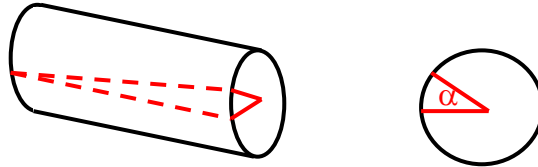


Skręcanie prętów kołowych

Definicje

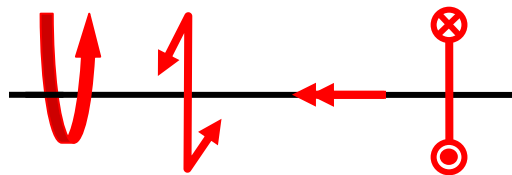
kąt skręcenia – kąt pomiędzy końcowym i początkowym położeniem wektora wodzącego punktu, rys. 1;
 kąt jest zdefiniowany w przekroju poprzecznym, jednostką jest [rad] lub [°]; jest to kąt obrotu jednego przekroju względem innego



Rys. 1 Definicja kąta skręcenia

jednostkowy kąt skręcenia – kąt skręcenia na metr

moment skręcający – moment, którego wektor jest równoległy do osi pręta, może być przedstawiany w różny sposób, rys. 2



Rys. 2 Symbole używane do oznaczenia momentu skręcającego

Najczęstszym zastosowaniem skręcania wały napędowe, które mogą być pełne albo drażone. Z rozwiązania zagadnienia brzegowego mamy:

$$M_s = \iint_F (q_{vz}y - q_{vy}z) dF = \iint_F \left[G\theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) y - G\theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) z \right] dF = G\theta J_s$$

gdzie moment bezwładności na skręcanie jest zdefiniowany jako:

$$J_s = \iint_F \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} y - \frac{\partial \phi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dF$$

W ogólnym przypadku bezwładność na skręcanie zależy od funkcji spaczenia i pośrednio od rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Zależność jednostkowego kąta skręcenia od momentu skręcającego i sztywności na skręcanie GJ_s :

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_s}$$

Jednostką jednostkowego kąta skręcenia jest [1/m = rad/m].

Skręcanie przekroju osiowo-symetrycznego

Podstawowe wzory

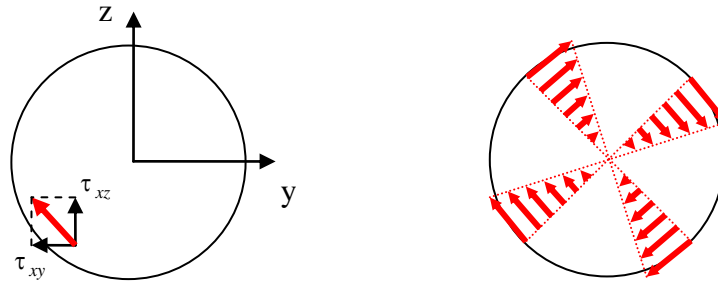
W szczególnym przypadku osiowej symetrii (koło, pierścien), funkcja spaczenia jest tożsamościowo równa zero i moment bezwładności na skręcanie redukuje się do biegunowego momentu bezwładności:

$$\phi(y, z) \equiv 0 \rightarrow J_s = J_0$$

Przekrój płaski pozostaje płaski i nie deplanuje się.

Naprężenia wyrażają się:

$$\tau_{vy} = \mp G\theta z, \quad \tau_{vz} = \pm G\theta y.$$



Rys. 4. Rozkład naprężeń stycznych

Wypadkowe naprężenie jest:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\theta\sqrt{z^2 + y^2} = G\theta r = \frac{M_s}{J_0} r, \text{ [MPa]},$$

a więc rozkład jest liniowy, rys. 4.

Kąt skręcenia obliczamy na podstawie jednostkowego kąta skręcenia, przy założeniu, że moment skręcający jest stały:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \theta = \frac{M_s}{GJ_0} \rightarrow \alpha = \int_l \theta dx = \frac{M_s l_s}{GJ_0} \text{ [1 = rad]}$$

Jest to kąt obrotu jednego przekroju względem drugiego. Uwaga: kąt jest bezwymiarowy, w radianach, nie w stopniach.

