Ugięcia belek – c.d.

Metoda Mohra (momentów wtórnych)

Metoda zasadza się na analogii pomiędzy równaniami różniczkowymi:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ_y}.$$

Przyrównując prawe strony równań, mamy: $w''(x) = M''(x)$. Nie oznacza to jeszcze, że rozwiązania tych równań są identyczne. Pełna analogia dla zagadnień brzegowych obejmuje także warunki brzegowe.
W szczególności, kinematyczne warunki brzegowe równania ugięć powinny odpowiadać statycznym warunkom brzegowym równania sił przekrojowych. Powodem takiej zamiany równań jest to, że rozwiązanie równania statyki można uzyskać bez całkowania tego równania a jedynie z twierdzenia równoważności układów sił zewnętrznych i wewnętrznych. Zamiast rozwiązywać równanie ugięć, obliczamy momenty wtórne, pochodzące od obciążenia wykresem momentów podzielonym przez sztywność zginania.
Konstruujemy tzw. belkę fikcyjną, której statyczne warunki brzegowe odpowiadają kinematycznym warunkom brzegowym belki rzeczywistej, obciążoną obciążeniem fikcyjnym:

$$q^f(x) = \frac{M(x)}{EJ_y}.$$

Momenty gnące I siły poprzeczne belki fikcyjnej są liczbowo równe ugięciom i kątom ugięcia belki rzeczywistej:

$$M^f(x) \equiv w(x), \quad Q^f(x) \equiv w'(x).$$

Procedura jest następująca:
1. konstruujemy wykres momentów zginających (belki rzeczywistej),
2. konstruujemy belkę fikcyjną,
3. obciążamy belkę fikcyjną momentem gnącym podzielonym przez sztywność zginania belki rzeczywistej,
4. określamy wtórne siły przekrojowe w belce fikcyjnej (momenty i siły poprzeczne).

Dobór belki fikcyjnej wynika z porównania warunków brzegowych:
– podpora na końcu belki

$w = 0, \quad w' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M^f = 0, \quad Q^f \neq 0$ (podpora)

– podpora w środku belki

$w = 0, \quad w'_L = w'_P \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M^f = 0, \quad Q^f{}_L = Q^f{}_P \neq 0$ (przegub)

– przegub

$w_L = w_P \neq 0, \quad w'_L \neq w'_P \quad \Rightarrow \quad M^f{}_L = M^f{}_P \neq 0, \quad Q^f{}_L \neq Q^f{}_P$ (podpora)

– utwierdzenie

$w = w' = 0 \quad \Rightarrow \quad M^f = Q^f = 0$ (wolny koniec)

– utwierdzenie pionowo przesuwne

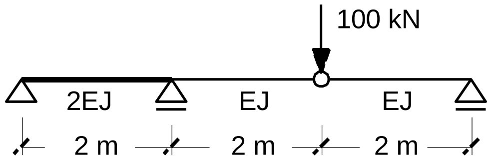
$w \neq 0, \quad w' = 0 \quad \Rightarrow \quad M^f \neq 0, \quad Q^f = 0$ (utwierdzenie pionowo przesuwne)

– wolny koniec

$w \neq 0, \quad w' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M^f \neq Q^f \neq 0$ (utwierdzenie)

Przykład 1

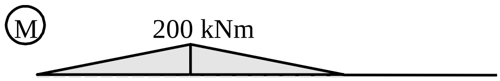
Określić ugięcia belki i kąty ugięcia z obu stron przegubu belki z rys. 1, $EJ = 200 \bullet 10^5$ Nm^2:



