękania gorących parówek „wzdłuż” wskutek działania naprężeń obwodowych.

Zlinearyzowana geometria

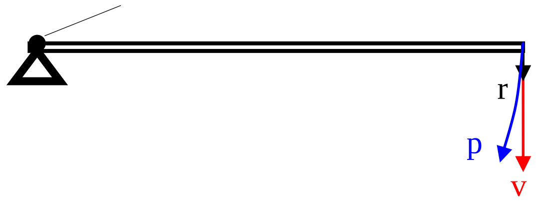
Zakładamy, że pręty wydłużają się (skracają się) na tyle nieznacznie, że zmianę ich kierunków można zaniedbać. Zakładamy więc stałe kierunki prętów. Tym samym, zmiana długości pręta jest odcinkiem określonym przez dwa punkty: rzut aktualnego położenia końca pręta na kierunek pręta i początkowe położenie tegoż końca, rys. 5.



Rys. 5 Wydłużenie pręta

Przypomnijmy, że rozróżniamy przemieszczenia, rys. 6:

– rzeczywiste („prawdziwe”, „aktualne”, obserwowane),
– możliwe (z uwagi na istniejące więzy)
– wirtualne (równoległe do kierunków prędkości wirtualnych).



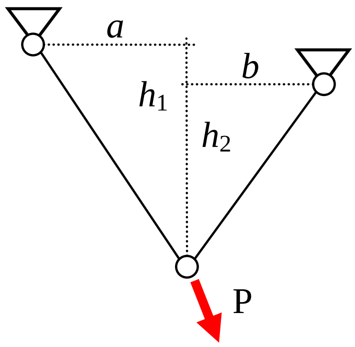
Rys. 6 Przemieszczenia rzeczywiste, możliwe i wirtualne

Zadania kontrolne

Dla układu o podanej geometrii (h_1, h_2, a, b), rys. 7, określić:

a) pola przekroju poprzecznego prętów, dane: siła lub jej składowe, wytrzymałość obliczeniowa R
b) pole przekroju poprzecznego prętów (oba równe), dane: siła lub jej składowe, dopuszczalne przemieszczenie pionowe δ, moduł Younga E
c) składowe przemieszczenia pionowe i poziome, dane: siła lub jej składowe, przekroje prętów oraz moduł Younga E
d) składowe przemieszczenia pionowe i poziome, dane: siła lub jej składowe, przekroje prętów, moduł Younga E, przyrost temperatury Δt oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej α
e) dopuszczalną wartość siły, dane: geometria układu (h_1, h_2, a, b), przekroje prętów, wytrzymałość obliczeniowa R

Wskazówka: zadanie należy rozwiązywać dla danych liczbowych (a nie na liczbach ogólnych), weryfikując za każdym razem rozwiązanie za pomocą mojego programu *statyka* (lub jego wersji pod windowsy).



Rys. 7 Układ dwóch rozciąganych prętów

Odp.

Przyjmowane dane: a = 2 [m], b = 2 [m], h_1 = 4 [m], h_2 = 3 [m], P = 174.6 [kN] (składowe: (40, 170) w prawo i w dół), R = 240 [MPa], A_1 = 7 [cm^2], A_2 = 8 [cm^2], δ = 1.5 [mm], E = 200 [GPa], $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}$, Δt = 40°

a) A_1 = 6.12 [cm^2], A_2 = 1.93 [cm^2]
b) A = 16.9 [cm^2] (obliczamy ugięcie dla przekroju 1 [cm^2] i właściwe pole obliczamy z proporcji)
c) u = 0.00342 [m] (w prawo), v = 0.00354 [m] (w dół) (2 SS, por. rys. obok)
d) u = 0.00381 [m] (w prawo), v = 0.00670 [m] (w dół)
e) P = 285.3 [kN] (obliczamy naprężenia w prętach dla siły jednostkowej i z proporcji określamy siły dopuszczalne ze względu na każdy z prętów, wybieramy mniejszą z wartości)