Gdy przedział jest obciążony ciągłym momentem skręcającym $m(x)$, wzory przekształca się:

$$M(x) = \int_0^x m(\xi) d\xi, \text{ and } \alpha(x) = \int_0^x \frac{M(\xi)}{GJ_0} d\xi$$

Warunki projektowania

Są dwa podstawowe warunki projektowania:

- wytrzymałościowy
- użytkowania.

Pierwszy warunek oznacza że konstrukcje (element) powinien przenieść zadane obciążenie. Drugi oznacza wymagania dotyczące trwałości, sztywności, odporności na warunki atmosferyczne itp. Z punktu widzenia wytrzymałości materiałów warto wspomnieć o dwóch zasadniczych warunkach projektowania:

- na stan graniczny nośności
- na stan graniczny użytkowania, zwykle chodzi o sztywność układu.

W przypadku skręcania, mamy:

$$\max(\tau) \leq R_t$$

gdzie R_t jest wytrzymałością obliczeniową na ścinanie danego materiału. Odpowiednią wartość można znaleźć w normach przedmiotowych.

Ponieważ największe naprężenia są osiągane na poboczniczy walca dla $r = R$, wprowadzamy tzw. wskaźnik wytrzymałości na skręcanie W_0 :

$$W_0 = \frac{J_0}{R},$$

więc:

$$\max(\tau) = \frac{M_0}{J_0} R = \frac{M_0}{W_0}$$

Wymaganie sztywności sprowadza się do żądania nie przekroczenia zadanych dopuszczalnych wartości kąta skręcenia lub jednostkowego kąta skręcenia:

$$\theta \leq \theta_{\text{dop}}, \text{ or } \alpha \leq \alpha_{\text{dop}}$$

Wały napędowe

Zasadniczą wielkością, jaka powinna być brana pod uwagę to moc przekazywana poprzez napęd oraz prędkość obrotowa wału. Projektowanie oznacza dobór materiału i wymiarów przekroju poprzecznego wału, tak aby maksymalne naprężenia styczne nie zostały przekroczone.

Moc P związana z prędkością obrotową wywołaną działającym momentem M_0 jest:

$$P = M_0 \omega,$$

gdzie ω jest prędkością obrotową wyrażoną w radianach na sekundę. Ale, $\omega = 2\pi f$, gdzie f jest częstością obrotową t.j. liczbą obrotów na sekundę. Mamy:

$$P = M_0 2\pi f.$$

Wał drążony

Liniowy rozkład naprężeń stycznych oznacza, że włókna zewnętrzne są najlepiej wykorzystane a włókna blisko środka praktycznie prawie wcale. Dlatego użycie drążonych wałów ma sens, zwłaszcza w przypadkach, gdy bardziej liczy się ciężar elementu niż jego koszt.

Moment bezwładności przekroju drążonego (pierścieniowego) o średnicy zewnętrznej D i wewnętrznej d jest:

$$J_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

a wskaźnik na skręcenie jest:

$$W_0 = \frac{J_0}{D} 2 = \frac{\pi}{16D} (D^4 - d^4).$$

Przykłady

Przykład 1

Wał o średnicy 4 cm i długości 2 m jest zamocowany na jednym końcu a obciążony na drugim takim momentem, że punkt A na pobocznicy przemieścił się do punktu A'. Długość łuku AA' jest 1 mm. Określić kąt skręcenia, jednostkowy kąt skręcenia, moment skręcający, maksymalne naprężenia tnące oraz odkształcenia kątowe na pobocznicy. $G = 80 \text{ GPa}$.

