

Skręcanie prętów o przekroju niekołowym

Analogia membranowa

Jak wykazał de Saint-Venant, funkcja spaczenia zeruje się dla szczególnych kształtów przekroju: kołowo-symetrycznych, trójkątnych eliptycznych itp. Jeśli funkcja spaczenia nie zeruje się, konieczne jest rozwiązanie zagadnienia brzegowego.

Poprzez parametryzację tzw. funkcjami Prandtla, problem brzegowy może być zapisany w postaci równania Poissona:

$$\nabla^2 \psi = -2G\theta$$

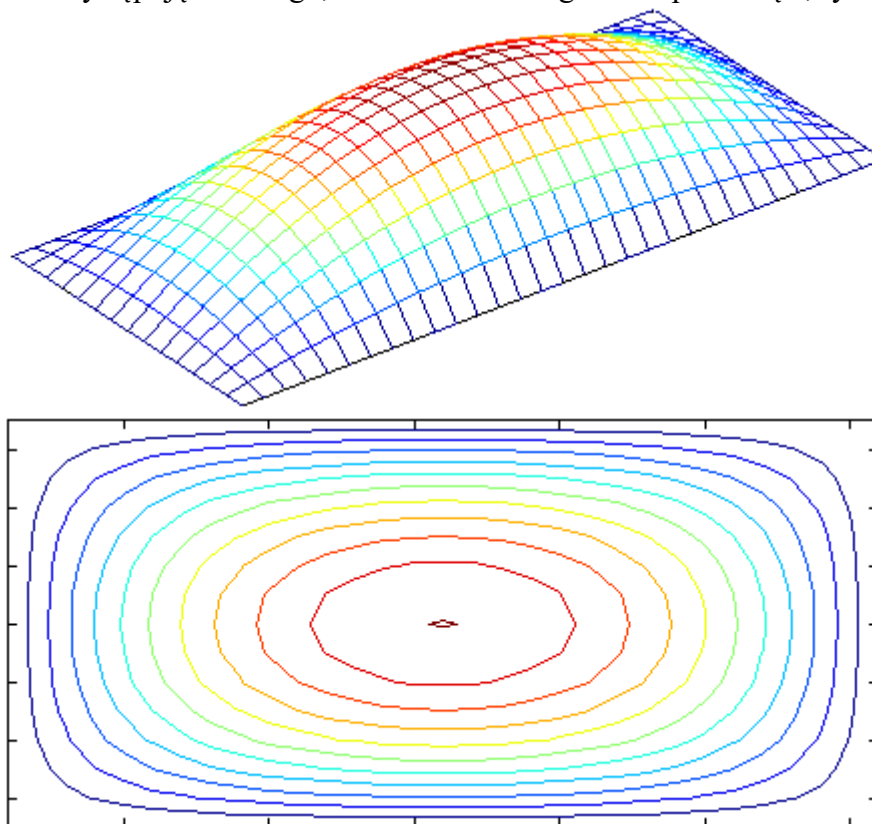
gdzie funkcja ψ jest funkcją Prandtla:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju niekołowym może być zobrazowany poprzez użycie tzw. analogii membranowej. Sprężysta membrana pod jednorodnym ciśnieniem stanowi analog skręcanego przekroju: oba problemy opisują identyczne zagadnienia brzegowe. Wypadkowe naprężenia styczne w punkcie mają taki sam kierunek jak pozioma styczna do membrany (styczna do jej warstwic) a ich wielkość jest proporcjonalna do spadku (nachylenia) membrany. Ponadto, moment skręcający jest proporcjonalny do objętości pod membraną.

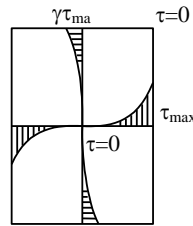
Przekrój prostokątny

Największe naprężenia występują na brzegu, w środku dłuższego boku prostokąta, rys. 1



Rys. 1 Funkcja Prandtla dla przekroju prostokątnego

Ponadto, zerowe naprężenia występują w narożach i w środku przekroju, rys. 2.



