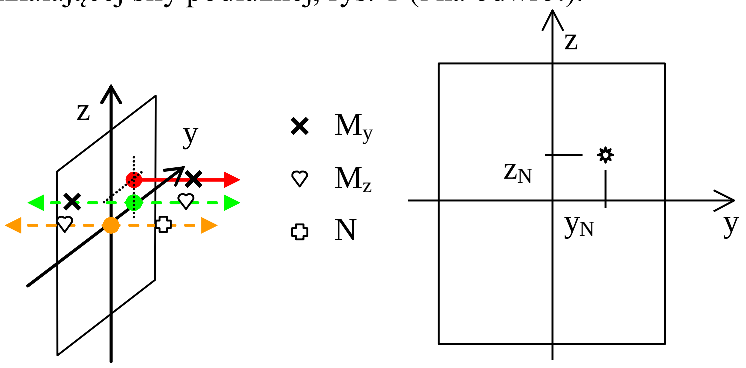
Mimośrodowe rozciąganie

Wprowadzenie

Rozpatrujemy ogólny przypadek jednoczesnego obciążenia siłą osiową i zginaniem ukośnym. Na mocy zasady de Saint-Venanta możemy zamienić pierwotne obciążenie obciążeniem statycznie równoważnym w postaci mimośrodowo działającej siły podłużnej, rys. 1 (i na odwrót).



Rys. 1 Obciążenie siłą podłużną niecentralną

Z zasady superpozycji, rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym otrzymujemy sumując proste przypadki składowe: działanie siły osiowej i momentów zginających względem osi głównych centralnych bezwładności przekroju poprzecznego:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \, .$$

Jak widać, rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym jest liniowy. Podobnie jak poprzednio, położenie osi obojętnej wskazuje nam punkty najbardziej od niej oddalone, w których naprężenia normalne będą największe co do bezwzględnej wartości.

Równanie osi obojętnej ma postać:

$$\sigma_x = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{J_y}{M_y}\left(\frac{M_z}{J_z} y - \frac{N}{A}\right).$$

Oś obojętna jest linią prostą, ale tym razem nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju.

W stanie nośności granicznej warunek wymiarowania zapisze się:

$$\max\left|\sigma_x\right| \le R \, ,$$

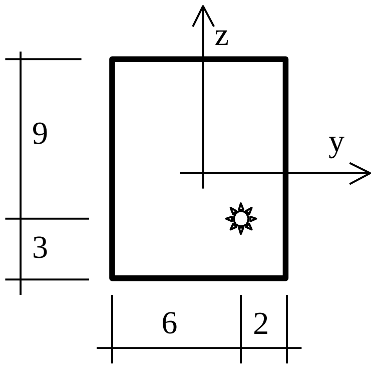
gdzie maksymalna wartość naprężenia jest osiągana w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.

Uwaga: Krępe elementy mimośrodowo ściskane mogą być obliczane analogicznie do rozciąganych z uwzględnieniem zmiany znaków naprężenia.

Przykłady

Przykład 1

Określić największe naprężenia normalne w przekroju obciążonym siłą rozciągającą *N* = 150 kN, Rys. 2 (wymiary w [cm]):



Rys. 2 Przekrój obciążony mimośrodowo

Rozwiązanie

1. Siły przekrojowe: N = 150 kN, M_y = -150×0.03 = -4.5 kNm, M_z = -150×0.02 = -3 kNm
2. Charakterystyki geometryczne przekroju: A = 96 cm^2, J_y = 1152 cm^4, J_z = 512 cm^4
3. Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = \frac{150 \cdot 10^3}{96 \cdot 10^{-4}} - \frac{4.5 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-8}} z + \frac{3 \cdot 10^3}{512 \cdot 10^{-8}} y = 15.7 - 391z + 586y \text{ MPa}$$

