

Plastyczność – nośność plastyczna przekroju

Wstęp

Definicje

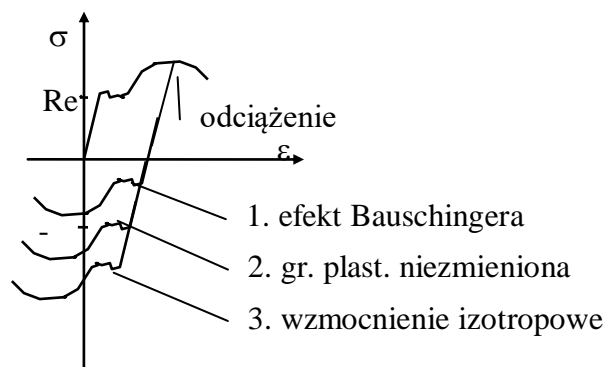
obciążanie/odciążanie/ponowne obciążanie – nazwy procesów powszechnie używanych w teorii plastyczności

odkształcenia plastyczne (trwałe) – odkształcenia nie znikające po odciążeniu,

proces bierny – proces, podczas którego odkształcenia plastyczne nie zmieniają się, bez dyssypacji energii,

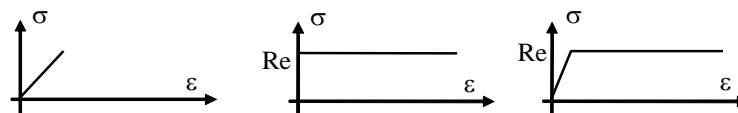
proces czynny (aktywny) – proces ze zmianą odkształceń trwałych i dyssypowaną energią,

efekt Bauschingera – zmiana granicy plastyczności w wyniku procesu plastycznego; wzmocnienie kinematyczne, odmienne od wzmocnienia izotropowego, rys. 1.



Rys. 1 Efekt Bauschingera i wzmocnienie izotropowe

Schematyzacje



Rys. 2 Schematyzacje: Hooke, Levy-Mises, i Prandtl

W dalszej części używana będzie schematyzacja Prandtla. Jest to schematyzacja odpowiednia dla budownictwa, gdzie odkształcenia plastyczne, jeśli występują, są tego samego rzędu, co odkształcenia sprężyste.

Sprężysto-plastyczne zginanie z rozciąganiem przekroju z pionową osią symetrii

Założenia tzw. technicznej teorii zginania są następujące:

– jednoosiowy stan naprężenia

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{for } \sigma < R_e \\ \pm R_e & \end{cases}$$

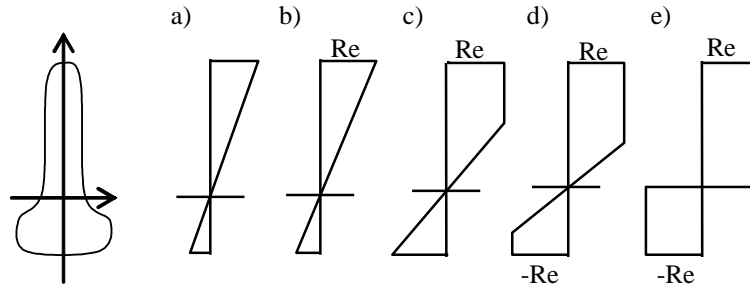
– hipoteza Bernoulliego.

Stosować będziemy warunki równoważności układów sił zewnętrznych i wewnętrznych:

$$\iint \sigma dA = N, \quad \iint \sigma z dA = M.$$

Warunki te wynikają są twierdzeniem mechaniki nie zależącym od równań konstytutywnych, a więc są zawsze obowiązujące.

W trakcie obciążania przekroju rosnącymi siłami przekrojowymi (momentem zginającym i siłą podłużną), obserwuje się charakterystyczne etapy pracy przekroju, rys. 3:



Rys. 3 Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym

Pierwszy etap (a), jest w zakresie liniowo sprężystym. Położenie osi obojętnej jest stałe i pokrywa się z osią główną centralną. Etap kończy się, gdy w skrajnych włóknach osiągnięta jest granica plastyczności. Odpowiadające temu stanowi (b) wartości sił przekrojowych nazywane są nośnością sprężystą.