Rys. 2 Naprężenia tnące w skręcanym przekroju prostokątnym

Rozwiązanie dla przekroju prostokątnego może być otrzymane poprzez rozwinięcie funkcji spazenia w szereg:

$$\varphi(y, z) = yz - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)g_n(z).$$

Rozwiązanie może być stabilizowane z zastosowaniem wzorów:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\alpha \left(\frac{h}{b}\right)^2 b^3 h}, \quad J_s = \beta \left(\frac{h}{b}\right)^3 b^3 h, \quad \tau_s = \gamma \tau_{\max},$$

gdzie τ_s jest naprężeniem stycznym w środku krótszego boku a współczynniki α , β oraz γ są określone w tablicy 1.

h/b	1	1.25	1.5	2	3	5	10	∞
α	0.2082	0.2212	0.2310	0.2459	0.2672	0.2915	0.3123	0.3333
β	0.1406	0.1717	0.1958	0.2287	0.2633	0.2913	0.3123	0.3333
γ	1.0	0.9159	0.8591	0.7958	0.7533	0.7429	0.7423	0.7423

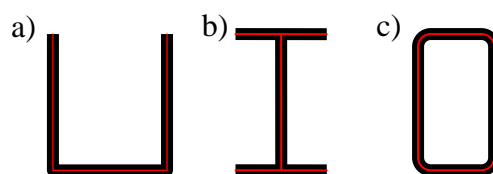
Tablica 1 Współczynniki we wzorach skręcanego prostokąta

Przekroje cienkościenne

Przekrój cienkościenne to przekrój w postaci profilu walcowanego, np. z arkusza blachy stalowej. Dokładne rozwiązanie skręcanych profile jest trudne i zwykle nie niezbędne w praktyce. Zamiast tego, w użyciu są przybliżone sposoby.

Z punktu widzenia praktycznych obliczeń wprowadza się podział na trzy typy przekrojów, rys. 3:

- (a) rozwijalne przekroje cienkościenne otwarte (których linia środkowa nie rozdwa się),
- (b) nierozwijalne przekroje cienkościenne otwarte (linia środkowa rozdwa się),
- (c) profile zamknięte.



Rys. 3 Profile cienkościenne z linią środkową, (a), (b) oraz (c)

Profile otwarte rozwijalne

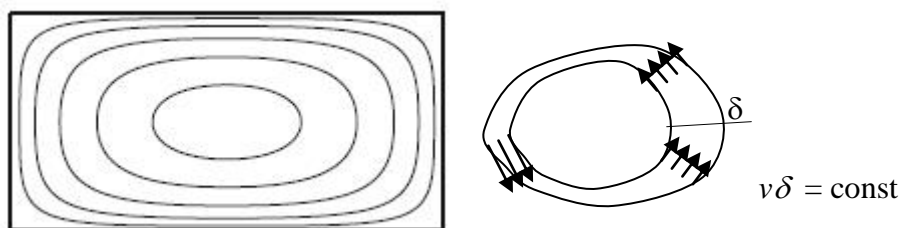
Takie przekroje mogą być zastąpione obliczeniowo prostokątem o takiej samej powierzchni i dłuższym boku równym długości linii środkowej.

Na przykład, ceownik o średniku 300x10 mm i półkach 90x16 mm może być zastąpiony prostokątem o linii środkowej długości $l = 2 \times 90 + 300 = 480$ mm i średniej grubości $b = 12.25$ mm.

Analogia hydrodynamiczna

Jest to analogia pomiędzy rozkładem naprężenia stycznego w przekroju poprzecznym a rozkładem linii prądu i prędkości przepływu cieczy w ruchu wirowym wewnątrz zamkniętego kanału o jednostkowej

głębokości i zmiennej szerokości, rys. 4. Łatwo wykazać, że zarówno strumień cieczy jak i naprężeń stycznych jest stały, $\tau\delta = \text{const}$.