Rozwiązanie

Z definicji kąta skręcenia mamy:

$$\alpha = \frac{0.1}{\pi d} 2\pi = \frac{0.2}{4} = 0.05 \text{ [rad]}.$$

Dla stałego momentu skręcającego mamy:

$$\theta = \frac{\alpha}{l} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \text{ [rad/m]}.$$

Ze wzoru na jednostkowy kąt skręcenia dostajemy:

$$M_s = GJ_s \theta = 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot 0.04^4}{32} \cdot 0.025 = 500 \text{ [Nm]}$$

(jest to wartość całkiem spora, przeciętny moment obrotowy w VW golfie jest ok. 150 Nm). Maksymalne naprężenia styczne są:

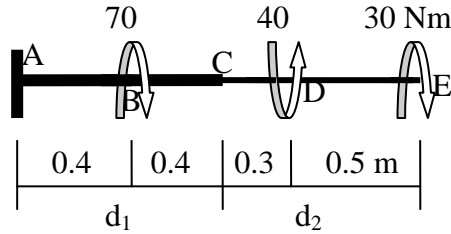
$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_0}{W_0} = \frac{GJ_0 \theta}{J_0} R = G\theta \frac{d}{2} = 80 \cdot 10^9 \cdot 0.025 \cdot 0.02 = 40 \cdot 10^6 \text{ [Pa]} = 40 \text{ [MPa]}.$$

Z równania Hooke'a określamy

$$\gamma = 2\varepsilon = \frac{2\tau_{\max}}{2G} = \theta \frac{d}{2} = 0.025 \cdot 0.02 = 0.0005.$$

Przykład 2

Określić kąt obrotu przekroju A względem E dla wału na rys. 5, $d_1 = 4$ cm, $d_2 = 3$ cm, $G = 80$ GPa.



Rys. 5 Skręcany wał

Rozwiązanie

Ze wzoru na kąt skręcenia mamy:

$$\alpha = \frac{M_0 l}{GJ_0}$$

Wzór jest słuszny dla stałych parametrów, więc dzielimy element na przedziały o stałym momencie bezwładności przekroju i stałym momencie skręcającym: AB, BC, CD and DE.

Mamy:

$$\text{AB: } l_{AB} = 0.4 \text{ m, } M_{AB} = 30 - 40 + 70 = 60 \text{ Nm, } J_{AB} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 2.51 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \alpha_{AB} = \frac{60 \cdot 0.4}{80 \cdot 10^9 \cdot 2.51 \cdot 10^{-7}} = 0.00120 \text{ rad}$$

$$\text{BC: } l_{BC} = 0.4 \text{ m, } M_{BC} = 30 - 40 = -10 \text{ Nm, } J_{BC} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 2.51 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \alpha_{BC} = \frac{-10 \cdot 0.4}{80 \cdot 10^9 \cdot 2.51 \cdot 10^{-7}} = -0.000199 \text{ rad}$$

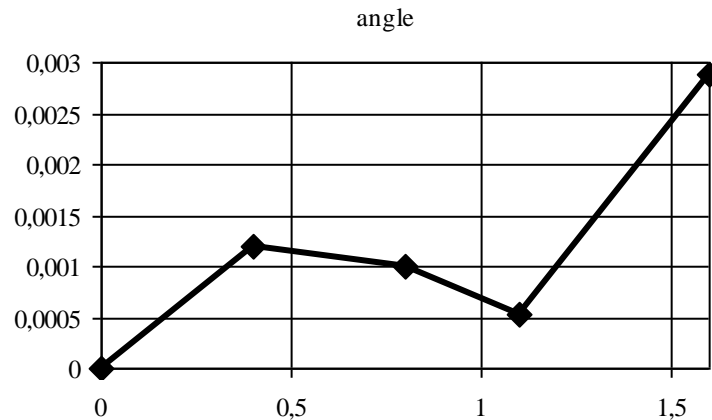
$$\text{CD: } l_{CD} = 0.3 \text{ m, } M_{CD} = 30 - 40 = -10 \text{ Nm, } J_{CD} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 7.95 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \alpha_{CD} = \frac{-10 \cdot 0.3}{80 \cdot 10^9 \cdot 7.95 \cdot 10^{-8}} = -0.000472 \text{ rad}$$

