Rozciąganie statycznie niewyznaczalne

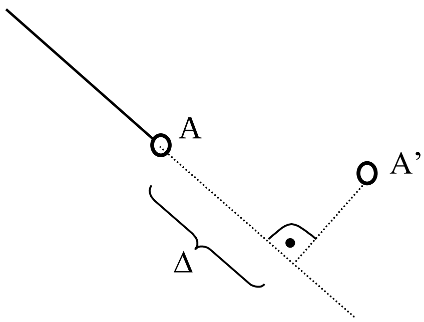
Układy statycznie niewyznaczalne

Gdy liczba niewiadomych jest większa od liczby równań równowagi statycznej zadanie jest statycznie niewyznaczalne. Aby je rozwiązać musimy dołączyć równania nierozdzielności (zgodności, geometryczne). Równania te zawierają niewiadome w postaci parametrów kinematycznych, więc musimy skorzystać z równań fizycznych (Hooke'a) aby parametry kinematyczne wyrazić poprzez wielkości statyczne.
Układ równań powinien więc zawierać:

– równania statyczne,
– równania kinematyczne (ich liczba powinna być równa ilości niewiadomych pomniejszonej o ilość równań statyki)
– równania fizyczne (tu: równania Hooke'a).

Przypomnienie o linearyzacji geometrii

Zakładamy, że pręty wydłużają się (skracają się) na tyle nieznacznie, że zmianę ich kierunków można zaniedbać. Zakładamy więc stałe kierunki prętów. Tym samym, zmiana długości pręta jest odcinkiem określonym przez dwa punkty: rzut aktualnego położenia końca pręta na kierunek pręta i początkowe położenie tegoż końca, rys. 1.

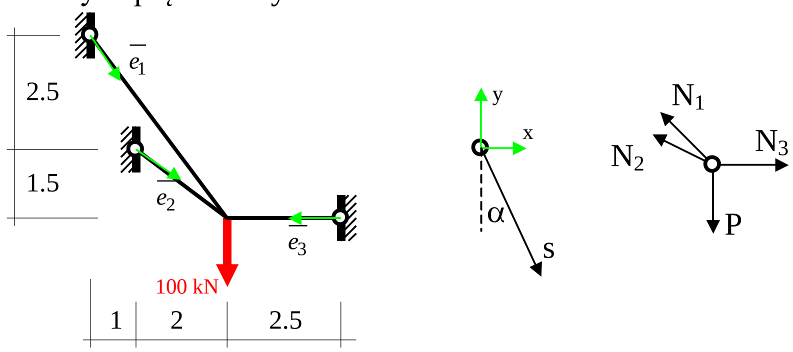


Rys. 1 Wydłużenie pręta

Przykłady zadań statycznie niewyznaczalnych

Przykład 1

Określić siły w odkształcalnych prętach z rys. 2.



Rys. 2 Układ odkształcalnych prętów, przemieszczenie i siły

Rozwiązanie:
Mamy:

$$\mathbf{s} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$$

$$\mathbf{e_1} = (0.6, -0.8), \quad \mathbf{e_2} = (0.8, -0.6), \quad \mathbf{e_3} = (-1, 0)$$

skąd:

$$\Delta_1 = \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{s} = 0.6s \cdot \sin\alpha + 0.8s \cdot \cos\alpha,$$
$$\Delta_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{s} = 0.8s \cdot \sin\alpha + 0.6s \cdot \cos\alpha,$$
$$\Delta_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{s} = -s \cdot \sin\alpha,$$

Eliminując:

$$s \cdot \sin\alpha = -\Delta_3, \quad s \cdot \cos\alpha = \frac{\Delta_2 + 0.8\Delta_3}{0.6}$$

mamy:

$$3\Delta_1 - 4\Delta_2 - 1.4\Delta_3 = 0 \tag{1*}$$

Zakładając $EA = \text{idem}$ i podstawiając równanie Hooke'a zamieniamy niewiadome kinematyczne w r. (1*) na niewiadome statyczne:

$$15N_1 - 10N_2 - 3.5N_3 = 0 \tag{1}$$

Mamy ponadto dwa równania statyczne:

$$-0.6N_1 - 0.8N_2 + N_3 = 0 \tag{2}$$
$$0.8N_1 + 0.6N_2 - P = 0 \tag{3}$$

które, wraz z równaniem (1) tworzą układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Rozwiązaniem są wartości:

