

## Proste zginanie

### Wstęp

Zginanie jest najczęstszym przypadkiem w wymiarowaniu wielu elementów konstrukcyjnych, takich jak belki i dźwigary.

Jest to przypadek pryzmatycznego pręta obciążonego momentem zginającym, którego wektor (jest to tzw. wektor swobodny) jest równoległy do głównej centralnej si bezwładności przekroju poprzecznego.

Najprostszymi przykładami prostego zginania są osie wagonów. Taki przypadek nazywany jest, niezbyt szczęśliwie, czteropunktowym zginaniem.

Pewne wyniki prostego zginania będą wykorzystane w innych przypadkach takich jak mimośrodowe rozciąganie czy zginanie poprzeczne.

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego może być znalezione podejściem statycznym, podobnie do rozciągania.

### Hipoteza Bernoulliego

Przekrój poprzeczny, płaski i prostopadły do osi pręta przed obciążeniem, pozostaje płaski i prostopadły do odkształconej osi pręta po obciążeniu.

Powyższe założenie nie wyklucza deformacji w płaszczyźnie przekroju.

Będziemy używać tej hipotezy jako pomocnicze założenie kinematyczne dla innych przypadków obciążenia.

### Stan odkształcenia i naprężenia

Odkształcenie liniowe  $\varepsilon_x$  zmienia się liniowo z odległością od powierzchni obojętnej. Oś obojętna (powierzchnia) przecina przekrój poprzeczny i dzieli go na dwa obszary: ściskany i rozciągany. Oś obojętna pokrywa się z osią główną centralną, względem której działa moment zginający.

Z równania Hooke'a rozkład naprężeń normalnych od zginania jest również liniowy:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z,$$

gdzie  $z$  jest odległością mierzoną od osi głównej centralnej.

Maksymalna bezwzględna wartość naprężenia jest osiągana we włóknach najbardziej odległych od osi obojętnej:

$$\max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{J_y} z_{\max}.$$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie oznaczamy przez  $W_y$  :

$$W_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_y}{z_{\max}} \quad [\text{m}^3]$$

więc,

$$\boxed{\max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{W_y}}$$

Maksymalne naprężenie jest proporcjonalne do momentu zginającego i odwrotnie proporcjonalne do sprężystego wskaźnika na zginanie.

Dla stanu granicznego nośności mamy nierówność wymiarowania:

$$\max|\sigma_x| \leq R \quad \rightarrow \quad \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Na mocy zasady de Saint-Venanta, związki otrzymane mogą być użyte do obliczania naprężenia, jeśli tylko rozpatrywany przekrój jest dostatecznie daleko od przekroju w którym działa obciążenie.

Trzy rodzaje zadań są możliwe:

- poszukujemy materiału, który może przenieść obciążenie (rzadko jednak “sterujemy” materiałem, głównie z powodów ekonomicznych czy technologicznych),
- określamy dopuszczalne obciążenie dla danego materiału i zadanej geometrii przekroju,
- określamy geometrię przekroju, niezbędną do przeniesienia obciążenia.

## Krzywizna osi

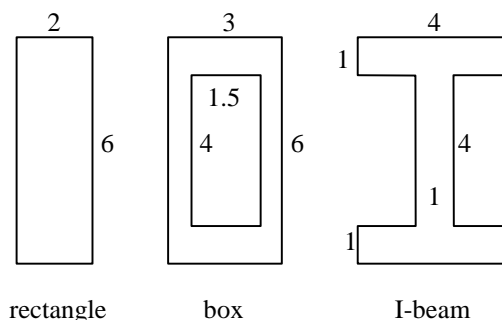
Krzywizna osi pręta wyraża się wzorem:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EJ_y} \left( = \frac{|w''|}{\sqrt{1+(w')^2}^3} \approx |w''| \right)$$

## Przykłady

### Przykład 1

Trzy przekroje mają takie samo pole przekroju i wysokość. Który z przekrojów jest najlepiej sprawdzony na zginanie? Przyjąć identyczną wartość momentu zginającego.



