Ugięcia belek

Wstęp

Ugięciem nazywamy zlinearyzowane przemieszczenie; w przypadku belki jest to przemieszczenie pionowe osi belki. W technicznej teorii zginana zakłada się:
– hipotezę Bernoulliego (o płaskich przekrojach),
– małe pochodne przemieszczeń.
Krzywizna pręta jest proporcjonalna do momentu zginającego i odwrotnie proporcjonalna do sztywności zginania:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \kappa(x) = \frac{|M(x)|}{EJ_y}.$$

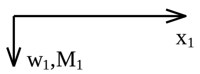
Wzór na krzywiznę ma postać:

$$\kappa(x) = \frac{|w''(x)|}{\left[1+(w')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cong |w''(x)|,$$

skąd otrzymujemy równanie różniczkowe linii ugięcia belki w postaci równania o zmiennych rozdzielonych:

$$\boxed{EJ_y w''(x) = -M(x)}$$

Znak w powyższym wzorze wynika z przyjętego układu odniesienia: osi belki i momentu zginającego, rys 1.



Rys. 1. Układ współrzędnych

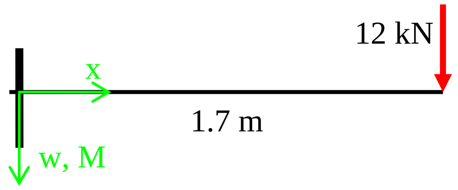
Równanie ugięcia może być rozwiązane na kilka sposobów. Ograniczymy się do trzech najpowszechniej używanych.

Metoda analityczna

Jest to metoda dwukrotnego całkowania równania różniczkowego linii ugięcia. W wyniku całkowania otrzymujemy dwie stałe całkowania, które należy wyznaczyć z kinematycznych warunków brzegowych. Jeśli moment zginający jest zadany przedziałami, w każdym z przedziałów należy przeprowadzić całkowanie osobno. W ten sposób otrzymujemy do wyznaczenia dwie stałe całkowania dla każdego z przedziałów. Dodatkowe warunki do wyznaczenia tych stałych są to tzw. warunki zgodności. Mówią one, że ugięcie z obu stron punktu charakterystycznego są takie same, podobnie jak i kąty ugięcia. Podczas gdy pierwszy z warunków jest oczywisty, drugi wynika ze wzoru na krzywiznę: załamanie osi belki oznacza krzywiznę nieskończenie wielką, co może mieć miejsce przy zerowej sztywności zginania albo nieskończenie wielkim momencie zginającym. Oba przypadki są czysto teoretyczne.
Metodę obliczeń objaśniają przykłady.

Przykład 1

Określić ugięcie wspornika obciążonego siłą skupioną na wolnym końcu, rys. 2.



Rys. 2 Obciążony wspornik

Rozwiązanie
równanie momentu:

$$M(X) = -20.4 + 12x$$

równanie krzywizny:

$$EJw''(x) = 20.4 - 12x$$

po scałkowaniu jeden raz:

$$EJw'(x) = 20.4x - 6x^2 + C$$

i drugi raz:

$$EJw(x) = 10.2x^2 - 2x^3 + Cx + D$$

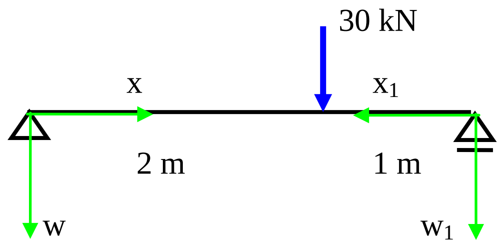
kinematyczne warunki brzegowe mają postać:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0$$

skąd mamy $C = D = 0$
i w rezultacie:

$$w(x) = \frac{19.65}{EJ}$$

Przykład 2
Belka na dwóch podporach obciążona siłą skupioną, rys. 3. Określić maksymalne ugięcie belki.