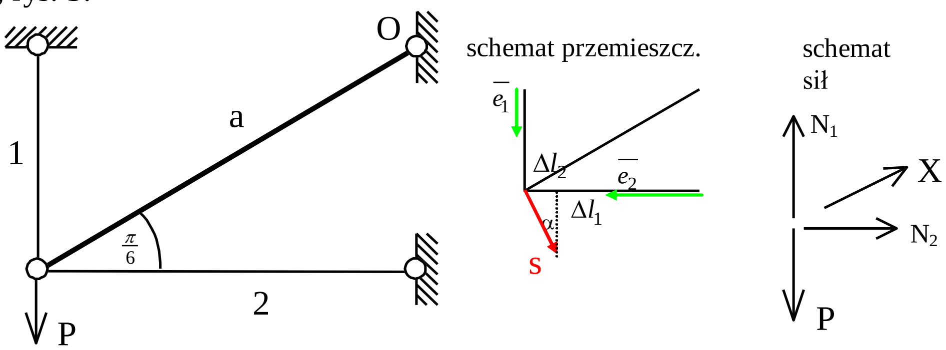
$$N_1 = 0.712P, \quad N_2 = 0.717P, \quad N_3 1.00P\ .$$

Aby zweryfikować przyjęte założenie o liniowej geometrii obliczamy przemieszczenie punktu przyłożenia obciążenia, E = 200 GPa, A = 4 cm^2: $\Delta_1 = \ldots = 4.24$ mm, $\Delta_2 = \ldots = 2.13$ mm, $\Delta_3 = \ldots = 2.98$ mm oraz $\mathbf{s}(2.98, -7.52)$ mm. Przemieszczenia są więc rzeczywiście na tyle niewielkie, że błąd wynikający z założenia o niezmienionych kierunkach prętów jest pomijalnie mały.

Uwaga. Oba schematy: wirtualnych przemieszczeń i równowagi statycznej sił, powinny być ze sobą zgodne. Zawsze można dobrać taki schemat statyczny, aby był zgodny z planem przemieszczeń wirtualnych, przyjmując odpowiednie zwroty sił. Odwrotna kolejność nie zawsze jest możliwa: przyjmując dowolnie znaki sił nie zawsze możemy narysować zgodny z nimi i niesprzeczny plan przemieszczeń wirtualnych. Dlatego „bezpieczniej" jest zacząć od narysowania planu przemieszczeń wirtualnych i dostosować do niego plan sił.

Przykład 2

W tym przykładzie kierunek przemieszczenia punktu obciążenia jest narzucony poprzez zastosowanie sztywnego pręta, rys. 3:



Rys. 3 Schemat układu, przemieszczenia i sił

Rozwiązanie:

Określamy kierunki prętów

$$\bar{s} = s(\sin\alpha, -\cos\alpha), \quad \overline{e_1} = (0, -1), \quad \overline{e_2} = (-1, 0)$$

skąd:

$$\Delta_1 = \bar{s} \cdot \overline{e_1} = s\cos\alpha, \quad \Delta_2 = \bar{s} \cdot \overline{e} = -s\sin\alpha\ .$$

a równanie geometryczne ma postać:

$$\Delta_1 = -\sqrt{3}\Delta_2$$

wstawiając równania konstytutywne, mamy:

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \sqrt{3}\frac{N_2 l_2}{EF}$$

więc

$$N_1 = 3N_2 \tag{1}$$

Równanie statyczne domyka układ:

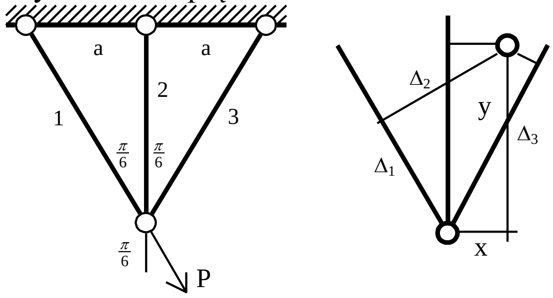
$$(P - N_1)a\cos\tfrac{\pi}{6} + N_2 a\sin\tfrac{\pi}{6} = 0. \tag{2}$$

Rozwiązaniem układu są siły:

$$N_1 = \frac{3\sqrt{3}P}{3\sqrt{3}+1} = 0.8386P, \quad N_2 = -\frac{\sqrt{3}P}{3\sqrt{3}+1} = -0.2795P \text{ (ściskanie).}$$

Przykład 3

Dla kratownicy z rys. 4 określić siły osiowe w prętach.