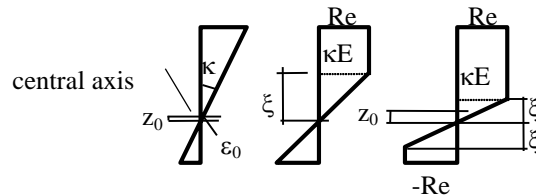
Wraz ze wzrostem sił przekrojowych tworzy się strefa uplastycznienia. Oś obojętka na tym etapie (c) zwykle zmienia swoje położenie. W kolejnym etapie (d) uplastycznienie może pojawić się również z drugiej strony przekroju. Odpowiada to rozszerzaniu się strefy uplastycznienia, od skrajnych włókien do środka przekroju. W strefie sprężystej obowiązują związki Hooke'a, a w strefie uplastycznionej osiągnięte są naprężenia plastyczne. Linie rozdziału tych stref zwane są frontem plastycznym, i – jeśli obie występują – znajdują się w takiej samej odległości od osi obojętnej. W końcowym etapie (e), strefy uplastycznienia niemal się stykają i tworzy się przegub plastyczny. Siły przekrojowe odpowiadające temu stanowi nazywane są nośnością plastyczną przekroju.

Kiedy pojawia się częściowe uplastycznienie przekroju, analiza stanu naprężenia i odkształcenia staje się bardziej złożona. Zasada superpozycji nie obowiązuje. Głównym problemem jest określenie istnienia frontu plastycznego i jego położenia.

Na podstawie hipotezy Bernoulliego rozkład naprężenia możemy zapisać jako:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa z$$

gdzie jedynie dwa parametry są niezależne: odkształcenie liniowe osi pręta i zmiana jego krzywizny. Jednak czasem inny wybór niezależnych parametrów jest bardziej korzystny, rys. 4.



Rys. 4 Parametry rozkładu naprężenia i odkształcenia

Są to:

- położenie osi obojętnej

$$\varepsilon(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = -\frac{\varepsilon_0}{\kappa}$$

- położenie frontu plastycznego

$$\varepsilon_0 + \kappa z_p = \pm R_e / E \Rightarrow z_p = \pm \frac{R_e}{E\kappa} - \frac{\varepsilon_0}{\kappa}$$

- zakres strefy sprężystej pracy przekroju

$$\xi \kappa E = \pm R_e \Rightarrow \xi = \frac{R_e}{E\kappa}$$

Tak więc, parametrami opisu mogą być: krzywizna osi pręta, κ , odkształcenie liniowe osi pręta, ε_0 , położenie osi obojętnej, z_0 , położenie frontu plastycznego, z_p , zakres strefy sprężystej, ξ . Jedyne dwa z nich są niezależne.

Wskaźnik plastyczny przekroju

W przypadku prostego zginania, $M \neq 0$, $N = 0$, wskaźnik plastyczny przekroju, wielkość analogiczna do wskaźnika sprężystego przekroju (wskaźnika wytrzymałości na zginanie), jest wielkością czysto geometryczną i może być obliczony ze wzoru (suma momentów statycznych):

$$\bar{W} = (|S_{A1}| + |S_{A2}|)$$

gdzie moment statyczny może być obliczany względem dowolnej osi, równoległej do osi głównej centralnej, w szczególności względem osi obojętnej, połowiącej przekrój:

$$A_1 = A_2.$$

Jeśli przyjmie się oś centralną jako układ odniesienia, wzór upraszcza się:

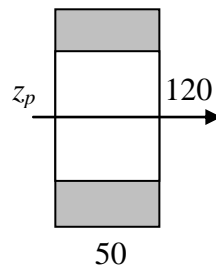
$$\bar{W} = 2|S_{(A_1, A_2)}^0|$$

ale wówczas znajomość położenia osi centralnej jest niezbędna.

Przykłady

Przykład 1

Przekrój prostokątny 50×120 mm, rys. 5, obciążony jest momentem zginającym $M = 36.8$ kNm. Zakładając, że belka wykonana jest z materiału sprężysto-plastycznego o granicy plastyczności 240 MPa i module sprężystości 200 GPa, określić (a) zakres strefy sprężystej pracy przekroju, (b) promień krzywizny osi obojętnej, (c) rozkład naprężeń resztkowych, (d) promień krzywizny po odciążeniu.



Rys. 5 Uplastycznienie przekroju poprzecznego

Rozwiązanie

(a) zakres strefy sprężystej

Nośności: sprężysta i plastyczna przekroju wynoszą:

$$\bar{M} = R_e \bar{W} = 240 \cdot 10^6 \cdot \frac{0.05 \cdot 0.12^2}{6} = 28.8 \text{ kNm}$$

$$\bar{M} = R_e \bar{W} = 240 \cdot 10^6 \cdot \frac{0.05 \cdot 0.12^2}{4} = 43.2 \text{ kNm}$$

co oznacza, że moment zginający jest momentem sprężysto-plastycznym.