$$\text{DE: } l_{DE} = 0.5 \text{ m, } M_{DE} = 30 \text{ Nm, } J_{DE} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 7.95 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \alpha_{DE} = \frac{30 \cdot 0.5}{80 \cdot 10^9 \cdot 7.95 \cdot 10^{-8}} = 0.00236 \text{ rad}$$

i całkowity kąt skręcenia jest:

$$\alpha_{AE} = \alpha_{AB} + \alpha_{BC} + \alpha_{CD} + \alpha_{DE} = 0.00120 - 0.000199 - 0.000472 + 0.00236 = 0.00289 \text{ rad.}$$

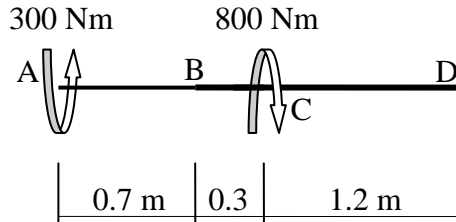
Rys. 6 przedstawia wykres kąta skręcenia.



Rys. 6 Wykres kąta skręcenia

Przykład 3

Określić średnicę wału z rys. 7, jeśli dopuszczalna wartość (a) naprężenia tnącego wynosi $R_t = 150$ MPa, (b) jednostkowego kąta skręcenia jest $\theta_{acc} = 0.05$ [rad/m] oraz (c) kąta skręcenia pomiędzy przekrojami B i D jest 0.02 [rad]. Moduł Kirchhoffa wynosi $G = 80$ GPa, $d_2 = 1.2d_1$.



Rys. 7 Skręcany wał

Rozwiązanie

1 warunek będzie spełniony dla:

$$\tau_{\max} = \frac{M_0}{W_0} \leq R_t = 150 \text{ MPa}$$

skąd mamy:

$$\frac{M_0}{W_0} = \frac{16M_0}{\pi d^3} \leq R_t \rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_0}{\pi R_t}}$$

oraz

$$d_{AB} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300}{\pi \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0.0217 \text{ m}, \quad d_{BC} = \frac{1}{1.2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300}{\pi \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0.0181 \text{ m}, \quad d_{CD} = \frac{1}{1.2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 500}{\pi \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0.0214 \text{ m}$$

więc

$$d = \max(d_{AB}, d_{BC}, d_{CD}) = 0.0217 \text{ m}$$

2 warunek będzie spełniony, gdy

$$\theta = \frac{M_0}{GJ_0} \leq \theta_{acc} = 0.05$$

skąd mamy:

$$\frac{32M_0}{G\pi d^4} \leq 0.05 \rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_0}{80 \cdot 10^9 \pi \cdot 0.05}}$$

czyli

$$d_{AB} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 300}{80 \cdot 10^9 \pi \cdot 0.05}} = 0.0296 \text{ m}, \quad d_{BC} = \frac{1}{1.2} \cdot \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 300}{80 \cdot 10^9 \pi \cdot 0.05}} = 0.0246 \text{ m}, \quad d_{CD} = \frac{1}{1.2} \cdot \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 500}{80 \cdot 10^9 \pi \cdot 0.05}} = 0.0280 \text{ m}$$

więc

$$d = \max(d_{AB}, d_{BC}, d_{CD}) = 0.0296$$

3 warunek będzie spełniony, gdy

$$\alpha_{BD} \leq \alpha_{acc} = 0.04 \text{ rad}$$

skąd:

$$\alpha_{BD} = \alpha_{BC} + \alpha_{CD} = \frac{M_{BC}l_{BC}}{GJ_{0BC}} + \frac{M_{CD}l_{CD}}{GJ_{0CD}} = \left| \frac{300 \cdot 0.3 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot (1.2 \cdot d)^4} - \frac{500 \cdot 1.2 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot (1.2 \cdot d)^4} \right| \leq 0.02$$

