

Stateczność i wyboczenie

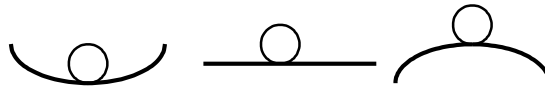
Wstęp

Definicje

stateczność – stan równowagi trwałej

wyboczenie – prawo ruchu układu

Istnieją trzy typy równowagi: trwała, obojętna i chwiejna, rys. 1.



Rys. 1 Trzy stany równowagi

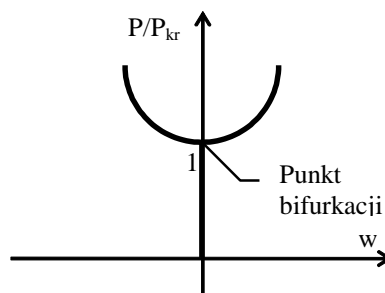
Zgodnie z definicją stateczności Liapunova, głównym kryterium stateczności układu jest jego odpowiedź na niewielki bodziec:

- w stanie równowagi trwałej układ wraca do stanu (położenia) pierwotnego
- w stanie równowagi obojętnej układ nie wraca do położenia pierwotnego
- w stanie równowagi chwiejnej układ doznaje znaczących przemieszczeń i nie wraca do położenia pierwotnego

Układ znajduje się w stanie równowagi trwałej wtedy i tylko wtedy gdy jego energia potencjalna osiąga minimum.

Siła krytyczna

Kiedy siła ściskająca maszt stale rośnie, maszt pozostaje stateczny do pewnej wartości siły, rys.2. Kiedy osiągnięta zostaje wartość krytyczna siły, obserwujemy rozdwojenie (bifurkację) postaci równowagi i maszt traci równowagę (trwałą). Przemieszczenia masztu stają się nieokreślone.



Rys. 2 Siła krytyczna i punkt bifurkacji

Powyżej punktu bifurkacji nie jest możliwa prostoliniowa postać równowagi masztu.

Utrata stateczności jest bardzo groźnym zjawiskiem i to z trzech powodów:

- znacząco zwiększone przemieszczenia układu zwykle oznaczają jego zniszczenie,
- utrata stateczności jak i zniszczenie elementu jest natychmiastowe, nie pozostawiając czasu na reakcję (akcję ratowniczą),
- nie ma wcześniejszych oznak zbliżającej się katastrofy.

Wzór Eulera

W stanie liniowo sprężystym układu, stosujemy związki Hooke'a rezygnując z zasady zeszywnienia, różniąc dwie konfiguracje: początkową (nieobciążoną) i aktualną (obciążoną). W konfiguracji aktualnej, ugięcia pręta będą równe:

$$M(x) = Pw(x) + M_0(x)$$

gdzie M_b jest częścią momentu zginającego pochodzącego od zginania poprzecznego. Podstawiając:

$$EJw''(x) + Pw(x) = -M_b(x) \Rightarrow k^2 \equiv \frac{P}{EJ}$$

Otrzymujemy równanie Eulera:

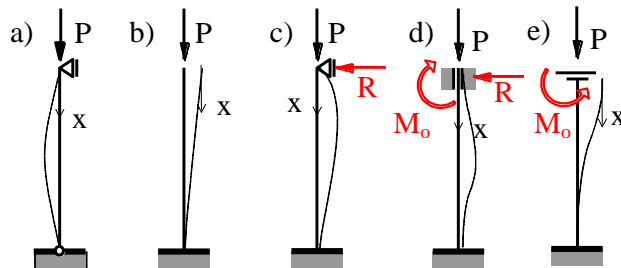
$$w''(x) + k^2w(x) = -\frac{M_0(x)}{EJ}$$

Całka ogólna tego równania jest:

$$w_0(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

a postać całki szczególnej zależy od postaci prawej strony równania.

Stałe całkowania jak i prawa strona równania Eulera zależą od kinematycznych warunków brzegowych, rys. 3.