Rys. 4 Kratownica i schemat przemieszczenia wirtualnego

Rozwiązanie:

Obciążony punkt ma dwa stopnie swobody. Zmian długości prętów możemy wyrazić poprzez wprowadzone parametry przemieszczenia poziomego i pionowego:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \overline{e_1}\cdot\overline{AA_1} = -x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} \\ \Delta_2 = \overline{e_2}\cdot\overline{AA_1} = y \\ \Delta_3 = \overline{e_3}\cdot\overline{AA_1} = x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

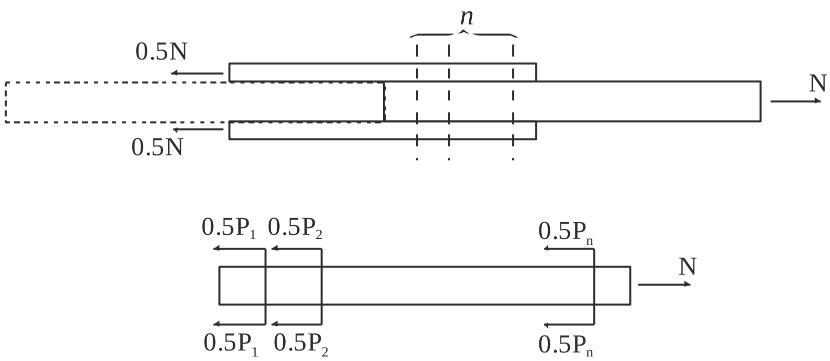
Eliminując parametry stopni swobody, otrzymujemy równanie geometryczne w postaci:

$$\Delta_3 + \Delta_1 = \sqrt{3}\Delta_2 .$$

Wyrażając w powyższym równaniu wydłużenia poprzez siły w prętach, otrzymujemy, wraz z równaniami statyki, komplet równań do wyznaczenia tych sił.

Przykład 4

Dwa stalowe arkusze blachy zostały połączone poprzez dwie identyczne nakładki umieszczone symetrycznie z obu stron łączonych arkuszy, rys. 5, o identycznej podatności jak łączone arkusze. Określić siły przenoszone poprzez nity w zależności od ilości rzędów połączenia.



Rys. 5 Połączenie i siły w rzędach nitów

Rozwiązanie.
Taka sama sztywność rozciągania nakładek $EA = \text{idem}$, oznacza – jeśli materiał nakładek jest taki sam jak łączonych arkuszy – że całkowity przekrój nakładek też powinien być taki sam.
Jest oczywiste, że gdy jest tylko jeden rząd nitów, siła przenoszona przez ten rząd równa jest całkowitej sile *N*. Dla dwóch rzędów każdy z nich przenosi jedynie połowę obciążenia. Dla większej liczby rzędów mamy zadanie statycznie niewyznaczalne. Dla *i*-tego odcinka pomiędzy rzędami, z równań zgodności przemieszczeń łączonych arkuszy i nakładek wynika:

$$\Delta l_i^{(b)} = \Delta l_i^{(n)} \quad \rightarrow \quad \frac{N_i^{(b)} l_i}{EA} = \frac{N_i^{(n)} l_i}{EA} \quad \rightarrow \quad N_i^{(b)} = N_i^{(n)}$$

Siłę, zarówno w arkuszach jak i nakładkach, obliczamy poprzez wykonanie cięć idąc od jednej strony (por. rys.) Idąc z lewej dla arkuszy a z prawej dla nakładek, mamy:

$$P_1 = P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_n$$
$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + \ldots + P_n$$
$$P_1 + P_2 + P_3 = P_4 + \ldots + P_n$$
$$\ldots$$

Odejmując dwa kolejne równania, mamy:

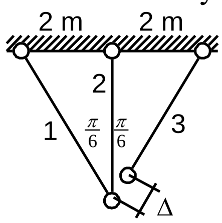
$$P_2 = P_3 = \ldots = P_{n-1} = 0$$

Oznacza to, że obciążenie jest przenoszone jedynie przez dwa skrajne rzędy a pozostałe rzędy „nie pracują” w ogóle. Dlatego w takich połączeniach stosuje się zmienny przekrój nakładek (np. poprzez ich ukosowanie), umożliwiając pracę środkowych rzędów.