Z warunku równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych otrzymujemy:

$$M = 36.8 \cdot 10^3 = \iint_A \sigma_x z \cdot dA$$

$$36.8 \cdot 10^3 = 0.05 \left[\int_{-z_p}^{z_p} \frac{z}{z_p} \cdot 240 \cdot 10^6 dz + 2 \cdot (0.06 - z_p) \frac{0.06 + z_p}{2} \cdot 240 \cdot 10^6 \right] =$$

$$= 12 \cdot 10^6 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{z_p^3}{z_p} - \frac{-z_p^3}{z_p} \right) + (0.06^2 - z_p^2) \right] = 12 \cdot 10^6 \left(\frac{2}{3} z_p^2 - z_p^2 + 0.0036 \right) = 12 \cdot 10^6 \left(0.0036 - \frac{1}{3} z_p^2 \right)$$

$$z_p = \sqrt{3 \cdot \left(0.0036 - \frac{36.8 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} \right)} = 0.04$$

Tak więc zasięg strefy sprężystej wynosi 0.08 m.

(b) promień krzywizny

Krzywiznę obliczamy na podstawie rozkładu odkształcenia w strefie sprężystej:

$$\varepsilon(z_p) = \frac{Re}{E}, \quad \varepsilon(z_p) = \kappa z_p \quad \rightarrow \quad \kappa = \frac{Re}{z_p E} = \frac{240 \cdot 10^6}{0.04 \cdot 200 \cdot 10^9} = 0.03,$$

a więc promień krzywizny wynosi:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{0.03} = 33.3 \text{ m}$$

(c) rozkład naprężeń resztkowych

Rozkład naprężeń normalnych, spowodowanych momentem zginającym przedstawia rys. 6.a.

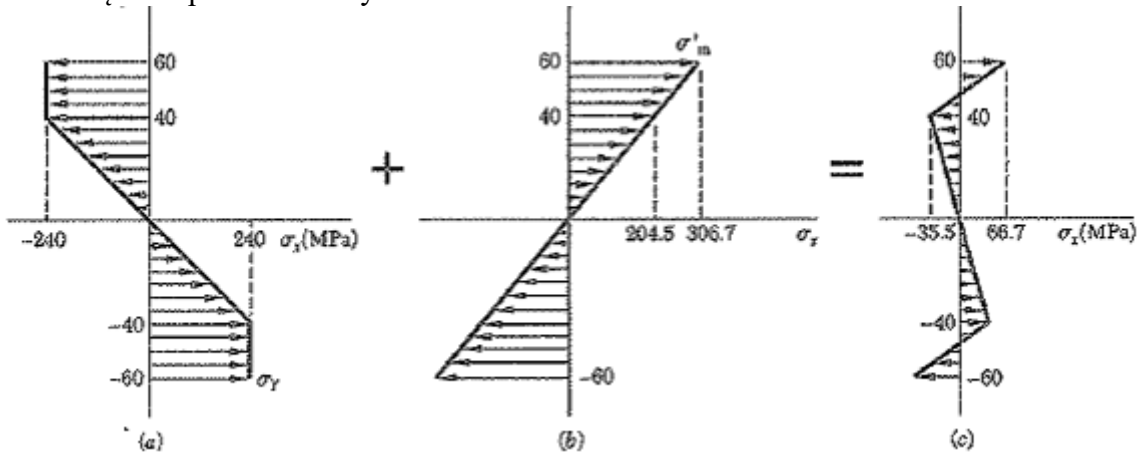
Ponieważ proces odciążenia jest sprężysty, naprężenia odciążenia mogą być obliczone ze zwykłego wzoru dla zakresu sprężystego (Hooke'a):

$$\max \sigma_x = \frac{M}{W} = \frac{36.8 \cdot 10^3 \cdot 6}{0.05 \cdot 0.12^2} = 306.7 \text{ MPa}$$

i z proporcji naprężeń normalnych, mamy:

$$\sigma_x(z = 0.04) = \frac{0.04}{0.06} \cdot 306.7 = 204.5 \text{ MPa.}$$

Naprężenia odciążenia przedstawia rys. 6.b.



Rys. 6 Rozkład naprężeń w stanie sprężysto-plastycznym, naprężenia odciążenia i resztkowe

Ponieważ naprężenia odciążenia są sprężyste, obliczamy naprężenia końcowe (stosując zasadę superpozycji), jako sumę algebraiczną naprężeń obciążenia (sprężysto-plastycznych) i odciążenia. W efekcie otrzymujemy rozkład naprężeń resztkowych. Mamy:

– dla $z = z_p$: $\sigma_x = -240 + 204.5 = -35.5 \text{ MPa}$

– dla $z = 0.12$: $\sigma_x = -240 + 306.7 = 66.7 \text{ MPa}$

(i symetrycznie w dolnej części przekroju).