więc

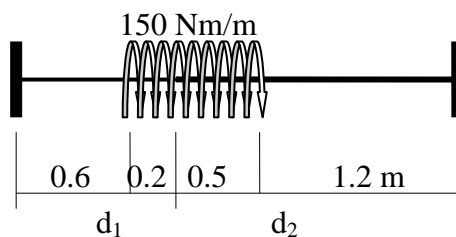
$$d \geq \frac{1}{1.2} \cdot \sqrt[4]{\frac{32}{\pi \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0.02}} (500 \cdot 1.2 - 300 \cdot 0.3) = 0.0297 \text{ m}$$

Biorąc pod uwagę powyższe wyniki, przyjmujemy ostatecznie:

$$d = 0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

Przykład 4

Dla wału z rys. 8 określić funkcję momentu skręcającego i narysować wykres jednostkowego kąta skręcenia. Określić wartości i narysować wykres kąta skręcenia. $d_1 = 3 \text{ cm}$, $d_2 = 3.1 \text{ cm}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Rys. 8 Wał z obciążeniem

Rozwiązanie

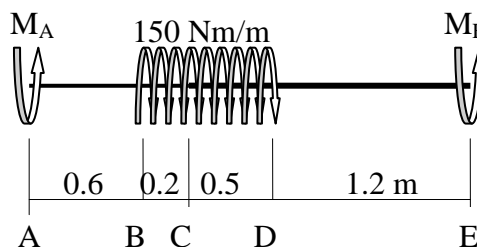
Aby rozwiązać problem statycznie niewyznaczalny, musimy wrócić do zagadnienia brzegowego i pełnego układu równań. Jak wiadomo, mamy:

- równania statyki równowagi sił (równania Naviera ze statycznymi warunkami brzegowymi),
- równania geometryczne zgodności (Cauchy'ego z kinem. war. brz.), oraz
- równania konstytutywne opisujące materiał.

W naszym szczególnym przypadku skręcanego wału, mamy:

- jedno równanie statyki $\sum M_0 = 0$ (wypadkowy moment powinien się zerować z war. równowagi)
- jedno równanie geometryczne zgodności $\alpha_{AE} = -\alpha_{EA} = 0$ (kąta skręcenia pomiędzy utwierdzonymi końcami)
- równanie konstytutywne $\alpha = \frac{M_0 l}{GJ_0}$

Uwalniamy układ z więzów:



Rys. 9 Wał z reakcjami i obciążeniem

Mamy dwie niewiadome M_A, M_E i dwa równania, jedno statyczne i jedno kinematyczne:

$$M_A - 150 \cdot 0.7 + M_E = 0$$

$$\alpha_{AB} + \alpha_{BC} + \alpha_{CD} + \alpha_{DE} = 0$$

Drugie z równań możemy rozpisać jako:

$$\frac{M_A \cdot 0.6}{GJ_{01}} + \frac{(M_A - 150 \cdot 0.5 \cdot 0.2) \cdot 0.2}{GJ_{01}} + \frac{(M_A - 150 \cdot 0.2 - 150 \cdot 0.5 \cdot 0.5) \cdot 0.5}{GJ_{02}} + \frac{(M_A - 150 \cdot 0.7) \cdot 1.2}{GJ_{02}} = 0$$

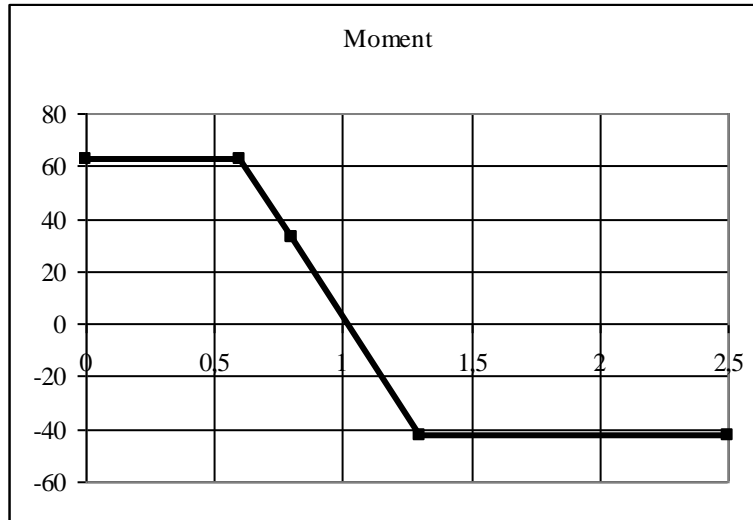
Mnożąc obustronnie przez GJ_{01} , z $J_{01}/J_{02} = 0.8771$ dostajemy:

$$0.6M_A + 0.2M_A - 3 + 0.8771 \cdot 0.5M_A - 29.6 + 1.05M_A - 110.5 = 0,$$

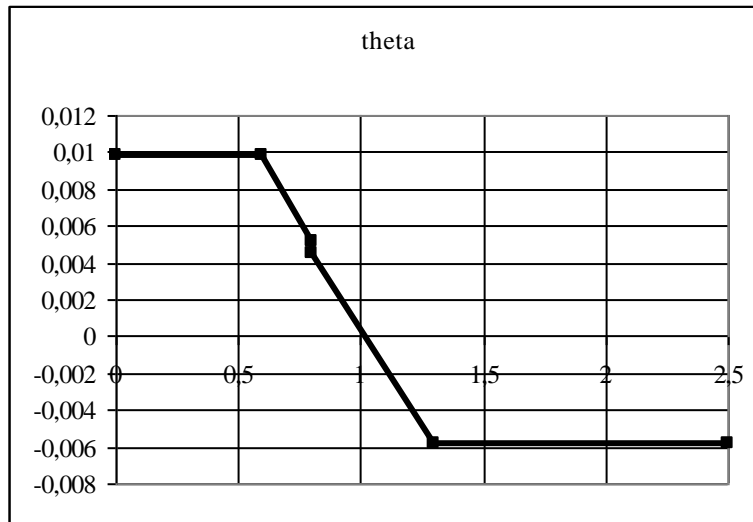
skąd mamy:

$$M_A = 62.47 \text{ Nm}, \quad M_E = -42.53 \text{ Nm}.$$

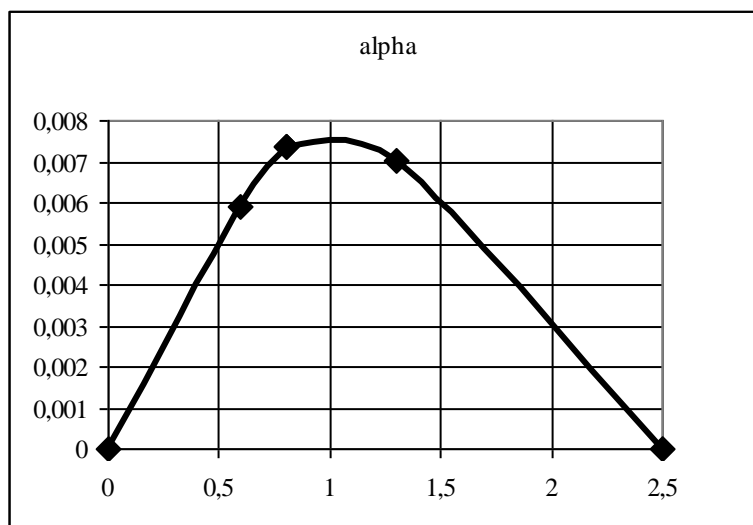
Rys. 10, 11 oraz 12 przedstawiają wykresy momentu skręcającego, jednostkowego kąta skręcenia oraz samego kąta skręcenia.



