

Charakterystyki geometryczne przekroju

Definicje

pole przekroju jest skalarem¹

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A dA, \quad [m^2]$$

momenty statyczne (względem osi y i z)²

$$S_y \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A z dA, \quad S_z \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A y dA, \quad [m^3]$$

współrzędne centroidu³

$$C(y_c, z_c): \quad y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A}$$

osie centralne to osie przechodzące przez centroid

momenty bezwładności względem osi y, z oraz moment dewiacji⁴

$$I_y \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A z^2 dA, \quad I_z \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A y^2 dA, \quad I_{yz} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A yz dA, \quad [m^4]$$

centralne momenty bezwładności to momenty obliczane względem osi centralnych
macierz momentów bezwładności

$$\begin{bmatrix} I_{y_c} & I_{y_c z_c} \\ I_{y_c z_c} & I_{z_c} \end{bmatrix}$$

tensor momentów bezwładności⁵

$$\begin{bmatrix} I_{y_c} & -I_{y_c z_c} \\ -I_{y_c z_c} & I_{z_c} \end{bmatrix}$$

główne centralne momenty bezwładności – momenty względem osi głównych centralnych oraz kąt obrotu układu do kierunków głównych⁶

$$I_y = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2}, \quad I_z = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2}, \quad \tan \alpha = \frac{I_y - I_{y_c}}{-I_{y_c z_c}}$$

w osiach głównych macierz tensora bezwładności przyjmuje postać diagonalną

$$\begin{bmatrix} I_{y_c} & -I_{y_c z_c} \\ -I_{y_c z_c} & I_{z_c} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_y & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}$$

główne centralne promienie bezwładności

$$i_y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad [m]$$

¹ czyli tensorem zerowego rzędu i jest niezmiennicze względem transformacji układu współrzędnych (zarówno przez obrót jak i translację)

² wszystkie dolne indeksy oznaczają względem jakiej osi dana wielkość jest obliczana

³ inaczej: środek masy, środek geometryczny, środek ciężkości

⁴ zbieżności, odśrodkowy

⁵ jak powyżej, ale moment dewiacji ze znakiem przeciwnym

⁶ wzór wynika z pierwszego równania zagadnienia wartości własnych; inny wzór wynika z drugiego równania i daje takie same wyniki; wzoru na $\tan 2\alpha$ występującego w starszych podręcznikach nie zaleca się stosować

elipsa bezwładności – elipsa o półosiach równych promieniom bezwładności
biegunowy moment bezwładności

$$I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A r^2 dA, \quad [m^4]$$

Zasada superpozycji

Z addytywności podwójnych całek wynika, że każda z nich może być obliczana jako suma całek po podobszarach. Oznacza to, że przekrój można podzielić na prostsze figury geometryczne a końcowy rezultat będzie sumą wyników całkowania po podobszarach.

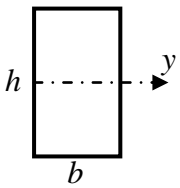
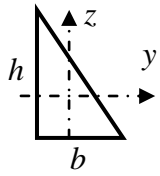
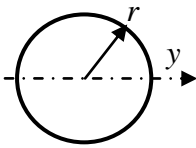
Twierdzenie Steinera (o osiach równoległych)

Jeśli znane są moment statyczny i moment bezwładności względem osi centralnej, to ich wartości względem osi równoległej do centralnej, znajdującej się w odległości d , dane są wzorami:

$$S_i = S_c + A \cdot d, \quad I_i = I_c + A \cdot d^2$$

(obie wartości względem osi nie-centralnej są zawsze większe)

Wzory do zapamiętania

figura	rysunek	pole	moment bezwładności
prostokąt		bh	$I_y = \frac{bh^3}{12}$
trójkąt prostokątny		$\frac{1}{2}bh$	$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$
koło		πr^2	$I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_0 = \frac{\pi r^4}{2}$

Wnioski z rachunku tensorowego

Główne momenty bezwładności są ekstremalne (jeden maksymalny i jeden minimalny).

Kierunki główne są do siebie prostopadłe.

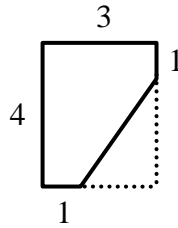
Oś symetrii przekroju jest osią główną centralną. Druga oś, prostopadła do niej, przechodzi przez centroid.

Wskazówka: obliczenia charakterystyk geometrycznych przekroju symetrycznego są znacznie prostsze, gdyż można obliczać wprost momenty główne.

Jeśli przekrój pręta ma więcej niż dwie osie symetrii to każda oś centralna jest także główną, czyli każdy centralny moment bezwładności jest jednocześnie głównym centralnym momentem bezwładności.

Przykład nr 1

Określić charakterystyki geometryczne przekroju na rys. poniżej.