Rys. 3 Belka z obciążeniem

Rozwiązanie
Wprowadzamy układ współrzędnych z obu stron (por. rys. 3):

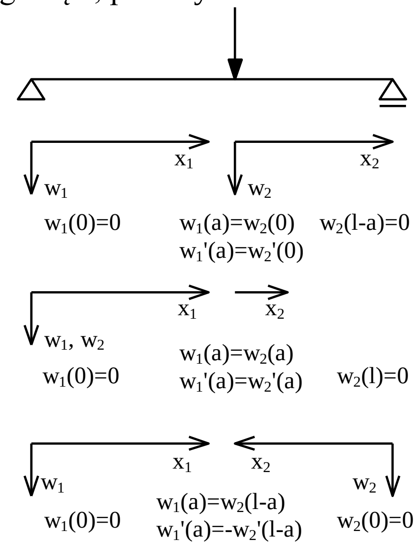
$M(x) = 10x$	$M(x_1) = 20x_1$
$EJw'' = -10x$	$EJw_1'' = -20x_1$
$EJw' = -5x^2 + C$	$EJw_1' = -10x_1^2 + C_1$
$EJw = -\frac{5}{3}x^3 + Cx + D$	$EJw_1 = -\frac{10}{3}x_1^3 + C_1x_1 + D_1$
$w(0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$	$w_1(0) = 0 \quad \rightarrow \quad D_1 = 0$

warunki zgodności mają postać:

$$w(2) = w_1(1)$$

$$w'(2) = -w_1'(1)$$

Uwaga: Znak minus w drugim warunku wynika z różnej skrętności układów odniesienia (odmienna definicja dodatnie pochodnej czy dodatniego kąta, patrz rys. 4.



Rys. 4. Różne układy współrzędnych

wykonując obliczenia, mamy: $C = 13.33$, i ostatecznie:

$$w(x) = \frac{-\frac{5}{3}x^3 + 13.33x}{EJ}.$$

Obliczamy ekstremum ugięć:

$$w'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{15}{3}x^2 + 13.33 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1{,}63 \quad \rightarrow \quad w_{max} = \frac{14.52}{EJ}$$

Przykład 3

Określić ugięcie belki obciążonej siła w środku przęsła.

Rozwiązanie

1szy przedział: $0 < x_1 < l/2$: $M(x_1) = \frac{P}{2}x_1 \quad \Rightarrow \quad EJ_y w_1(x_1) = -\frac{P}{12}x_1^3 + C_1 x_1 + D_1$,

2gi przedział: $0 < x_2 < l/2$: $M(x_2) = \frac{P}{2}x_2 \quad \Rightarrow \quad EJ_y w_2(x_2) = -\frac{P}{12}x_2^3 + C_2 x_2 + D_2$,

warunki brzegowe i zgodności: $w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_1(\frac{l}{2}) = w_2(\frac{l}{2}), \quad w_1'(\frac{l}{2}) = -w_2'(\frac{l}{2})$,

skąd: $D_1 = D_2 = 0, \quad C_1 = C_2, -\frac{P}{16}l^2 + C_1 = \frac{P}{16}l^2 - C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{P}{16}l^2$.

Końcowa postać równania linii ugięcia:

$$EJ_y w(x) = -\frac{P}{12}x^3 + \frac{P}{16}l^2 x.$$

Maksymalne ugięcie (tzw. strzałka ugięcia) osiągane jest w środku przęsła:

$$f = w(\tfrac{l}{2}) = \frac{Pl^3}{48EJ_y}.$$

Metoda Clebscha

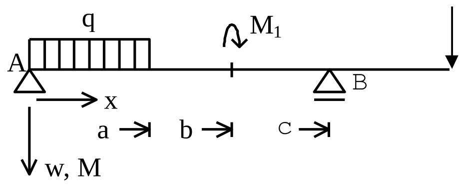
Jeśli belka posiada wiele przedziałów charakterystycznych, metoda analityczna jest uciążliwa. Sformułowanie rozwiązania może być znacznie uproszczone, jeśli warunki zgodności będą automatycznie spełnione. Można to uzyskać zapisując równanie w szczególny sposób:

1. Przyjmujemy jeden wspólny układ współrzędnych dla całej belki: x, $w(x)$, $M(x)$.
2. Równanie w i-tym przedziale zapisujemy tak, aby zawierało równanie z poprzedniego przedziału. W ten sposób warunki ciągłości będą automatycznie spełnione.

