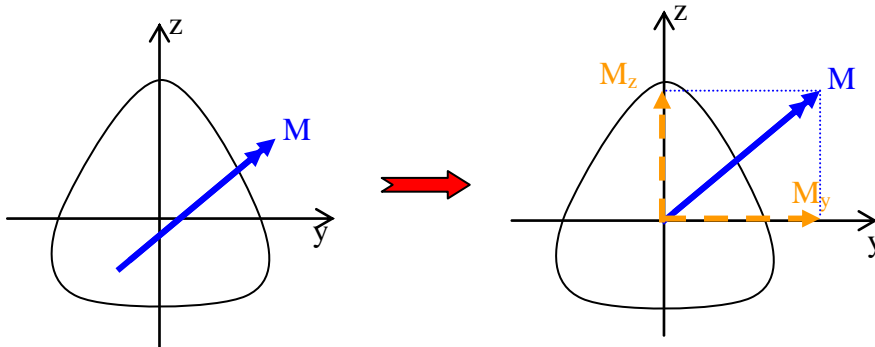


## Zginanie ukośne

### Wstęp

Na pierwszy rzut oka dwa przypadki wydają się być różne: (a) zginanie przekroju momentem, którego kierunek nie jest równoległy do żadnej z osi głównych centralnych przekroju, i (b) przekrój zginany dwoma momentami działającymi w kierunkach głównych centralnych osi przekroju, rys. 1.



Rys. 1 Moment zginający i jego dekompozycja

Zauważmy, że zawsze rozważamy kierunki działania momentów zginających względem osi głównych centralnych przekroju.

Uwaga: nie istnieje zginanie ukośne takich przekrojów jak koło, kwadrat czy jakikolwiek inny wielokąt foremny; nie ma zginania ukośnego jeśli każda z osi centralnych przekroju jest jednocześnie osią główną. Z zasady superpozycji, naprężenie normalne jest sumą naprężeń od dwóch składowych zginania:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y.$$

Rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym jest liniowy.

Oś obojętna jest linią prostą przechodzącą przez środek ciężkości przekroju:

$$\sigma_x = 0 \rightarrow z = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{J_y}{J_z} y.$$

Kierunek osi obojętnej nie pokrywa się z kierunkiem wypadkowego momentu zginającego: jej kierunek jest odchylony w kierunku osi o mniejszym głównym centralnym momencie bezwładności.

Maksymalne co do bezwzględnej wartości naprężenia normalne osiągnane są w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.

Dla stanu granicznego nośności mamy nierówność:

$$\max|\sigma_x| \leq R,$$

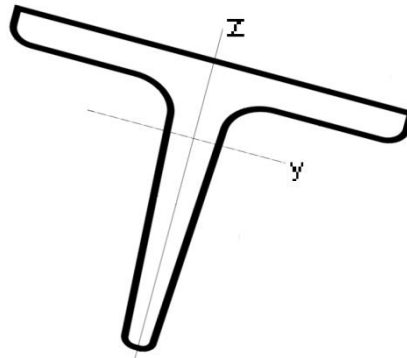
gdzie  $R$  jest wytrzymałością obliczeniową materiału.

Aby określić punkty przekroju o największych bezwzględnych wartościach naprężeń normalnych należy znać położenie osi obojętnej.

### Przykłady

#### Przykład 1

Teowa płatek, rys. 2, jest zginana momentem o kierunku poziomym. Wiedząc, że naprężenia dopuszczalne wynoszą 150 MPa, określ wartość momentu dopuszczalnego. Charakterystyki przekroju poprzecznego:  $s = h = 60$  mm,  $e = 18.6$  mm,  $J_y = 23.8$  cm<sup>4</sup>,  $J_z = 12.2$  cm<sup>4</sup>, kąt  $\alpha = 12.5^\circ$ .



Rys. 2 Teowa płatew

**Rozwiązanie**

rozkład wektora momentu na kierunki osi głównych centralnych:

$$M_y = M \cos \alpha, \quad M_z = M \sin \alpha,$$

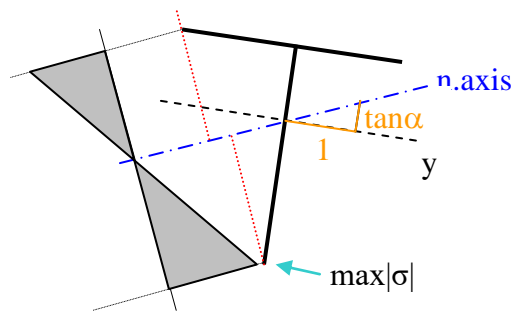
naprężenia normalne:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = M \left( \frac{\cos \alpha}{J_y} z - \frac{\sin \alpha}{J_z} y \right),$$

równanie osi obojętnej:

$$z = \tan \alpha \cdot \frac{23.8}{12.2} y = 0.4325y$$

z rozkładu naprężenia przedstawionego na rys. 3:



Rys. 3 Przekrój z osią obojętną

znajdujemy maksymalne naprężenia w narożu środnika, blisko osi symetrii, (0, -41.4) w [mm]:

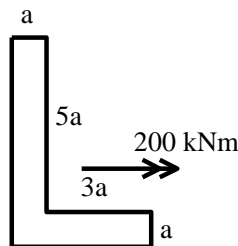
$$\sigma_x = M(0.041021 \cdot (-4.14)) \cdot 10^6 = 0.1698 \cdot 10^6 M$$

dla stanu granicznego nośności, mamy:

$$|\sigma_x| \leq r \rightarrow 0.1698 \cdot 10^6 M \leq 150 \cdot 10^6 \rightarrow M \leq 883 \text{ Nm}$$

**Przykład 2**

Określić parametr przekroju  $a$ , rys. 4, wiedząc, że dopuszczalne naprężenia wynoszą  $R = 300 \text{ MPa}$ .



