
Ćwiczenie 1 – statyka płaskich układów prętowych (przypomnienie)

1. Geometryczna niezmiennosc układu

Podstawowe pojęcia:

punkt:

- na płaszczyźnie posiada 2 stopnie swobody (S.S.): dwie translacje; ruch punktu opisuje wektor prędkości

tarcza:

- pręt lub układ prętów połączonych w sposób niezmienny;
- odległości między dowolnymi punktami pręta lub układu prętów nie ulegają zmianie;
- na płaszczyźnie tarcza swobodna posiada 3 stopnie swobody (SS): dwie translacje i obrót, jest to obrót wokół chwilowego środka obrotu, takiego samego dla wszystkich punktów tarczy;
- tarcza jest unieruchomiona jeżeli posiada 0 SS, t.j. np. na płaszczyźnie są odebrane dwie translacje i obrót;
- do unieruchomienia tarczy wystarczy unieruchomienie dwóch jej punktów¹

a. wewnętrzna (w oderwaniu od więzów)

rozpatrujemy jedynie sam układ prętowy, więzy (myślowo) odrzucamy; unieruchamiamy myślowo jeden z elementów i – jeżeli unieruchamia to wszystkie pozostałe elementy – układ jest wewnętrznie niezmienny

b. zewnętrzna (łącznie z więzami)

rozpatrujemy układ prętowy wraz z więzami (które najczęściej zastępujemy równoważnym im układem prętowym)

c. twierdzenie o 2 tarczach

WKW² geometrycznie niezmiennego połączenia dwóch tarcz jest połączenie ich trzema prętami, których kierunki nie przecinają się w jednym punkcie³

d. twierdzenie o 3 tarczach

WKW geometrycznie niezmiennego połączenia trzech tarcz jest połączenie ich parami (t.j. każda z każdą) dwoma prętami, kierunki których nie przecinają się w punktach leżących na jednej prostej (współliniowych)

Twierdzenia o 2 i 3 tarczach nie zawsze są rozstrzygające, t.j. nie zawsze prowadzą do końcowego wniosku

¹ pierwszy unieruchomiony punkt staje się chwilowym środkiem obrotu, drugi – odbiera możliwość tego obrotu

² warunkiem koniecznym i wystarczającym („wtedy i tylko wtedy”); twierdzenie odwrotne (jednoczesna negacja założeń i tezy) jest również prawdziwe

³ połączenie dwoma prętami o jednym wspólnym punkcie można zastąpić przegubem, i na odwrót

metoda prędkości wirtualnych

WKW geometrycznie niezmiennego połączenia układu prętów jest brak spójnego planu prędkości wirtualnych.

Metoda prędkości wirtualnych jest zawsze rozstrzygająca, choć zwykle nie najprostsza (dlatego zazwyczaj staramy się użyć jednego z twierdzeń o tarczach).

- e. zadania analizowane statycznie: geometrycznie wewnątrznie niezmiennie i zmienne **obliczenia statyczna mogą być prowadzone jedynie dla układów geometrycznie (zewnątrznie) niezmiennych**
- układy zmienne geometrycznie (czyli np. mechanizmy) obliczane są metodami dynamiki (z użyciem sił d'Alemberta⁴)
- geometryczna niezmiennosc wewnętrzna może być zachowana albo nie: ma to wpływ na obliczanie reakcji układu: reakcje układów niezmiennych wewnątrznie obliczamy zwykłą drogą (jedynie z równań równowagi) a dla układów zmiennych wewnątrznie niezbędne są dodatkowe równania (np. tzw. równania przegubów⁵)
2. Założenia do obliczeń statycznych
- a. zasada zeszczywnienia
pomijamy wpływ deformacji układu na wielkości statyczne, które określamy w konfiguracji pierwotnej⁶; w wyniku tego kształt samego układu prętowego nie ma znaczenia – istotne są jedynie obciążenia, podpory i ew. przeguby
- b. zasada superpozycji
rozwiązanie⁷ dla układu obciążeń jest sumą rozwiązań od każdego z obciążeń z osobna
3. Obliczanie reakcji – postaci układów równań równowagi, rozprężnięta postać równań
- a. równania układu przestrzennego ($\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = \Sigma M_x = \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0$)
- b. równanie układu płaskiego (3 formy)

$$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0; \Sigma M_C = 0^8$$

$$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0; \Sigma L = 0^9$$

$$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma M_A = 0$$

- c. szczególne przypadki układu płaskiego sił
- i. układ zbieżny (tylko dwa równania: $\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0$)
- ii. układ równoległy (tylko dwa równania: $\Sigma M_A = 0; \Sigma L = 0^{10}$)
4. Siły wewnętrzne a siły przekrojowe
- a. układ własny przekroju

początek układu pokrywa się z centroidem przekroju poprzecznego, pierwsza oś zgodna z normalną zewnętrzną przekroju, dwie pozostałe są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju

⁴ sił masowych

⁵ równanie przegubu stanowi, że moment w przegubie od wszystkich sił jest równy zero

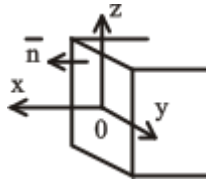
⁶ nieodkształconej

⁷ dotyczy to zarówno reakcji układu jak i sił przekrojowych

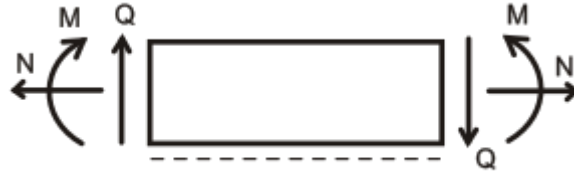
⁸ punkty A, B, C nie są współliniowe

⁹ oś L nie jest prostopadła do odcinka AB

¹⁰ oś L nie jest prostopadła do sił



b. definicja i znakowanie sił przekrojowych

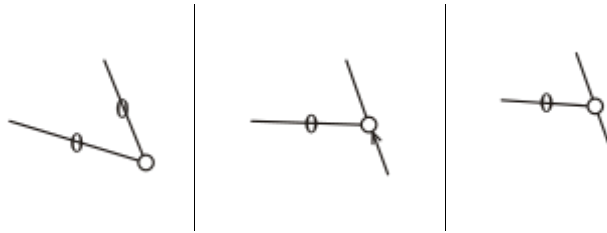


c. wykresy sił przekrojowych

momenty po stronie włókien rozciąganych, znak nieistotny; siły poprzeczne i podłużne ze znakiem (por. wykresy z programu *statykawin.exe*)

5. Kratownice (układ prętów prostych, połączonych przegubowo, obciążony siłami skupionymi w przegubach)

- siła podłużna w pręcie kratownicowym jest stała; znak jej jest niezwykle istotny (milcząco zakłada się że „+” oznacza rozciąganie a „-” ściskanie)
- twierdzenia o prętach zerowych



c. metoda analitycznego równoważenia węzłów

zastosowanie równań równowagi dla zbieżnego układu sił w przegubie o dwu niewiadomych siłach

d. metoda Rittera

zastosowanie równań równowagi¹¹ dla przekroju z trzema niewiadomymi

e. metoda wymiany prętów (Henneberga)

