

Zginanie poprzeczne

Wstęp

Definicja

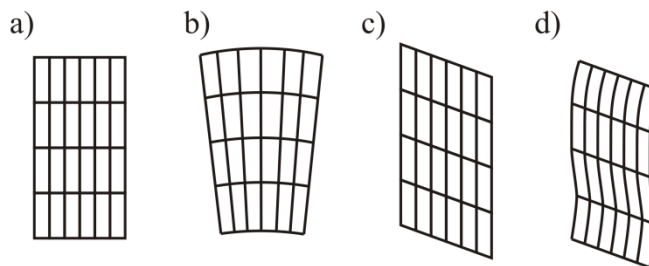
Zginanie poprzeczne to przypadek, kiedy przekrój pręta jest nie tylko zginany, ale także i ścinany siłą poprzeczną. Wiadomo ze statyki, że wówczas moment zginający nie jest funkcją stałą – jego pochodna jest równa sile poprzecznej. Zginanie poprzeczne, jako wynik obciążenia belki prostopadle do jej osi, jest najczęstszym przypadkiem zastosowania belki.

Jest oczywiste, że moment zginający wywołuje naprężenia normalne, podczas gdy od siły tnącej powstają naprężenia styczne w przekroju poprzecznym.

Hipoteza Bernoulliego

Zakładamy, że przekrój poprzeczny, płaski przed obciążeniem, pozostaje płaski po obciążeniu, podobnie jak to było w przypadku prostego zginania. Jest to jednak rozwiązanie przybliżone w odniesieniu do rzeczywistych belek, co można łatwo wykazać prostym rozważaniem.

Założenie płaskiego przekroju oznacza, że linie proste prostopadłe do osi zginania (np. na poboczniczy belki) pozostają proste. Oznacza to, że odkształcenia styczne powinny być stałe po wysokości pręta. Ze wzorów Hooke'a (fizycznej liniowości) naprężenia ścinające również powinny być stałe. Przeczy to jednak statycznym warunkom brzegowym, z których wynika zerowanie się naprężeń stycznych na nieobciążonym brzegu, rys. 1.



Rys. 1. Spaczenie przekroju w wyniku siły poprzecznej

Rys. 1.a) przedstawia element belki ograniczony dwoma przekrojami poprzecznymi przed obciążeniem b) po obciążeniu (kąty proste pozostają proste, nie ma ścinania). Deformacja jak na rys. c) nie jest możliwa, ponieważ powodowałaby niezerowe naprężenia styczne w skrajnych włóknach. Przypadek d) przedstawia spaczenie przekroju z naprężeniami stycznymi maksymalnymi w osi obojętnej, a zerującymi się we włóknach skrajnych.

Obserwacja rzeczywistych belek również wskazuje na paczenie się przekroju poprzecznego. Rozwiązanie teorii sprężystości pokazuje jednak, że jeśli siła poprzeczna jest stała, rozkład naprężeń normalnych wywołanych momentem zginającym jest takie samo jak dla zginania prostego, to jest takie samo jak dla założenia płaskich przekrojów. Dla przypadków zmiennej siły poprzecznej i typowych kształtów przekroju poprzecznego, błąd założenia płaskich przekrojów jest zwykle do przyjęcia¹.

Naprężenia normalne

Na podstawie hipotezy Bernoulliego wzór na naprężenia normalne jest podobny do wzoru dla zginania prostego (walcowego):

¹ por. np. V.D. da Silva, *Mechanics and Strength of Materials*, Springer 2006, str.259

$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{J_y} z,$$

ale tym razem zarówno moment zginający jak i naprężenia normalne są funkcjami współrzędnej związanej z osią pręta.

Naprężenia styczne

Jak już wspomniano, obliczenia naprężeń tnących wymagają zwykle przyjęcia uproszczeń, których błąd zależy od kształtu przekroju. Z warunku równowagi elementu belki otrzymujemy wzór na uśrednione naprężenia styczne w płaszczyźnie przekroju poprzecznego:

$$\tau_{xz} = \frac{Q(x)S_y^I(z)}{J_y b(z)},$$

gdzie:

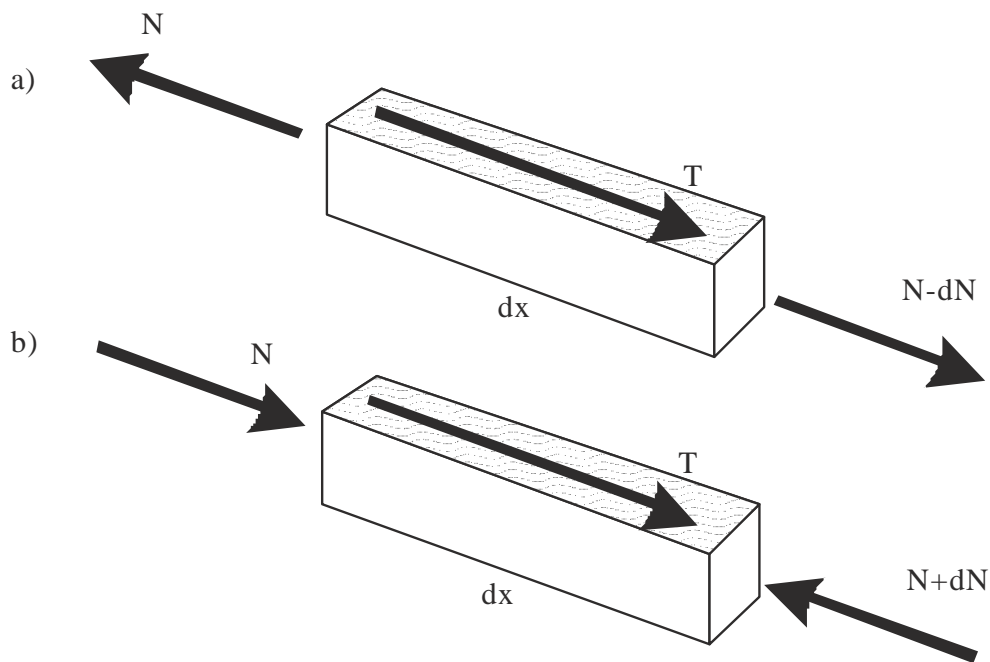
$Q(x)$ jest siłą poprzeczną,

$S_y^I(z)$ jest momentem statycznym odciętej części przekroju (górnej lub dolnej, obojętne której),

J_y jest momentem bezwładności całego przekroju,

$b(z)$ jest długością linii cięcia (wzdłuż której uśredniamy naprężenia styczne).

Zwrot i znak naprężenia stycznego zależą od zwrotu siły poprzecznej i przyjętego układu osi współrzędnych, ale nie są tak oczywiste jak mogłoby się to wydawać. Rozważmy element wycięty z belki, powyżej osi obojętnej, z dodatnią siłą poprzeczną, rys. 2.



Rys. 2 Naprężenia tnące zginanego elementu; rozciąganie: a) dołem, b) góra

Dodatnia siła poprzeczna oznacza rosnący moment gnący dla dolnych włókien rozciąganych lub malejący moment gnący dla górnych włókien rozciąganych. W obu przypadkach, równowaga elementu jest uzyskiwana przy takim samym zwrocie sił ścinających T . Te siły ścinające powodują z kolei naprężenia ścinające, τ_{zx} , o takim samym zwrocie i kierunku. Korzystając z symetrii tensora naprężenia i wiedząc, że naprężenia tnące działają w narożu „parami”, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, możemy określić zwrot i znak naprężeń ścinających w przekroju

poprzecznym. Należy pamiętać, że znak naprężenia stycznego nie jest wielkością obiektywną i zależy od przyjętego układu osi współrzędnych.

Zwykle maksimum naprężeń stycznych jest osiągane w osi obojętnej naprężeń normalnych.

Wymiarowanie przekroju

W większości przypadków, kryterium wymiarującym w stanie granicznym nośności jest naprężenie normalne, dlatego zwykle rozpoczynamy wymiarowanie od spełnienia tego warunku:

$$\max|\sigma_x| = \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Następnie sprawdzamy warunek dla naprężeń stycznych:

$$\max|\tau_{xz}| \leq R_t$$

gdzie R_t jest wytrzymałością na ścinanie (stałą materiałową).

Przykłady

Przykład 1

Określić rozkład naprężeń stycznych w przekrojach: a) prostokątnym, b) trójkątnym (trójkąt równoramienny $b \times h$) i c) kołowym.