Rozkład naprężeń resztkowych przedstawia rysunek 6.c. Jest oczywiste, że wypadkowa siła podłużna, pochodząca od naprężeń resztkowych jest równa zero. Prosty rachunek pokazuje, że również i moment zginający się zeruje.

(d) promień krzywizny po odciążeniu

Ponieważ strefa sprężystej pracy przekroju nie doznaje odkształceń plastycznych w trakcie odciążania, równania Hooke'a w tej strefie nie tracą swojej ważności. Dla frontu plastycznego mamy:

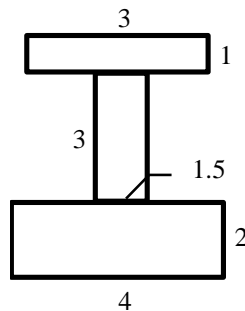
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{35.5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = 1.775 \cdot 10^{-4}$$

a ponieważ

$$\varepsilon_x = \kappa z \rightarrow \kappa = \frac{\varepsilon_x}{z} = \frac{\varepsilon_x(z_p)}{z_p} = \frac{1.775 \cdot 10^{-4}}{0.04} = 4.44 \cdot 10^{-6} \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} = 225 \text{ m.}$$

Przykład 2

Określić stosunek nośności plastycznej przekroju do jego nośności sprężystej, rys. 7.



Rys. 7 Przekrój poprzeczny – wymiary

Rozwiązanie

pole przekroju: $A = 15.5 \text{ cm}^2$

położenie środka ciężkości: $z_c = 2.60 \text{ cm}$

główny centralny moment bezwładności:

$$J_y = \frac{4 \times 2^3}{12} + 4 \times 2 \times (2.6 - 1)^2 + \frac{1.5 \times 3^3}{12} + 1.5 \times 3 \times (2.6 - 3.5)^2 + \frac{3 \times 1^3}{12} + 3 \times (2.6 - 5.5)^2 = 55.65 \text{ cm}^4$$

wskaźnik sprężysty:

$$\bar{W} = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{55.65}{3.4} = 16.37 \text{ cm}^3$$

położenie osi obojętnej w stanie pełnego uplastycznienia przekroju (oś przechodzi przez dolną półkę):

$$z_0 = \frac{0.5 \times 15.5}{4} - 2.6 = -0.6625 \text{ cm}$$

wskaźnik plastyczny:

$$\bar{\bar{W}} = 2S_y^1 = 2 \times 1.9375 \times 4 \times \left(2.6 - \frac{1.9375}{2} \right) = 25.28 \text{ cm}^3$$

stosunek wskaźników plastycznego do sprężystego (zawsze większy od jedności):

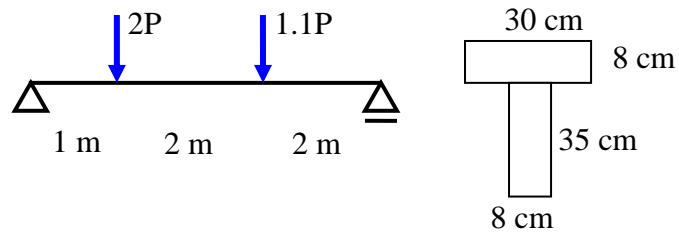
$$s = \frac{\bar{\bar{W}}}{\bar{W}} = \frac{25.28}{16.37} = 1.544$$

Stosunek obu wskaźników jest też obliczany w programie „przekrój” (© A. Zaborski)

Zadania kontrolne

Problem 1

Określić stosunek nośności plastycznej do nośności sprężystej belki z rys. 8.



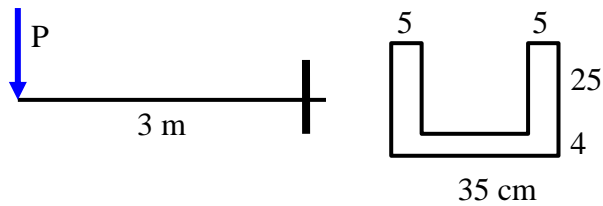
Rys. 8 Belka z obciążeniem i jej przekrój

Problem 2

Prosty pręt o średnicy 6 mm i długości 30 m został zwinięty w krąg wewnątrz bębna o średnicy wewnętrznej 1.25 m. Zakładając $E = 200 \text{ GPa}$ i $R_e = 240 \text{ MPa}$, określić (a) rozkład naprężeń normalnych w zwiniętym pręcie, (b) krzywiznę resztkową pręta po wyjęciu z bębna.

Problem 3

Wspornik obciążony jest siłą na końcu, rys. 9. Zakładając, że w utwierdzeniu osiągnięty został moment pełnego uplastycznienia przekroju, określić długość tej części wspornika, która doznała częściowego uplastycznienia.



Rys. 9 Wspornik z obciążeniem i jego przekrój poprzeczny