Rys. 3 Różne warunki brzegowe

a)	$M_b(x) \equiv 0; \quad w(0) = w(l) = 0$ $B = 0, \quad \sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi$ $P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} = \dots = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$
----	--

b)	$M_b(x) \equiv 0; \quad w(0) = w'(l) = 0$ $B = 0, \quad \cos kl = 0 \Rightarrow kl = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}$ $P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$
----	---

c)	$M_b(x) = Rx; \quad w_s(x) = -\frac{R}{P}x, \quad w(0) = w(l) = w'(l) = 0$ $B = 0, \quad R = APk \cos kl, \quad \tan kl = kl \Rightarrow kl = 4.493$ $P_{kr} = \frac{20.19 \pi^2 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0.699l)^2}$
----	--

d)	$M_b(x) = Rx - M_0; \quad w_s(x) = -\frac{R}{P}x + \frac{M_0}{P}, \quad w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0$ $M_0 = -Bk^2, \quad R = APk, \quad B = \frac{\sin kl}{\cos kl - k} A, \quad 1 - \cos kl = \frac{1}{2} kl \sin kl \Rightarrow kl = 2\pi$ $P_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.5l)^2}$
----	---

$$M_b(x) = M_0; \quad w_s(x) = -\frac{M_0}{P}, \quad w'(0) = w(l) = w'(l) = 0$$

e) $A = 0, \quad M_0 = BP \cos kl, \quad Bk \sin kl = 0 \Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Wprowadzamy definicję długości wyboczeniowej i smukłości:

$$l_w \equiv \alpha l, \quad \lambda \equiv \frac{l_w}{i_{\min}}$$

Długość wyboczeniowa jest równa połowie długości fali wyboczeniowej.

Smukłość jest to stosunek długości wyboczeniowej do minimalnego promienia bezwładności (liczonego oczywiście w osiach głównych centralnych) przekroju.

Długość wyboczeniowa zależy od schematu statycznego (warunków brzegowych). Współczynnik α dla schematów od a) do e) jest odpowiednio równy 1, 2.0, 0.699, 0.5 i 1.

Smukłość zależy więc nie tylko od geometrii pręta (jego długości i momentu bezwładności jego przekroju poprzecznego) ale także i od schematu statycznego.

Możemy teraz zapisać wzór Eulera na siłę krytyczną w postaci ogólnej:

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

Wzór ten jest ważny w zakresie liniowo sprężystym, to jest do momentu, gdy naprężenia nie przekraczają granicy proporcjonalności, R_H .

$$\sigma_{kr} = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq R_H \rightarrow R_H \geq \frac{\pi^2 E}{\lambda_{gr}^2},$$

gdzie $\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$.

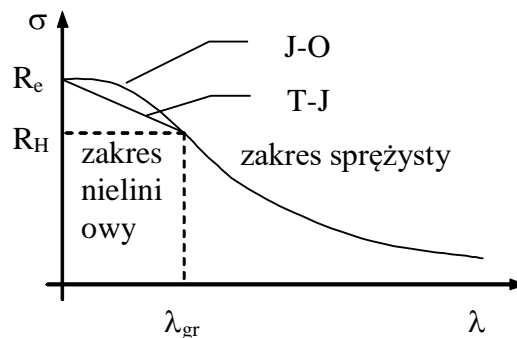
Zakres sprężysty jest dla smukłości większych od wartości smukłości granicznej, λ_{gr} .

Zakres poza liniowo sprężysty

Zakres jest ograniczony z dwu stron przez:

- granicę plastyczności dla $\lambda = 0$,
- granicę proporcjonalności dla $\lambda = \lambda_{gr}$.