Rozwiązanie

a) przekrój prostokątny

Obliczamy:

$$\tau_{xz} = \frac{Q \left(\frac{h}{2} \frac{h}{4} - \frac{z^2}{2} \right) b}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{3Q \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]}{2bh}.$$

Maksimum osiągane jest w osi obojętnej (naprężeń normalnych):

$$\max(\tau_{xz}) = \tau_{xz}(z=0) = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}.$$

Rozkład naprężeń jest paraboliczny z wartością maksymalną o 50 % większą niż średnia dla całego przekroju.

b) przekrój trójkątny

szerokość i wysokość jako funkcje zmiennej z :

$$b(z) = \frac{2}{3} b - \frac{b}{h} z, \quad h(z) = \frac{2}{3} h - z$$

człon zależny od geometrii przekroju:

$$\frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{1}{2} h(z) \left(z + \frac{h(z)}{3} \right)$$

poszukujemy linii cięcia dla której naprężenia styczne będą maksymalne:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{2}{9} h + \frac{2}{3} z \right) \right] = 0 \rightarrow z = \frac{h}{6}$$

skąd:

$$\max|\tau_{xz}| = \frac{Q}{J_y} \frac{h^2}{12} = \frac{36Q}{bh^3} \frac{h^2}{12} = 3 \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}$$

Maksymalna wartość osiągana jest w połowie wysokości przekroju.

c) przekrój kołowy

moment statyczny odcinka kołowego:

$$S_y^I(z) = \frac{2r^2}{3} \cos^3 \alpha$$

szerokość cięcia:

$$b(z) = 2r \cos \alpha$$

więc:

$$|\tau_{xz}| = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \alpha}{\frac{\pi r^4}{4} \cdot 2r \cos \alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{r_2} \cos^2 \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

i, ostatecznie po standardowych obliczeniach, maksymalna wartość jest osiągnięta dla $z = 0$:

$$\max|\tau_{xz}| = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}$$

Przykład 2

Określić stosunek wartości maksymalnych naprężeń normalnych do maksymalnych naprężeń stycznych we wsporniku o prostokątnym przekroju poprzecznym ($b \times h$), obciążonym siłą skupioną na jego wolnym końcu ($x = l$).

Rozwiązanie

maksymalna wartość momentu gnącego: $M_{\max} = Pl$, siła poprzeczna: $Q = P$ (stała)

maksymalna wartość naprężeń normalnych (w utwierdzeniu) wynosi: $\max|\sigma_x| = \frac{6Pl}{bh^2}$

maksymalna wartość naprężeń stycznych: $\max|\tau_{xz}| = 1.5 \frac{P}{bh}$

stosunek naprężeń: $\frac{\max|\sigma_x|}{\max|\tau_{xz}|} = \frac{6Pl}{bh^2} \cdot \frac{bh}{1.5P} = 4 \frac{l}{h}$.

Jak widać, zwykle naprężenie normalne jest znacznie większe od stycznego.

Przykład 3

Spawany profil IPES 600, huty „Pokój” ma wymiary: wysokość całkowita 600 mm, szerokość pólki: 220 mm, wysokość pólki: 23 mm, grubość środnika: 8 mm. Określić, jaką część siły poprzecznej przenosi środnik.

Rozwiązanie

moment statyczny dla cięcia w środniku:

$$S_y(z) = 1460 + 307 - 0.4z^2 = 1767 - 0.4z^2 \text{ cm}^3$$

$$S_y(z=0) = 1767 \text{ cm}^3$$

$$S_y(z=277) = 1460 \text{ cm}^3$$

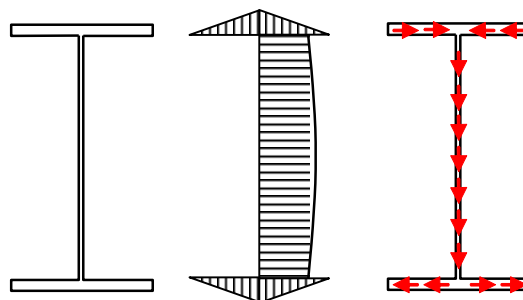
co oznacza, że wykres naprężeń stycznych jest „płaski”

moment statyczny dla cięcia w półce:

$$S_y(y) = 2.3 \cdot (11 - y) \cdot 28.85 = 66.36 \cdot (11 - y) \text{ cm}^3$$

$$S_y(y=0) = 730 \text{ cm}^3$$

Na rys. 3 pokazany jest wykres naprężeń stycznych i ich „rozpływ” w przekroju.



Rys. 3 Naprężenia styczne w IPES 600

Obliczamy siłę tnącą przenoszoną przez środek:

$$Q = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{QS_y(z)}{J_y b} dz = \frac{92200}{95600} Q = 0.965Q,$$

a więc środek przenosi 96.5% całkowitej siły poprzecznej.