Rys. 4 Analogia hydrodynamiczna: linie prądu i prędkości przepływu

Profile otwarte nierozwijalne

Użycie analogii hydrodynamicznej sugeruje, że popełnimy stosunkowo niewielki błąd dzieląc przekrój na prostokąty i zakładając że:

- każdy prostokąt pracuje niezależnie, przenosząc część momentu skręcającego, M_{si} ,
- jednostkowy kąt skręcenia każdego z prostokątów jest taki sam, $\theta_i = \text{idem}$.

Z równania statyki i warunków zgodności otrzymujemy układ n równań dla n składowych prostokątów:

$$M_s = \sum_i M_{si}, \quad \frac{M_{si}}{GJ_{si}} = \frac{M_{s(i+1)}}{GJ_{s(i+1)}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

skąd znajdujemy M_{si} oraz jednostkowy kąt skręcenia θ całego przekroju.

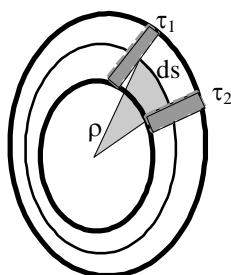
Aproksymacja jest tym lepsza im krótsze linie podziału na prostokąty.

Profile zamknięte

Na podstawie analogii hydrodynamicznej strumień naprężeń w każdym przekroju po grubości profile jest stały: $\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2 = \text{const}$. Naprężenia tnące obiegające profil równoważą się z momentem skręcającym. Zakładając stałość naprężenia po grubości ścianki, mamy:

$$M_s = \int_c \tau\delta ds \rho(s) = \tau\delta \int_c \rho(s) ds = \tau\delta 2A,$$

gdzie F jest powierzchnią wewnątrz linii środkowej profilu, rys. 5.



Rys. 5 Obieg naprężeń stycznych w profile zamkniętym

Stąd, maksymalne naprężenia styczne będą osiągnięte w najwęższym przekroju:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2A\delta_{\min}}.$$

Powyższy wzór znany jest jako pierwszy wzór Bredta.

Aby określić odkształcenia dla skręcania stosujemy wzór:

$$\theta = \frac{M_s}{GJ},$$

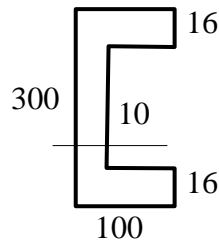
gdzie GJ jest sztywnością skręcania, a moment bezwładności na skręcanie jest (drugi wzór Bredta):

$$J = \frac{4A^2}{\oint_c \frac{ds}{\delta}}, \quad \delta = \text{const} \rightarrow J = \frac{4A^2\delta}{c}$$

Przykłady

Przykład 1

Określić maksymalne naprężenie styczne i jednostkowy kąt skręcenia przekroju z rys. 6. Porównać rozwiązanie dla profilu rozwijalnego z rozwiązaniem Bredta.



Rys. 6 Przekrój skręcany

Rozwiązanie

a) Traktujemy przekrój jak prostokąt o długości równej długości linii środkowej:

$$l = 300 - 16 + 2(100 - 5) = 474 \text{ mm}$$

Aby pole powierzchni było takie same jak profilu wyjściowego, przyjmujemy:

$$A = 16 \cdot 100 \cdot 2 + 10 \cdot (300 - 32) = 5880 \rightarrow \delta = \frac{5880}{474} = 12.41 \text{ mm}$$

Mamy:

$$\frac{l}{\delta} = \frac{474}{12.41} = 38.2 \rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

Maksymalne naprężenie styczne wynosi:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s} = \frac{M_s}{\frac{1}{3} \cdot 12.41^2 \cdot 474} = 4.11 \cdot 10^{-5} M_s$$

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_s} = \frac{M_s}{G \cdot \frac{1}{3} \cdot 12.41^3 \cdot 474} = 3.31 \cdot 10^{-6} \frac{M_s}{G}$$

b) Dzielimy przekrój na 3 prostokąty, dwie półki 100×16 , $\frac{l}{\delta} = 6.25$ oraz środnik 268×10 , $\frac{l}{\delta} = 26.8$. Parametry