Najprostszą liniową aproksymację zaproponowali Tetmeyer i Jasiński, rys. 4:



Rys. 4 Zakres sprężysty i niesprężysty

$$\sigma_{T-J} = a - b\lambda, \quad \sigma_{T-J}(0) = R_e, \quad \sigma_{T-J}(\lambda_{gr}) = R_H \Rightarrow a = R_e, \quad b = \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}}$$

$$P_{T-J} = A\sigma_{T-J} = AR_e - A(R_e - R_H) \frac{\lambda}{\lambda_{gr}}$$

Inną aproksymację zaproponowali Johnson i Ostfeld:

$$\sigma_{J-O} = C - B\lambda^2, \quad \sigma_{J-O}(0) = R_e, \quad \sigma_{J-O}(\lambda_{gr}) = R_H \Rightarrow C = R_e, \quad B = \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}^2}$$

$$P_{J-O} = A\sigma_{J-O} = AR_e - A(R_e - R_H) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{gr}} \right)^2.$$

Przykłady

Rozważając stateczność prętów prostych napotykamy dwa rodzaje problemów:

- określenie dopuszczalnego obciążenia dla zadanej geometrii pręta; zakres pracy element jest znany a priori; wartość dopuszczalnego obciążenia powinna być znacznie mniejsza od wartości krytycznej (zakres współczynników bezpieczeństwa jest wyjątkowo wysoki, od 1.5 aż do 7),
- określenie geometrii przekroju poprzecznego dla zadanego obciążenia; zakres rozwiązania nie jest znany z góry i należy go wstępnie zakładać a po zakończeniu obliczeń weryfikować przyjęte założenia.

Przykład 1

Określić wymiar kwadratowego przekroju poprzecznego wspornika obciążonego siłą $P = 1$ MN, jeśli $R_e = 240$ MPa, $R_H = 180$ MPa, $E = 210$ GPa, $l = 1$ m, $n = 2$ (współczynnik bezpieczeństwa).

Rozwiązanie

Zakładamy zakres liniowo-sprężysty, $l_w = 2$ m, $A = d^2$, $J = d^4/12$, $i = \frac{d}{\sqrt{12}}$, $Pn = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$, skąd:

$$d = \sqrt[4]{\frac{48 \cdot 10^6}{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10}} = 0.069 \text{ m}$$

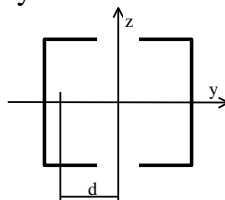
Sprawdzamy założony zakres: $\lambda_{gr} = 107$, $\lambda = \frac{l_w}{i} = \frac{2\sqrt{12}}{d} = 99.9 < \lambda_{gr}$ (zakres źle założony), zmieniamy zakres i stosujemy wzór T-J:

$$Pn = (a - b\lambda)d^2, \quad (240 \cdot 10^6 - 0.56 \cdot 10^6 \frac{2\sqrt{12}}{d})d^2 = 2 \cdot 10^6, \quad 240d^2 - 3.88d - 2 = 0, \quad d = 0.084 \text{ m}$$

Przyjmujemy $d = 8.5$ cm.

Przykład 2

Wiedząc, że $l_w = 4$ m, $\lambda_{gr} = 107$, $P = 100$ kN, $n = 2.12$ (współczynnik pewności), określić geometrię przekroju poprzecznego złożonego z dwu ceowników, rys. 5.



Rys. 5 Przekrój z dwu ceowników

Rozwiązanie

Z tablic profili walcowanych mamy:

$$[80, A = 11 \text{ cm}^2, e = 1.45 \text{ cm}, J_y = 106 \text{ cm}^4, i_y = 3.1 \text{ cm}, J_z = 19.4 \text{ cm}^4$$

z uwagi na stateczność w płaszczyźnie x-y:

$$\lambda = \frac{400}{3.1} = 129 > \lambda_{gr}, \quad P_E = \frac{\pi^2 210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 106 \cdot 10^{-8}}{16} = 275 > Pn.$$

Aby otrzymać taką samą nośność w drugiej płaszczyźnie, momenty bezwładności powinny być również sobie równe $J_z = J_y = 212 \text{ cm}^4$, co daje:

$$J_z = 2(J_{z_0} + Fd^2)$$

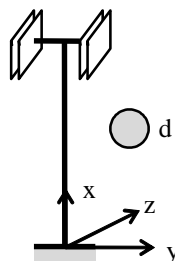
skąd $d = 0.028 \text{ m}$ i minimalny rozstaw profile powinien wynosić:

$$45 - 14.5 = 30.5 \text{ mm} = 0.0305 \text{ m}, J_z = 2435 \text{ cm}^4, i_z = 0.033 \text{ m}, \lambda = 120.2 > \lambda_{gr}.$$

Sprawdzenie zakresu nie jest niezbędne, gdyż siła krytyczna Eulera jest większa niż siła krytyczna wynikająca ze wzoru T-J.