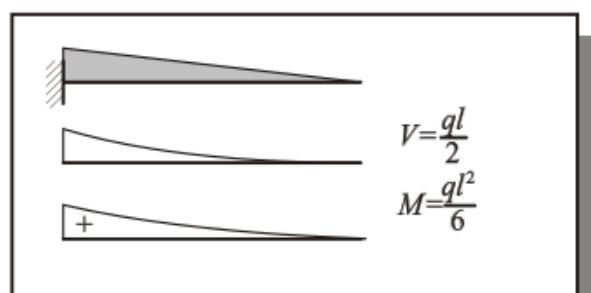
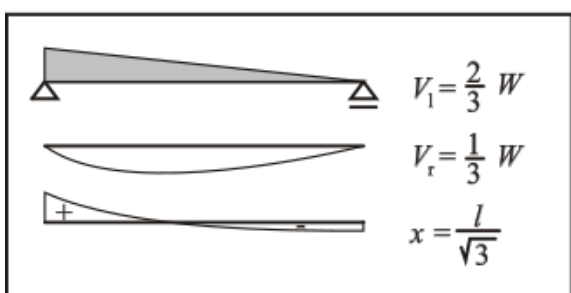
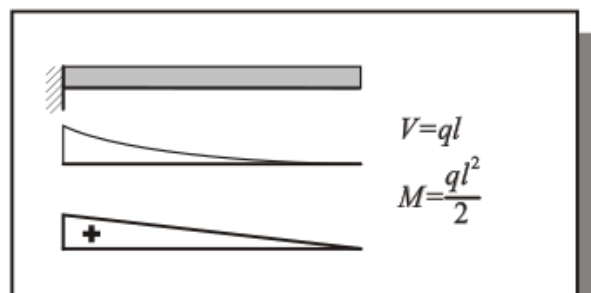
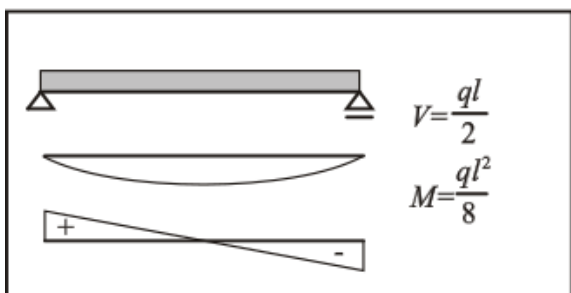
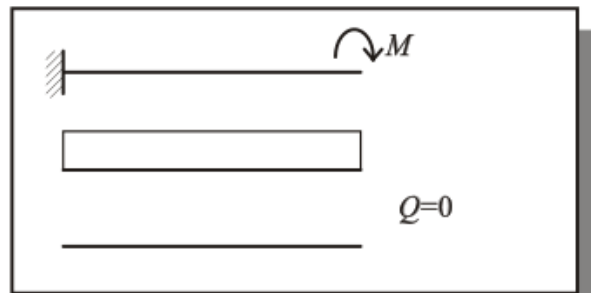
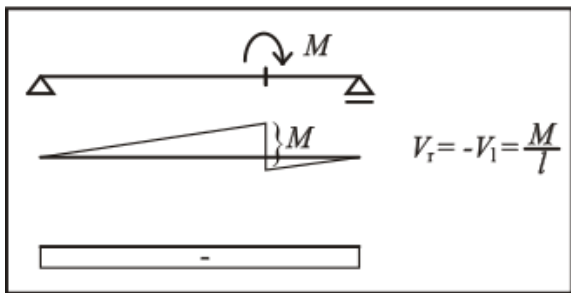
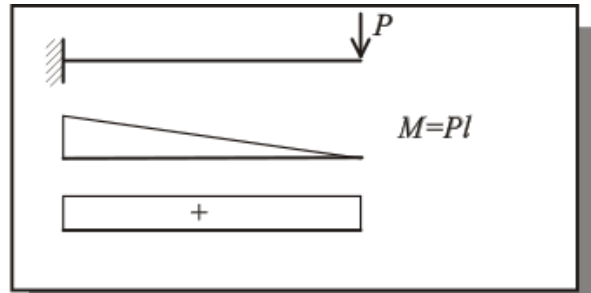
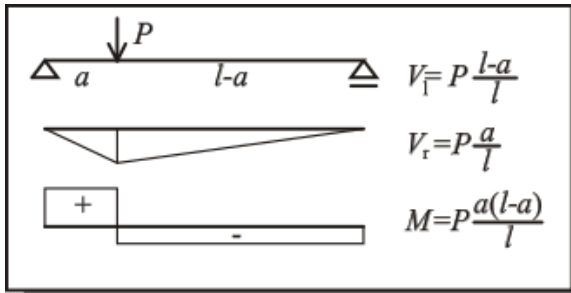
jeden z prętów zastępuje się odpowiadającymi mu siłami a dodatkowy (zerowy) pręt zapewnia geometryczną niezmienną układu