4. Równanie osi obojętnej:

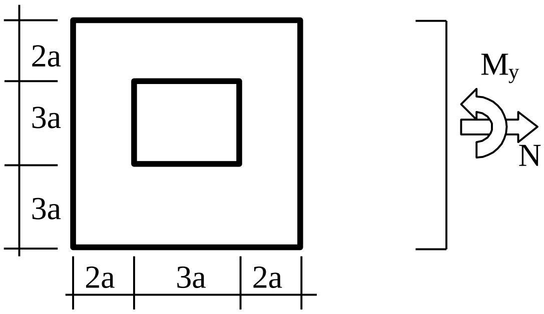
$$z = 1.5y + 0.04$$

5. Maksymalne naprężenia wystąpią w prawym dolnym narożu:

$$\max|\sigma_x| = 15.7 - 391 \cdot (-0.06) + 586 \cdot 0.04 = 62.6 \text{ MPa}$$

Przykład 2

Określić parametr przekroju *a*, rys. 3, wiedząc, że siła rozciągająca jest *N* = 150 kN a moment zginający M_y = 75 kNm. Przyjąć *R* = 250 MPa.



Rys. 3 Obciążony przekrój skrzynkowy

Rozwiązanie:

1. Charakterystyki przekroju poprzecznego: A = (56-9) a^2 = 47 a^2, z_c = 3.9 a, J_y = 289 a^4
2. Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z = \frac{150 \cdot 10^3}{47a^2} - \frac{75 \cdot 10^3}{289a^4} z$$

3. Równanie osi obojętnej: $z = 12.3a^2$
4. Z rozkładu nprężeń normalnych wnosimy, że największe naprężenia normalne wystąpi w dolnych włóknach (najodleglejszych od osi obojętnej). Warunek wymiarowania zapiszemy w postaci:

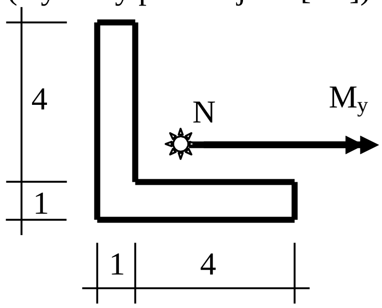
$$\max \sigma_x = \sigma_x(z = -3.9a) = \frac{3190}{a^2} + \frac{1012}{a^3} \leq R = 250 \cdot 10^6$$

Powyższa nierówność może być rozwiązana numerycznie, lub – skoro wystarcza nam przybliżone rozwiązanie – metodą prób i błędów. Jako pierwsze przybliżenie możemy użyć rozwiązań osobno rozciągania i zginania, otrzymując odpowiednio: $a = 0.0036$ m and $a = 0.016$ m.

5. Przyjmując $a = 0.0165$ m, otrzymujemy maksymalne naprężenie: 237 MPa < R.

Przykład 3

Określić maksymalne naprężenie normalne w przekroju obciążonym momentem gnącym $M_y = 65$ Nm i rozciąganym siłą osiową $N = 0.2$ kN, rys. 4 (wymiary przekroju w [cm]):



Rys. 4 Przekrój wraz z obciążeniem

Rozwiązanie

1. Charakterystyki przekroju poprzecznego: A = 9 cm^2, wskutek ukośnej osi symetrii od razu obliczamy główne centralne momenty bezwładności (dla różnicy dwóch kwadratów, opisanego i wyciętego):

   środek ciężkości: $z_c = 1.611$ cm,

   moment bezwładności względem osi symetrii = $\frac{5^4}{12} - \frac{4^4}{12} = 30.75$ cm^4 = J_y

   drugi moment bezwładności:

   $$\frac{5^4}{12} + 25\left(1.611\cdot\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}5\right)^2 - \frac{4^4}{12} - 16\left(1.611\cdot\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}4 - \sqrt{2}\right)^2 = 8.53 \text{ cm}^4 = J_z$$