Przykład 3

Określić dopuszczalną siłę dla układu z rys. 6, jeśli $d = 8 \text{ cm}$, $l = 200 \text{ cm}$, stal St3S: $E = 210 \text{ GPa}$, $R_H = 180 \text{ MPa}$, $R_e = 240 \text{ MPa}$, $\lambda_{gr} = 107$.



Rys. 6 Pręt z różnymi warunkami brzegowymi w płaszczyznach głównych

Rozwiązanie

płaszczyzna x - z :

$$\alpha = 2, l_w = 4 \text{ m}, \lambda = 200 > \lambda_{gr} \text{ (zakres sprężysty),}$$

$$P_{dop} = \frac{P_E}{n} = \frac{\pi^2 EA}{n\lambda^2} = \frac{260}{n} \text{ kN}$$

płaszczyzna x - y :

$$\alpha = 0.5, l_w = 1 \text{ m}, \lambda = 50 < \lambda_{gr} \text{ (zakres poza-liniowy)}$$

$$P_{dop} = \frac{\sigma_{T-J} A}{n} = \frac{(a - b\lambda)A}{n} = \frac{1.065}{n} \text{ MN}$$

Ostatecznie mamy $P_{dop} = 260/n \text{ kN}$ (n – współczynnik bezpieczeństwa; nie zadany, ale niezbędny).

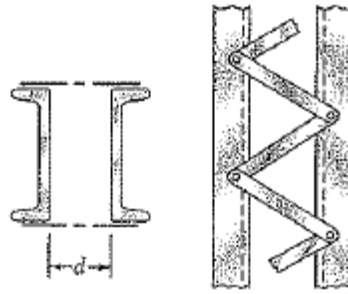
Zadania kontrolne

Problem 1

Określić dopuszczalne obciążenie osiowe dla słupa o długości wyboczeniowej 6-m, wykonanego z profili walcowanych: a) HEA 220 i b) HEA 260. Przyjąć $R_H = 180 \text{ MPa}$, $R_e = 300 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$. Założyć współczynnik bezpieczeństwa równy 2.

Problem 2

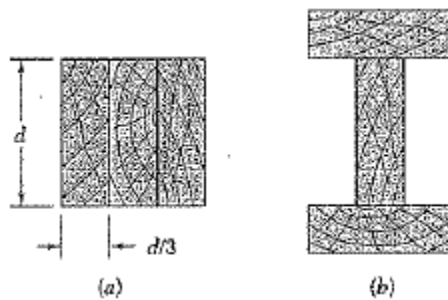
Ściskany pręt o długości efektywnej 8 m wykonano z dwu ceowników C200 z przewiązką jak na rys. 7. Przyjmując współczynnik bezpieczeństwa równy 1.85, określić dopuszczalne obciążenie osiowe pręta. Przyjąć $R_H = 180 \text{ MPa}$, $R_e = 300 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$ i $d = 100 \text{ mm}$.



Rys. 7 Przekrój z dwu ceowników

Problem 3

Słup o długości wyboczeniowej L może być wykonany ze sklejonych identycznych desek w jednym z dwóch układów pokazanych na rys. 8. Określić stosunek obciążenia krytycznego dla układu a) względem obciążenia krytycznego dla układu b).



Rys. 8 Dwa ułożenia klejonych desek

Problem 4

Określić obciążenie krytyczne aluminiowego walca o długości 1.5 m, średnicy zewnętrznej 16 mm i grubości ścianki 1.25 mm. Przyjąć $E = 70$ GPa.

Problem 5

Drewniany słup, obustronnie przegubowo podparty i o długości 2 m, ma kwadratowy przekrój poprzeczny. Przyjmując $E = 13$ GPa, $R_H = 12$ MPa, oraz zakładając współczynnik bezpieczeństwa 2.5 we wzorze Eulera, określić wymiar przekroju poprzecznego dla obciążenia (a) 100-kN, (b) 200-kN.