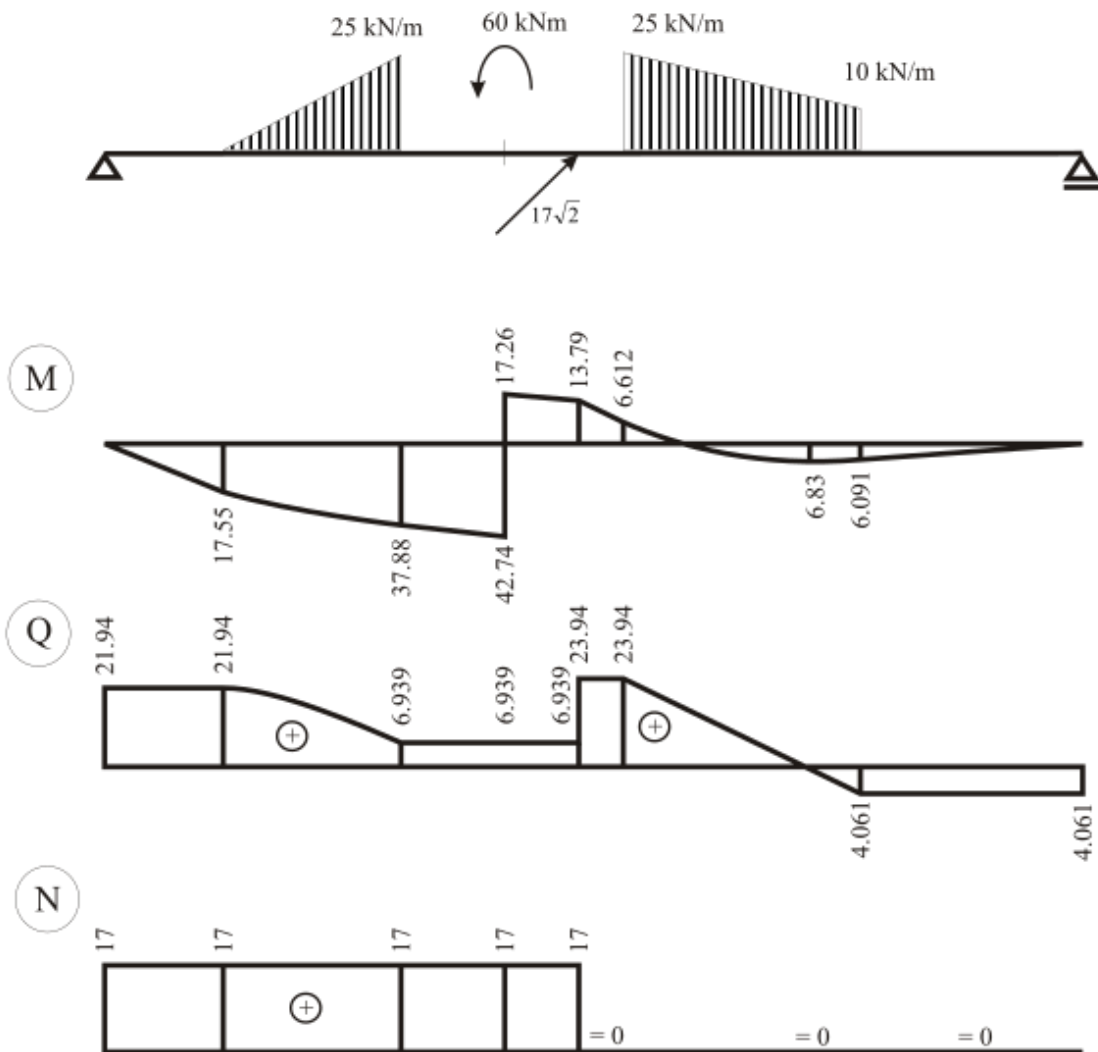
f. zasada prac wirtualnych

praca sił na przemieszczeniach wirtualnych równa jest zeru

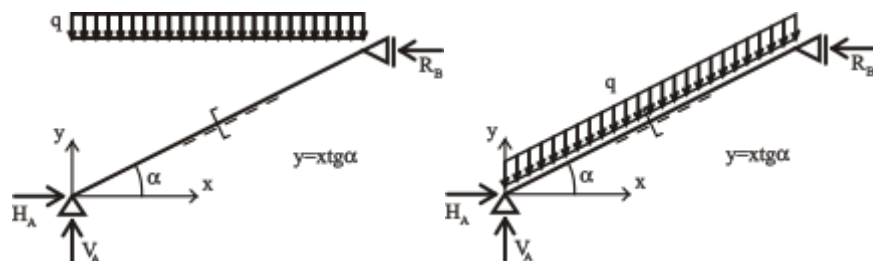
¹¹ najlepiej gdy układ równań jest rozprężnięty