2. Siły przekrojowe: N = 200 N, $M_1 = M_2 = 45.96$ Nm
3. Rozkład naprężeń normalnych:

   $$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y = \frac{200}{9\cdot 10^{-4}} + \frac{45.96}{30.75\cdot 10^{-8}} z + \frac{45.96}{8.53\cdot 10^{-8}} y$$

4. Równanie osi obojętnej:

   $$z = -0.0015 - 3.7y$$

5. Powyższe równanie wskazuje, że najbardziej oddalony od osi obojętnej jest p. A; jego współrzędne w układzie głównym centralnym są:

   $$\mathrm{A}\left(4\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 1.611\sqrt{2} = 2.38, \quad 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.83\right) \text{(w cm)}$$

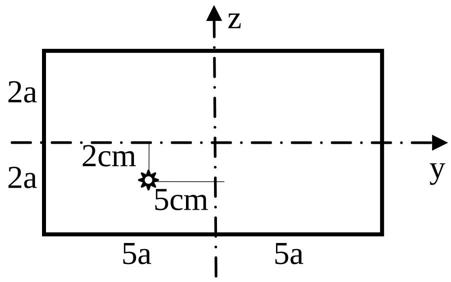
6. Maksymalne naprężenie normalne w punkcie A jest:

   $$\sigma_x = 17.2 \text{ MPa.}$$

Zadania kontrolne

Zadanie 1

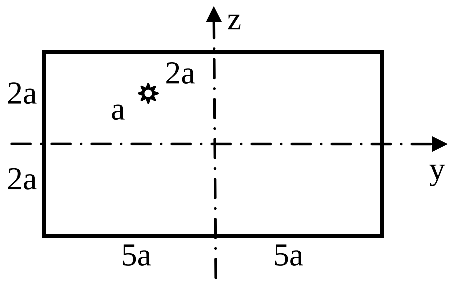
Określić parametr a przekroju, rys. 5, zakładając $P = 1$ MN oraz $R = 220$ MPa.



Rys. 5 Przekrój obciążony na stałych mimośrodach

Zadanie 2

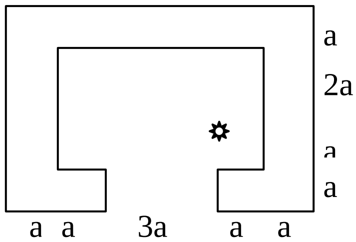
Określić parametr a przekroju, rys. 6, zakładając P = 1 MN oraz R = 220 MPa.



Rys. 6 Przekrój obciążony na zmiennych mimośrodach

Zadanie 3

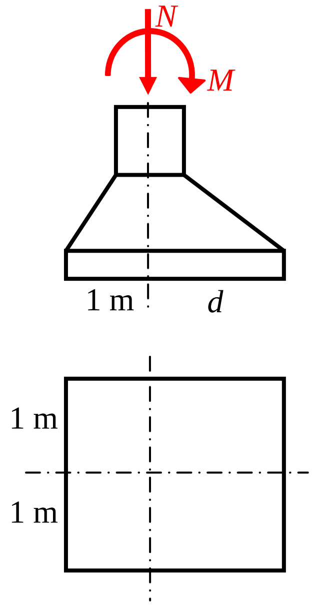
Określić rozkład naprężeń normalnych w przekroju z rys. 7, a = 2 cm, obciążonego siłą N = 1.5 kN. Siła jest przyłożona do sztywnej płyty, przyspawanej do przekroju końcowego pręta. Narysować wykres rozkładu naprężeń normalnych.



Rys. 7 Przekrój z punktem obciążenia

Zadanie 4

Stopa fundamentowa, rys. 8, jest obciążona momentem M = 1.2 MNm i siłą osiową N = 2.5 MN. Określić wymiar d tak, aby rozkład naprężeń normalnych pod stopą był stały (jednorodny).



Rys 8 Stopa fundamentowa