Dodatek

Projektowanie prętów stalowych

Nośność przekroju pręta obliczana jest ze wzoru typu:

$$N_{dop} = \psi A f_d,$$

gdzie ψ jest współczynnikiem redukcyjnym nośności, który zależy od smukłości porównawczej (zdefiniowanej przez normę stalową), f_d – wytrzymałość obliczeniowa stali, A – przekrój brutto.

Metoda energetyczna

Energia sprężysta jest sumą energii potencjalnej i pracy sił zewnętrznych: $E = U - L$. Warunkiem równowagi w stanie krytycznym jest zerowanie się wariacji funkcjonału energii sprężystej:

$$\delta E = 0 \Rightarrow \delta U = \delta L \Rightarrow \Delta U = \Delta L,$$

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(w'')^2 dx$$

$$\Delta L = P v, \quad v - \text{przemieszczenie pionowe}, \quad \Delta L = \frac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx,$$

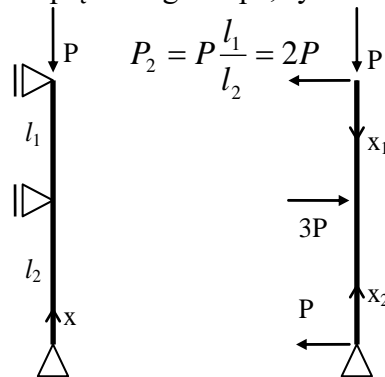
skąd, ostatecznie:

$$P_{cr} = \frac{\int_0^l EJ(w''(x))^2 dx}{\int_0^l (w'(x))^2 dx}$$

Metoda energetyczna daje oszacowanie na niekorzyść pewności (po stronie niebezpiecznej). Jej dokładność zależy od jakości aproksymacji ugięć. Dlatego funkcja aproksymacyjna powinna spełniać kinematyczne i często ponadto statyczne warunki brzegowe.

Przykład

Obliczenie siły krytycznej Eulera dla dwupiętrowego słupa, rys. 12.9: $l_1 = 4 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$.



Rys. 12.9 Dwupiętrowy słup

Rozwiązanie

Metoda energetyczna

1sza aproksymacja

$$w(x) = a(x^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$\text{kinematyczne warunki brzegowe: } w(0) = w(l_1) = w(l_1 + l_2) = 0$$

$$w(x) = a(x^3 - 10x^2 + 24x), \quad P_{kr} = 1.458 EJ$$

2ga aproksymacja

$$w(x) = a(x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)$$

$$\text{kinematyczne warunki brzegowe: } w(0) = w(l_1) = w(l_1 + l_2) = 0$$

$$\text{statyczne warunki brzegowe: } w''(0) = w''(l_1 + l_2) = 0, \quad P_{kr} = 0.952 EJ$$

Rozwiązanie dokładne

$$\text{dla } 0 < x_1 < l_1, w_1'' + k_1^2 w_1 = -\frac{P}{EJ} x_1, \text{ podstawiając } k^2 \equiv \frac{N}{EJ}$$

$$\text{mamy (całka ogólna + całka szczególna): } w_1(x) = A \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1 - \frac{P}{N} x_1$$

z warunkami brzegowymi:

$$w_1(0) = w_1(l_1) = 0 \Rightarrow w_1(x_1) = \frac{P_1 l_1}{N \sin k_1 l_1} \sin k_1 x_1 - \frac{P_1}{N} x_1,$$

(podobnie dla $0 < x_2 < l_2$). Warunki zgodności: $w_1'(l_1) = -w_2'(l_2)$, $w_1''(l_1) = -w_2''(l_2)$.

Porównując drugie pochodne, mamy $k_1 = -k_2 = k$, a z warunku dla pierwszych pochodnych dostajemy (po przekształceniach):

$$k \left(\frac{\cos k l_1}{\sin k l_1} + \frac{\cos k l_2}{\sin k l_2} \right) = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \rightarrow k = 0.9642 \rightarrow N = k^2 EJ = 0.930 EJ.$$