Zadania kontrolne

Zadanie 1

Jest to problem tzw. luzu montażowego (a właściwie jego braku): na miejscu budowy okazuje się że jeden z prętów jest nieco krótszy niż zakładano, rys. 6. Określić siły w prętach po połączeniu prętów “na siłę”.



Rys. 6 Problem braku luzu montażowego

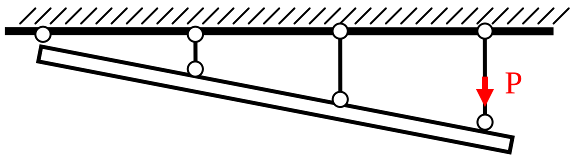
Zadanie 2

Określić siły w prętach kratownicy z rys. 6, przyjmując zamiast niezgodności wymiarów przyrost temperatury o 30 stopni.

Wskazówka: zastosować równanie rozszerzalności cieplnej: $\Delta l(t) = \alpha l \Delta t$.

Zadanie 3

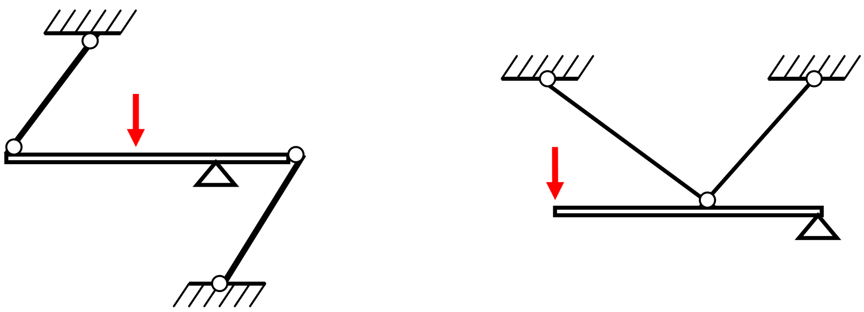
Zakładając niezbędne dane geometryczne i mechaniczne, określić siły w odkształcalnych prętach, rys. 7.



Rys. 7 Sztywny łącznik powieszony na prętach

Zadanie 4

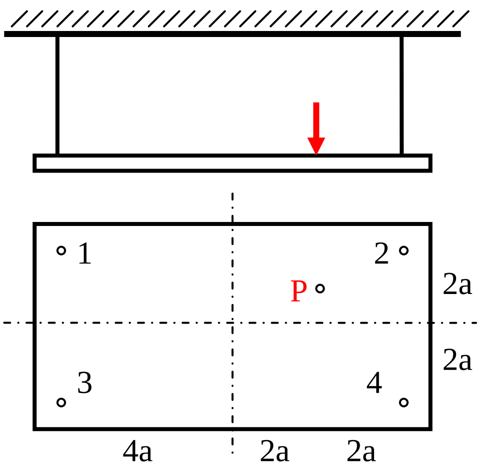
Określić siły w odkształcalnych prętach, rys.8



Rys. 8 Pręty podtrzymujące sztywny łącznik

Zadanie 5

Sztywną płytę podwieszono na 4 prętach, rys. 9. Określić jak obciążenie rozkłada się na siły w odkształcalnych prętach.



Rys. 9 Płyta podwieszona na prętach

Uwagi końcowe

Wskazówka: *Należy zawsze zaczynać rozwiązanie zadania statycznie niewyznaczalnego od ustalenia liczby stopni swobody, t.j. liczby niezależnych parametrów opisujących kinematykę układu. Liczba dodatkowych równań powinna być równa liczbie równań statycznej niewyznaczalności, choć naprawdę „niewyznaczalność" problemu jest określona jego niewyznaczalnością geometryczną. Schemat przemieszczeń wirtualnych powinien poprzedzać schemat równowagi sił.*