3. Zamiast zapisywać każde z równań osobno, zapisujemy je jednym równaniem, zaznaczając zmienny zakres obowiązywania równania ("szlabanami"). Stałe całkowania są wspólne dla wszystkich równań.
4. Wyrażenia w nawiasach są zawsze dodatnie albo zero.
5. Aby spełnić wymóg punktu (2), metoda może być zastosowana do przedziałów o tej samej sztywności zginania. Ponadto, obciążenia ciągłe i momenty skupione zapisujemy w sposób szczególny.

Przykład 4

Określić ugięcie belki z rys. 5.



Rys. 5 Obciążona belka

Rozwiązanie

Równanie momentu zginającego:

$$M(x) = R_A x - \tfrac{1}{2} q x^2 + \tfrac{1}{2} q \langle x-a \rangle^2 + M_1 \langle x-b \rangle^0 + R_B \langle x-c \rangle$$

$$EJ_y w''(x) = -R_A x + \tfrac{1}{2} q x^2 - \tfrac{1}{2} q \langle x-a \rangle^2 - M_1 \langle x-b \rangle^0 - R_B \langle x-c \rangle$$

$$EJ_y w'(x) = C - \tfrac{1}{2} R_A x^2 + \tfrac{1}{6} q x^3 - \tfrac{1}{6} q \langle x-a \rangle^3 - M_1 \langle x-b \rangle - \tfrac{1}{2} R_B \langle x-c \rangle^2$$

$$EJ_y w(x) = Cx + D - \tfrac{1}{6} R_A x^3 + \tfrac{1}{24} q x^4 - \tfrac{1}{24} q \langle x-a \rangle^4 - \tfrac{1}{2} M_1 \langle x-b \rangle^2 - \tfrac{1}{6} R_B \langle x-c \rangle^3$$

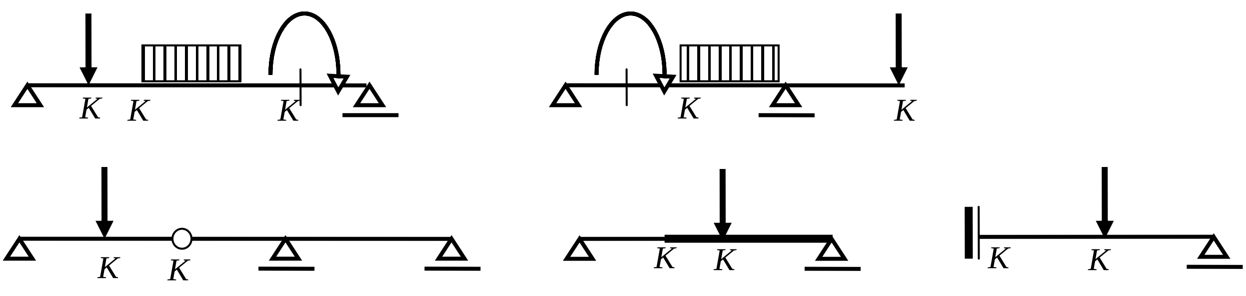
Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych: $w(0) = w(c) = 0$, więc

$$D = 0, \quad Cc - \tfrac{1}{6} R_A c^3 + \tfrac{1}{24} q c^4 - \tfrac{1}{24} q (c-a)^4 - \tfrac{1}{2} M_1 (c-b)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \ldots$$

Zauważmy, że stałe całkowania są wspólne dla wszystkich przedziałów.

Zadania kontrolne

Określić ugięcie w punkcie *K* belki z rys. 6 i naszkicować linię ugięcia belki.



Rys. 6 Zadania kontrolne