Przykład 4.

Belka o rozpiętości $l = 4\text{ m}$ i prostokątnym przekroju poprzecznym $a \times 2a$ jest obciążona obciążeniem ciągłym $q = 90\text{ kN/m}$. Określić wartość parametru a przekroju poprzecznego, jeśli dopuszczalne naprężenie normalne i styczną wynoszą odpowiednio $R = 300\text{ MPa}$ i $R_t = 100\text{ MPa}$. Narysować trajektorie naprężeń głównych.

Rozwiązanie

maksymalny moment gnący:

$$\max M_y = \frac{ql^2}{8} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 4^2}{8} = 180\text{ kNm}$$

wskaźnik przekroju:

$$W_y = \frac{a \cdot (2a)^2}{6} = \frac{2}{3} a^3$$

wymiarowanie:

$$\max|\sigma_x| = \frac{\max M_y}{W_y} \leq R \rightarrow \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 3}{2a^3} \leq 300 \cdot 10^6 \rightarrow a \geq 0.0965 \cong 0.1\text{ m}$$

sprawdzenie naprężeń stycznych
maksymalna wartość siły tnącej:

$$\max|Q| = 180\text{ kN}$$

naprężenie tnące:

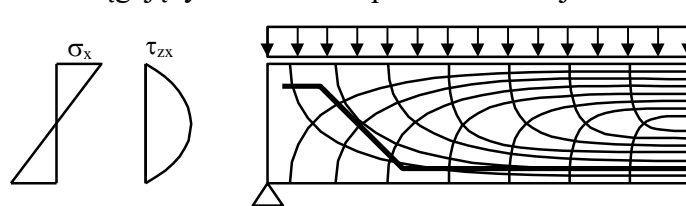
$$\max|\tau_{xz}| = \frac{3}{2} \cdot \frac{180 \cdot 10^3}{0.1 \cdot 0.2} = 13.5\text{ MPa} < R_t$$

Naprężenia główne:

- w skrajnych włóknach występuje jedynie naprężenie normalne, więc kierunki główne są poziome i pionowe,
- w osi obojętnej występuje jedynie naprężenie styczne, więc kierunki główne są pod kątem 45 stopni:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1}.$$

Trajektorie naprężeń głównych przedstawia rysunek 4. Są to dwie rodziny linii wzajemnie prostopadłych. Rysunek trajektorii naprężeń rozciągających uzasadnia położenie zbrojenia w belce żelbetowej.

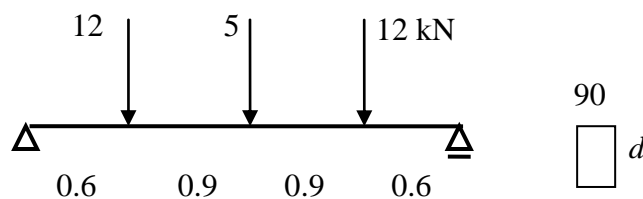


Rys. 4 Trajektorie naprężeń głównych w belce zginanej

Zadania kontrolne

Problem 1

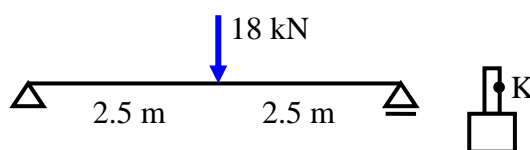
Drewniana belka o rozpiętości 3 m i szerokości 90 mm przenosi trzy siły skupione, rys. 5. Wiedząc, że dla użytego rodzaju drewna $\sigma_{dop} = 12\text{ MPa}$ and $\tau_{dop} = 0.8\text{ MPa}$, określić niezbędną wysokość przekroju belki, d .



Rys. 5 Belka wraz z obciążeniem

Problem 2

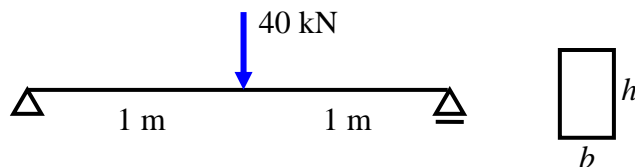
Dla zginanej poprzecznie belki o przekroju jak na rys. 6, określić naprężenia normalne, styczne i główne w p. K . Założyć, że wszystkie wymiary przekroju są dane.