α oraz β dla środnika są $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ a dla półek (z interpolacji liniowej) $\alpha = 0.2976$ oraz $\beta = 0.2977$. Przy

założeniach Bredta, mamy:

– równanie statyki

$$2M_{\text{fl}} + M_{\text{w}} = M_s$$

– równanie zgodności

$$\theta_{\text{fl}} = \theta_{\text{w}} \rightarrow \frac{M_{\text{fl}}}{GJ_{\text{fl}}} = \frac{M_{\text{w}}}{GJ_{\text{w}}} \rightarrow \frac{M_{\text{fl}}}{0.2977 \cdot 16^3 \cdot 100} = \frac{M_{\text{w}}}{0.3333 \cdot 10^3 \cdot 268} \rightarrow M_{\text{w}} = 0.7326 M_{\text{fl}}$$

i ostatecznie:

$$\tau_{\text{w}} = \frac{0.2681 M_s}{\frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 268} = 3.00 \cdot 10^{-5} M_s, \quad \tau_{\text{fl}} = \frac{0.366 M_s}{0.2976 \cdot 16^2 \cdot 100} = 4.80 \cdot 10^{-5} M_s, \quad \max \tau = 4.80 \cdot 10^{-5} M_s$$

$$\theta = \frac{M_s}{G} \frac{0.366}{0.2977 \cdot 16^3 \cdot 100} = 3.00 \cdot 10^{-6} \frac{M_s}{G}$$

Wnioski:

Obie metody dają inne odpowiedzi, błąd względny jest: na maksymalne naprężenie styczne 17% a na jednostkowy kąt skręcania około 10%.

Przykład 2

Określić naprężenia tnące w teowniku (średnik 30x5 cm, półka 6x20 cm), skręcanym momentem 20 kNm, jeśli $l/\delta = 6$: $\alpha = 0.299$, $\beta = 0.299$, $h/b = 3.33$: $\alpha = 0.272$, $\beta = 0.269$.

Rozwiązanie

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{M_1}{G \cdot 0.299 \cdot 30 \cdot 125 \cdot 10^{-8}} = \frac{M_2}{G \cdot 0.269 \cdot 20 \cdot 216 \cdot 10^{-8}}$$

$$M_1 + M_2 = 20 \cdot 10^3 \rightarrow M_1 = 9.82 \text{ kNm}, \quad M_2 = 10.18 \text{ kNm},$$

$$\tau_w = \frac{9820}{0.299 \cdot 30 \cdot 0.0025} = 43.8 \text{ MPa}, \quad \tau_{fl} = \frac{10180}{0.272 \cdot 0.2 \cdot 0.0036} = 52.0 \text{ MPa}$$

Przykład 3

Aby zweryfikować stosowalność wzorów Bredta zanalizować szczególnie przypadek skręcanego przekroju o kształcie pierścienia o średnicy zewnętrznej R i wewnętrznej r , dla którego znane jest rozwiązanie ścisłe. Dla celu analizy wprowadzamy parametr ξ określający stosunek grubości ścianki do promienia linii środkowej: $\xi = \delta/\rho$.

a) Rozwiązanie Bredta

$$\tau_{\max}^B = \frac{M_s}{2A\delta} = \dots = \frac{M_s}{\pi} \frac{1}{2\rho^2\delta}$$

$$\theta^B = \frac{M_s 2\pi\rho}{2GA^2\delta} = \dots = \frac{M_s}{G\pi} \frac{1}{2\rho^3\delta}$$

b) rozwiązanie ścisłe

$$\tau_{\max}^{\text{exact}} = \frac{M_s}{W_s} = \dots = \frac{M_s}{\pi} \frac{2\rho + \delta}{\rho\delta(4\rho^2 + \delta^2)}$$