6. Belki:
a. proste

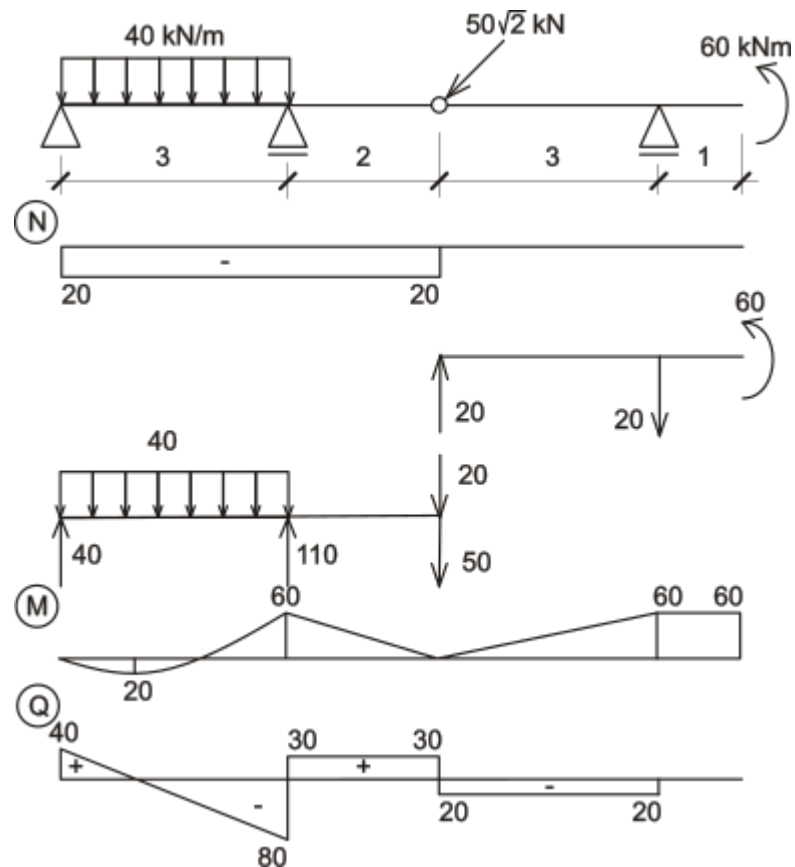




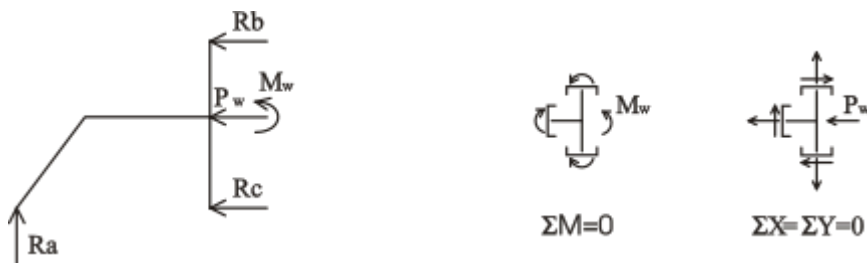
- b. ukośne
intensywność obciążeń ciągłych może być definiowana w rzucie albo na metr bieżący



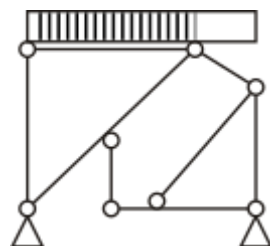
- c. przegubowe (gerberowskie)
konstruuje się schemat zastępczy uwidaczniający hierarchię belek (rozwiązanie zaczyna się od belek „górných”, schodząc stopniowo „w dół”)



7. Ramy (sztywne połączenia prętów prostych, dodatkowa weryfikacja równowagi węzła)



8. Łuki kołowe i niekołowe (nie obowiązują na 1 stopniu studiów niestacjonarnych)
 9. Układy złożone – pręty kratowe i belkowe (zginane)
 a. geometrycznie wewnątrznie zmienne
 b. geometrycznie wewnątrznie zmienne
 i. analogiczne do układów 3-przegubowych
 ii. inne

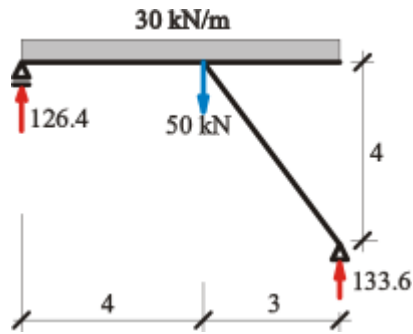


Zadania

1. Narysować wykresy sił przekrojowych dla belki jak na rysunku (przyjąć wymiary i wartości obciążeń)



2. Narysować wykresy sił przekrojowych ramy. Sprawdzić równowagę węzła.



3. Określić siły w prętach kratownicowych i narysować wykresy sił przekrojowych w elementach belkowych dla układu jak poniżej. Przyjąć niezbędne dane (wymiary, wartości obciążeń)