Rys. 6 Belka wraz z przekrojem

Problem 3

Drewniana belka przenosi siłę skupioną w środku przęsła, rys. 7. Określić wysokość h i szerokość b belki, wiedząc że $P = 40$ kN, $R_t = 1.5$ MPa, $R = 12$ MPa.



Rys. 7 Belka z obciążeniem

Uzupełnienie

Siła rozwarstwiająca

Podłużna siła tnąca (T na rys. 2) przypadająca na jednostkę długości nazywana jest siłą rozwarstwiającą. Znaczenie tej siły staje się jasne, gdy porównamy dwie belki o takich samych wymiarach, rys. 8, przy czym jedna z nich wykonana jest z dwóch elementów (desek).



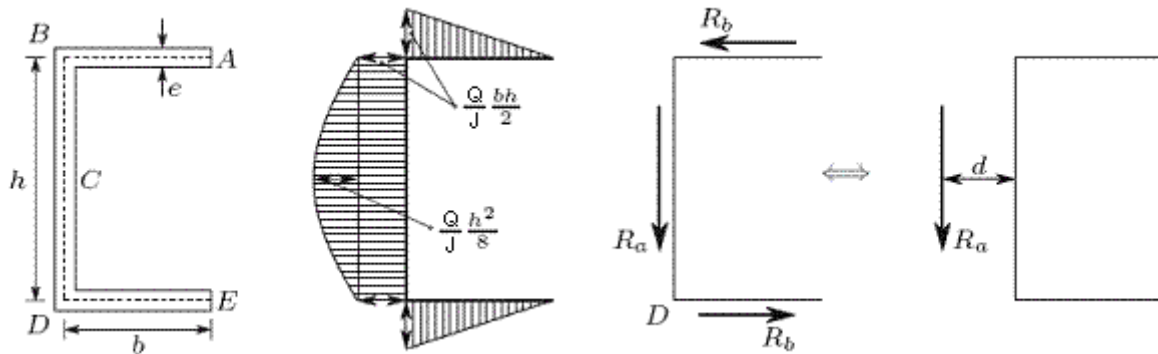
Rys. 8 Belka jednolita i belka rozcięta

W belce rozciętej naprężenia normalne są większe dwukrotnie a krzywizna – czterokrotnie.

Środek ścinania²⁾

Warunek równowagi wymaga, aby położenie osi działania siły poprzecznej pokrywało się z linią działania wypadkowej pochodzącej od naprężeń stycznych. Z tego powodu, położenie osi działania siły poprzecznej nie jest dowolne. W przeciwnym przypadku, oprócz siły tnącej w przekroju poprzecznym pojawia się także moment skręcający.

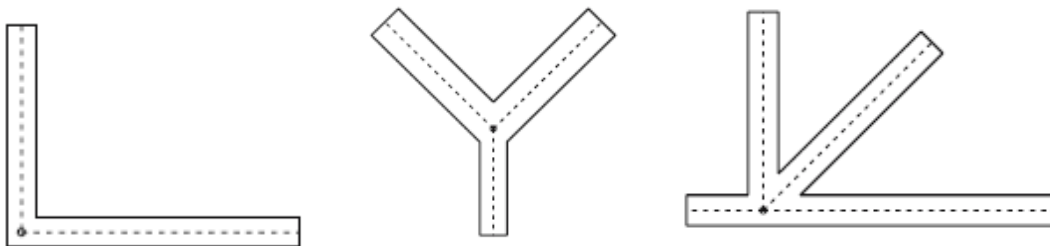
Obliczmy naprężenia tnące w profilu ceowym, rys. 9. Wypadkowe naprężeń tnących w środku (R_a) i w półkach (R_b) redukują się nie tylko do siły tnącej ale także i do momentu skręcającego. Aby moment skręcający zniknął, siła poprzeczna powinna być przyłożona w pewnej odległości d od środka.



Rys. 9 Ceownik

Środek ścinania jest takim punktem, że przechodząca przez niego linia działania siły tnącej, nie powoduje powstania momentu skręcającego.

Profile cienkościennie o prostych ściankach przecinających się w jednym punkcie, rys. 10, są szczególnym przypadkiem o środku ścinania w punkcie przecięcia osi ścianek. Ponieważ wypadkowe naprężeń tnących w ściankach przechodzą przez punkt przecięcia ich kierunków, moment od naprężeń tnących względem tego punktu zeruje się.



Rys. 10 Szczególny przypadek środka ścinania.

²⁾ por. da Silva, op.cit.