Rys. 1 Belka z obciążeniem

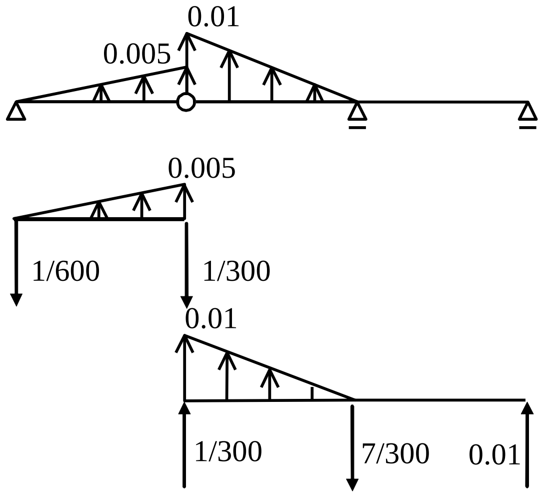
Rozwiązanie

Wykres momentów:



Rys. 2 Wykres momentów

Belka fikcyjne i dekompozycja na belki proste:



Rys 3 Belka fikcyjna

Moment wtórny na podporze (ugięcie przegubu):

$M^f = (2/3 + 2\ 2/3)\ 10^{-2} = 0.02$ m = 2 cm,

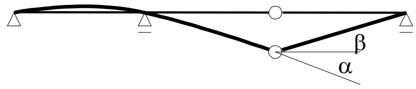
wtórna siła poprzeczna z lewej (kąt obrotu):

$Q^f_L = 4/3\ 10^{-2} = 0.0133 \ \Rightarrow\ \alpha = 0.76°$

wtórna siła poprzeczna z prawej (kąt obrotu):

$Q^f_P = (4/3 - 7/3)\ 10^{-2} = -0.01 \ \Rightarrow\ \beta = -0.57°$

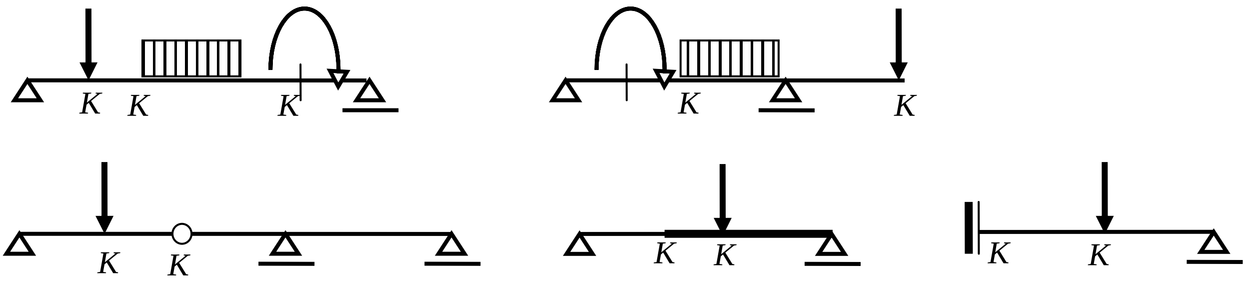
Rys. 4 przedstawia szkic ugięć.



Rys. 4 Szkic ugięć

Zadania kontrolne

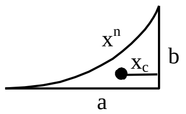
Określić ugięcie w punkcie *K* belki z rys. 5.



Rys. 5 Zadania kontrolne

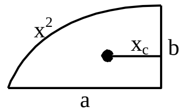
Dodatek

Wzory geometryczne



$$F = \frac{ab}{n+1}$$

$$x_c = \frac{a}{n+2}$$



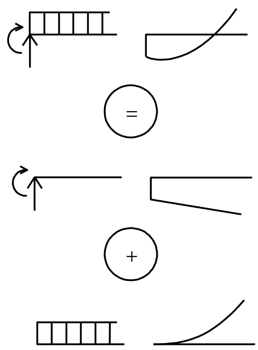
$$F = \frac{2}{3}ab$$

$$x_c = \frac{3}{8}a$$

Rys. 6 Wzory geometryczne

Superpozycja

Jeśli styczna do wykresu momentu nie jest pozioma, należy użyć superpozycji, rozkładając wykres na części składowe (od poszczególnych obciążeń z osobna), rys. 7.



Rys. 7 Superpozycja