Rys 1 Porównywane przekroje

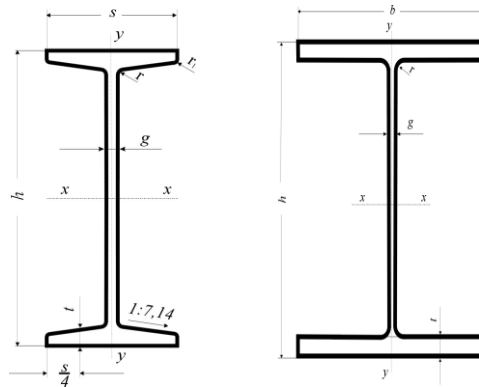
### Rozwiązanie

Obliczamy wskaźnik wytrzymałości na zginanie każdego z przekrojów:

- dla przekroju prostokątnego  $W_y = 12 \text{ cm}^3$  (przyjmujemy jako 100%)
- dla przekroju skrzynkowego  $W_y = 15.33 \text{ cm}^3$  (128%)
- dla dwuteownika  $W_y = 18.67 \text{ cm}^3$  (156%)

Przyjmując maksymalne naprężenia dla przekroju prostokątnego za 100%, odpowiednie wartości naprężenia dla dwuteownika i przekroju skrzynkowego wynoszą odpowiednio 78% i 64%.

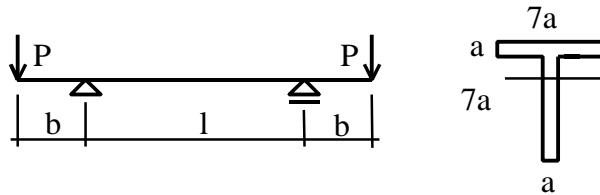
Wyniki pokazują, że przekrojem najlepiej nadającym się na zginanie jest taki przekrój, w którym materiał jest najbardziej oddalony od osi obojętnej, jak np. w profilach INP i HEB, rys. 2.



Rys. 2 Dwuteowniki

**Przykład 2**

Określić wartość parametru  $a$  przekroju poprzecznego belki na rys. 3., jeśli  $P = 140$  kN,  $l = 2$  m,  $b = 0.2$  m,  $R = 150$  MPa.



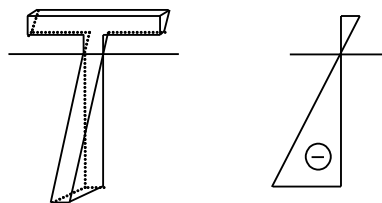
Rys.3 Belka i jej przekrój poprzeczny

**Rozwiązanie**

- maksymalny moment zginający wystąpi w przęśle i wynosi  $M_y = Pb = 28$  kNm
- położenie środka przekroju:  $y_0 = 5.5a$
- główny centralny moment bezwładności:  $J_y = 85.17a^4$
- wskaźnik przekroju:  $W_y = \frac{85.17a^4}{5.5a} = 15.48a^3$
- naprężenie normalne:  $\sigma_x = \frac{M_y}{W_y} = \frac{28 \cdot 10^3}{15.48a^3} \leq R = 150 \cdot 10^6$
- więc, parametr  $a$ :  $a^3 \geq \frac{28 \cdot 10^3}{15.48 \cdot 150 \cdot 10^6} = 1.206 \cdot 10^{-5}$ ,  $\rightarrow a \geq 0.0229$  m

Ostatecznie przyjmujemy  $a = 2.3$  cm,  $J_y = 2380$  cm<sup>4</sup>,  $W_y = 188$  cm<sup>3</sup> i  $\max|\sigma_x| = 149$  MPa.

Rozkład naprężenia normalnego może być obrazowany bryłą naprężenia albo wykresem naprężenia, rys 4.



Rys. 4 Bryła naprężeń i wykres naprężenia

**Przykład 3**

Prosty pręt o średnicy 6-mm i długości 30-m jest zwinięty wewnątrz bębna o średnicy wewnętrznej 1.25 m. Zakładając sprężyste zachowanie pręta, określić (a) maksymalne naprężenie w zwiniętym pręcie, (b) moment zginający niezbędny do wygięcia pręta. Przyjąć  $E = 200$  GPa.

**Rozwiązanie**

Obliczamy promień krzywizny:

$$\rho = \frac{1.25 - 0.006}{2} = 0.622 \text{ m}$$

Moment zginający obliczamy ze wzoru na krzywiznę:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EJ_y} \rightarrow M_y = \frac{EJ_y}{\rho} = \frac{200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0.006^4}{64 \cdot 0.622} = 20.46 \text{ Nm}$$

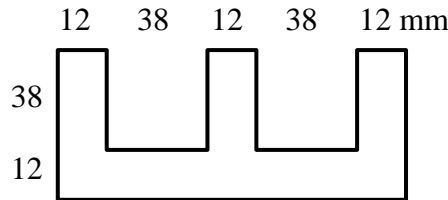
Maksymalne naprężenia wynoszą:

$$\max|\sigma_x| = \frac{M_y}{W_y} = \frac{20.46 \cdot 32}{\pi \cdot 0.006^3} = 964.8 \text{ MPa}$$

(znacznie więcej niż granica sprężystości dla stali).