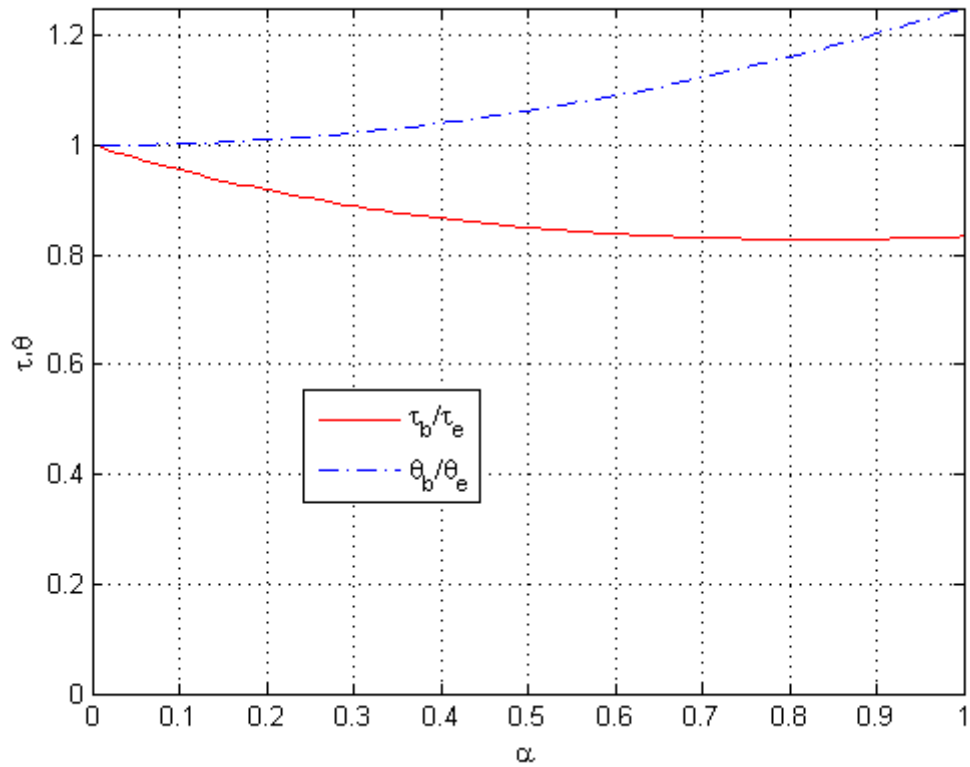
$$\theta^{\text{exact}} = \frac{M_s}{GJ_s} = \dots = \frac{M_s}{G\pi} \frac{2}{\rho\delta(4\rho^2 + \delta^2)}$$

Stosunek rozwiązania przybliżonego do ścisłego wynosi:

$$\frac{\tau_{\text{Bredt}}}{\tau_{\text{dokł}}} = \frac{4 + \xi^2}{4 + 2\xi}, \quad \frac{\theta_{\text{Bredt}}}{\theta_{\text{dokł}}} = \frac{4 + \xi^2}{4}$$

Wyniki w postaci funkcji parametru ξ przedstawia rys. 7.

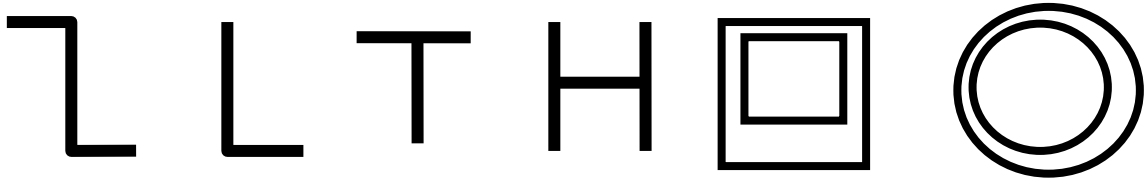
Maksymalne naprężenia styczne są niedoszacowane i błąd szybko narasta (od $\xi \approx 0.1$) a błąd na jednostkowy kąt skręcania pozostaje niewielki do większych wartości parametru ξ (aż do 0.5).



Rys. 7 Porównanie wyników ze wzorów Bredta z dokładnymi, $\alpha = \delta/\rho$

Zadania kontrolne

Określić maksymalne naprężenia styczne i jednostkowy kąt skręcenia dla przekrojów z rys. 8.



Rys. 8 Profile cienkościenne