Rys. 4 Przekrój wraz z obciążeniem

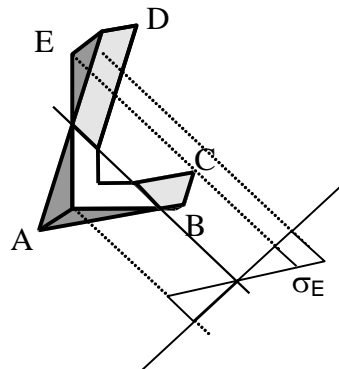
**Rozwiązanie**położenie środka ciężkości:  $y_c = 1.17 a$ ,  $z_c = 2.17 a$ momenty centralne:  $J_y = 30.75 a^4$ ,  $J_z = 10.75 a^4$ ,  $J_{yz} = -10 a^4$ wartości własne:  $J_1 = 34.89 a^4$ ,  $J_2 = 6.61 a^4$ , kierunki główne:  $\alpha = 22.49^\circ$ momenty zginające:  $M_1 = M \cos \alpha = 185 \text{ kNm}$ ,  $M_2 = M \sin \alpha = 76.5 \text{ kNm}$ rozkład naprężeń normalnych:  $\sigma_x = \frac{M_1}{J_1} x_2 - \frac{M_2}{J_2} x_1 = \frac{5.30x_2 + 11.57x_1}{a^4} 10^3$ równanie osi obojętnej:  $x_2 = -2.19x_1$ 

obliczamy współrzędne naroży w układzie głównych centralnych osi bezwładności ze wzorów transformacyjnych

pt	y	z	$x_1$	$x_2$	odl.od osi oboj.	$\sigma$ [MPa]
A	-1.17 a	-2.17 a	-1.91 a	-1.56 a	2.39 a	-243
B	2.83 a	-2.17 a	1.78 a	-3.09 a	0.34 a	35
C	2.83 a	-1.17 a	2.17 a	-2.16 a	1.07 a	109
D	-0.17 a	3.83 a	1.31 a	3.60 a	2.69 a $\rightarrow$ max.	274
E	-1.17 a	3.83 a	0.38 a	3.99 a	2.01 a	205

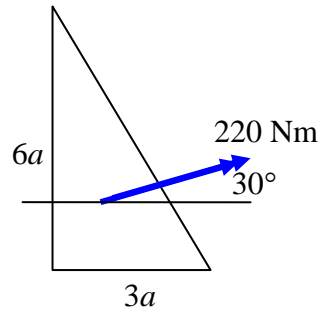
Tablica. 1 Obliczenia dla zadania 2.

Punktem najbardziej odległym od osi obojętnej jest p. D gdzie wartość naprężenia jest największa.

Wymiarowanie przekroju:  $\sigma_x(1.31 a, 3.60 a) \leq R \Rightarrow a \geq 0.0485 \text{ m} \approx 0.05 \text{ m}$ Naprężenia normalne dla przyjętej wartości parametru  $a$  stanowią ostatnią kolumnę w tabeli 1 a wykres rozkładu naprężeń normalnych przedstawia rys. 5.

Rys. 5 Rozkład naprężeń normalnych

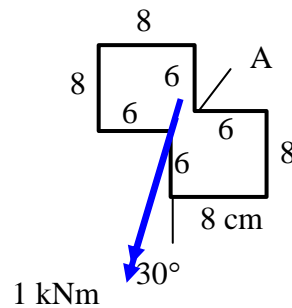
**Zadania kontrolne****Zadanie 1**Z tablicy profili dwuteowych dobrać odpowiedni profil wiedząc, że naprężenie dopuszczalne wynosi 150 MPa a moment gnący  $M = 12 \text{ kNm}$  jest obrocony o  $20^\circ$  względem osi głównej centralnej.**Zadanie 2**Określić parametr  $a$  przekroju z rys. 6. Naprężenie dopuszczalne wynosi 280 MPa. Narysować rozkład naprężeń normalnych.



Rys. 6 Przekrój wraz z obciążeniem

### Zadanie 3

Określić rozkład naprężeń normalnych w przekroju na rys. 7. Narysować rozkład naprężeń normalnych i określić wartość naprężenia w p. A.



Rys. 7 Przekrój wraz z obciążeniem

### Dodatek

#### Użyteczne wzory

Wzory transformacyjne dla współrzędnych punktów:

$$x_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$x_2 = y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

Odległość punktu  $P$  do prostej o równaniu  $y \cos \alpha + z \sin \alpha - p = 0$ :

$$d = |y_P \cos \alpha + z_P \sin \alpha - p|$$