#### Przykład 4

Określić nośność zginanego przekroju, rys. 5, ekstrudowanego (wyciskanego pod ciśnieniem) z materiału o dopuszczalnych naprężeniach 80 MPa na rozciąganie i 110 MPa na ściskanie. Dolne włókna są rozciągane.



Rys 5 Przekrój ekstrudowany

#### Rozwiązanie

Charakterystyki przekroju:

– pole:  $A = (3 \cdot 12 + 2 \cdot 38) \cdot 50 - 2 \cdot 38 \cdot 38 = 2712 \text{ mm}^2$

– położenie środka:  $z_c = \frac{112 \cdot 50 \cdot 25 - 2 \cdot 38 \cdot 38 \cdot 31}{2712} = 18.61 \text{ mm}$

– główny centralny moment bezwładności:

$$J_y = \frac{112 \cdot 50^3}{12} + 112 \cdot 50 \cdot (25 - 18.61)^2 - 2 \cdot \left[ \frac{38^4}{12} + 38^2 \cdot (31 - 18.61)^2 \right] = 604500 \text{ mm}^4$$

– rozkład naprężenia:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z, \quad \sigma_x(z = -18.61) = \frac{-M_y}{604500 \cdot 10^{-12}} (-0.01861) \leq 84 \cdot 10^6, \quad \sigma_x(z = 31.39) = \frac{|M_y|}{604500 \cdot 10^{-12}} (0.03139) \leq 110 \cdot 10^6$$

mamy więc, odpowiednio:

$$M_y \leq 2.73 \text{ kNm} \text{ i } M_y \leq 2.12 \text{ kNm},$$

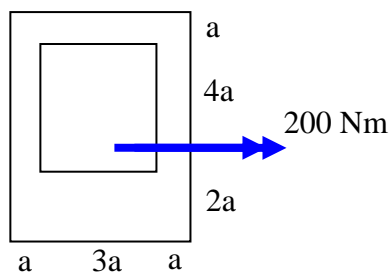
i, ostatecznie:

$$M_y \leq 2.12 \text{ kNm}$$

#### Zadania kontrolne

##### Zadanie 1

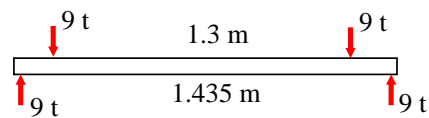
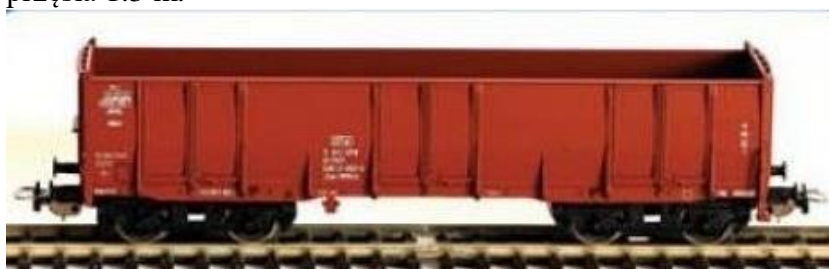
Określić parametr  $a$  przekroju z rys. 6, jeśli dopuszczalne naprężenia normalne wynoszą  $R = 240 \text{ MPa}$ .



Rys. 6 Zadany przekrój

### Zadanie 2

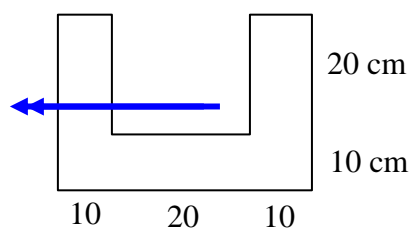
Określić maksymalne naprężenia normalne w osi wagonu-węglarki, rys. 7. Całkowita waga wagonu wynosi 72 tony, dla wagonu 4-osowego średnica osi wynosi 120 mm, rozstaw toru 1435 cm, długość przęsła 1.3 m.



Rys. 7 Węglarka i schemat osi

### Zadanie 3

Określić dopuszczalną wartość momentu zginającego, działającego w przekroju z rys. 8, wiedząc, że dopuszczalne naprężenie wynosi  $80 \text{ MPa}$  na rozciąganie i  $105 \text{ MPa}$  na ścisnienie. Narysować wykres rozkładu naprężenia.



Rys. 8 Zginany przekrój