Rys. 10 Wykres momentu



Rys. 11 Wykres jednostkowego kąta skręcenia



Rys. 12 Wykres kąta skręcenia

Zadania kontrolne

Problem 1

Silnik połączony jest z generatorem drążonym wałem o średnicy wewnętrznej 100 mm i zewnętrznej 150 mm. Wiedząc, że dopuszczalne naprężenie tnące wynosi 85 MPa, określić maksymalny moment, który może być przeniesiony: a) przez istniejący wał, b) przez wał pełny (bez wydrążenia) o tej samej masie, c) przez wydrążony wał o tej samej masie i średnicy zewnętrznej 200 mm..

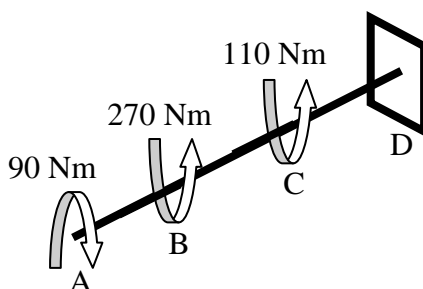
Odp.: a) 45.2 kNm, b) 23.3 kNm, c) 70.5 kNm

Problem 2

Określić, w którym z odcinków AB , BC and CD wału o przekroju kołowym, rys. 13, wystąpią maksymalne naprężenia styczne oraz wartość tych naprężeń.

$d_1 = 20$ mm, $d_2 = 25$ mm, $d_3 = 30$ mm.

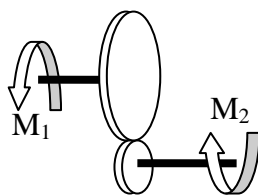
Odp.: 58.7 MPa w 2 odcinku wału.



Rys. 13 Wał z obciążeniem

Problem 3

Przekładnia, rys. 14, posiada 2 koła zębate: większe o średnicy 20 mm i mniejsze o średnicy 8 mm. Wiedząc, że dopuszczalne naprężenia styczne wynoszą 85 MPa, określić średnice wałków, jeśli moment skręcający wynosi $M_1 = 220$ Nm.

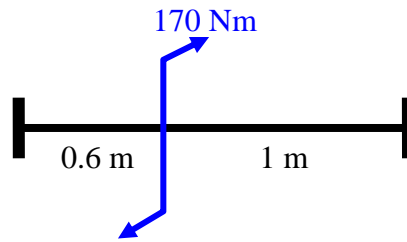


Rys. 14 Przekładnia z dwoma wałkami i kołami

Odp.: $d_1 = 0.0236$, $d_2 = 0.0174$ m.

Problem 4

Wiedząc, że dopuszczalne naprężenia styczne mosiężnego wału o obu końcach utwierdzonych, rys. 15, wynosi 55 MPa, określić średnicę wału. Dla obliczonej średnicy i modułu Kirchhoffa 37 GPa, określić kąt obrotu przekroju, w którym przyłożono moment.

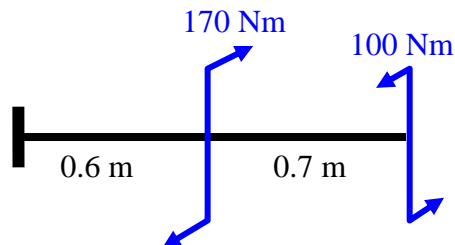


Rys. 15 Mosiężny wał z obciążeniem

Odp.: $d > 0.0214$ m, $\alpha = 0.0837$ rad = 4.79°

Problem 5

Określić średnicę stalowego wału, rys. 16, wiedząc, że dopuszczalne naprężenie styczne wynosi 80 MPa, a maksymalna wartość kąta obrotu względem utwierdzenia nie powinna przekroczyć wartości 2 stopni, $G = 80$ GPa



Rys. 16 Wał z obciążeniem

Odp.: $d = 0.0198$ m (por. wykres kąta skręcenia).

Problem 6

Zwymiarować wałek stalowy silnika volkswagena mogącego przenieść moc 100 kW przy 5000 obr/min, wiedząc, że dopuszczalne naprężenia styczne wynoszą 40 MPa.

Odp.: $d = 0.0290$ m