Rys. 1. Przekrój do przykładu 1

Rozwiązanie

(obliczenia są wykonywane dla prostokąta “minus” trójkąt)
pole przekroju:

$$A = 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 9 \text{ cm}^2$$

centroid:

$$y_c = \frac{12 \cdot 1.5 - 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2\right)}{9} = 1.222 \text{ cm}$$

$$z_c = \frac{12 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3}{9} = 2.333 \text{ cm}$$

centralne momenty bezwładności:

$$J_{y_c} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} + 12 \cdot (2 - 2.333)^2 - \frac{2 \cdot 3^3}{36} - 3 \cdot (1 - 2.333)^2 = 10.5 \text{ cm}^4$$

$$J_{z_c} = \frac{3^3 \cdot 4}{12} + 12 \cdot (1.5 - 1.222)^2 - \frac{2^3 \cdot 3}{36} - 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2 - 1.222\right)^2 = 5.556 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_c z_c} = 0 + 12 \cdot (2 - 2.333) \cdot (1.5 - 1.222) - \frac{2^2 \cdot 3^2}{72} - 3 \cdot (1 - 2.333) \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2 - 1.222\right) = 2.833 \text{ cm}^4$$

główne centralne momenty bezwładności i kierunki główne

$$J_y = \frac{10.5 + 5.556}{2} + \sqrt{\left(\frac{10.5 - 5.556}{2}\right)^2 + 2.833^2} = 11.79 \text{ cm}^4$$

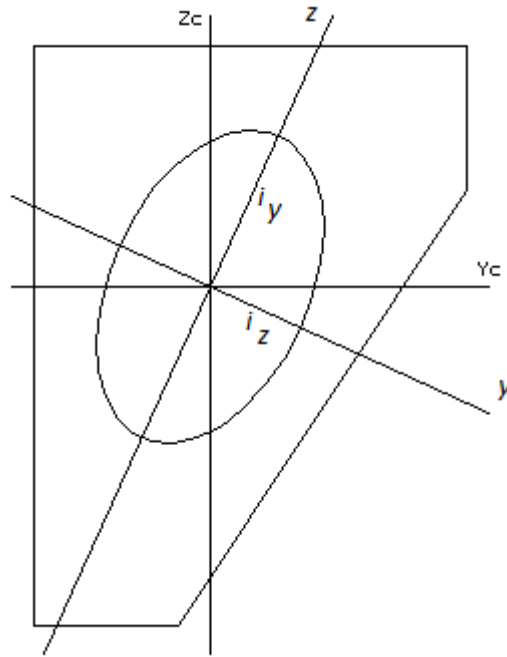
$$J_z = \frac{10.5 + 5.556}{2} - \sqrt{\left(\frac{10.5 - 5.556}{2}\right)^2 + 2.833^2} = 4.27 \text{ cm}^4$$

$$\tan \alpha = \frac{11.79 - 10.5}{-2.833} = -0.4553 \rightarrow \alpha = -0.4273 \text{ } (-24.48^\circ)$$

główne centralne promienie bezwładności:

$$i_y = \sqrt{\frac{11.79}{9}} = 1.14 \text{ cm}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{4.27}{9}} = 0.69 \text{ cm}$$

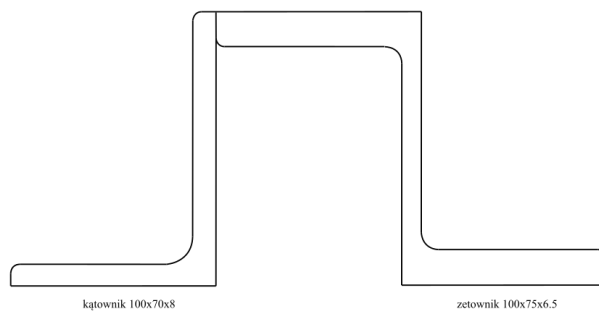


Rys. 2 Elipsa bezwładności przekroju

Promień bezwładności i_y (względem osi y) odkładany jest na osi z , a i_z – na osi y .

Przykład 2

Określić charakterystyki geometryczne przekroju złożonego z kątownika nierównoramiennego L 100x70x8 i zetownika Z100, jak na rys. poniżej.



Rys. 3. Przekrój z profili walcowanych

Dane z tablic profili walcowanych⁷

Kątownik nierównoramienny L 100 x 75 x 8

pole przekroju 13.5 cm^2

położenie centroidu (mimośrod): $e_x = 3.11 \text{ cm}$, $e_y = 1.88 \text{ cm}$

centralne momenty bezwładności: $I_x = 135 \text{ cm}^4$, $I_y = 65 \text{ cm}^4$, $I_{xy} = 54.5 \text{ cm}^4$

Zetownik Z 100 x 75 x 6.5

pole przekroju: 15.56 cm^2

centralne momenty bezwładności: $I_x = 251.7 \text{ cm}^4$, $I_y = 158.3 \text{ cm}^4$, $I_{xy} = -155 \text{ cm}^4$

Rozwiązanie

pole przekroju: $A = 13.5 + 15.56 = 29.06 \text{ cm}^2$

⁷ w tablicach zwykle stosowane są osie x i y

położenie centroidu⁸:

$$y_c = \frac{13.5 \cdot 5.62 + 15.56 \cdot (7.175 + 7.5)}{29.06} = 10.47 \text{ cm}$$

$$z_c = \frac{13.5 \cdot 3.11 + 15.56 \cdot 5}{29.06} = 4.12 \text{ cm}$$

centralne momenty bezwładności:

$$I_{y_c} = 135 + 13.5 \cdot (3.11 - 4.12)^2 + 251.7 + 15.56 \cdot (5 - 4.12)^2 = 412.5 \text{ cm}^4$$

$$I_{z_c} = 65 + 13.5 \cdot (7.5 - 1.88 - 10.47)^2 + 158.3 + 15.56 \cdot (7.5 + 0.5 \cdot 14.35 - 10.47)^2 = 816.0 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_c z_c} = 54.5 + 13.5 \cdot (3.11 - 4.12) \cdot (7.5 - 1.88 - 10.47) - 155 + 15.56 \cdot (5 - 4.12) \cdot (7.5 + 0.5 \cdot 14.35 - 10.47) = 23.2 \text{ cm}^4$$

główne centralne momenty bezwładności:

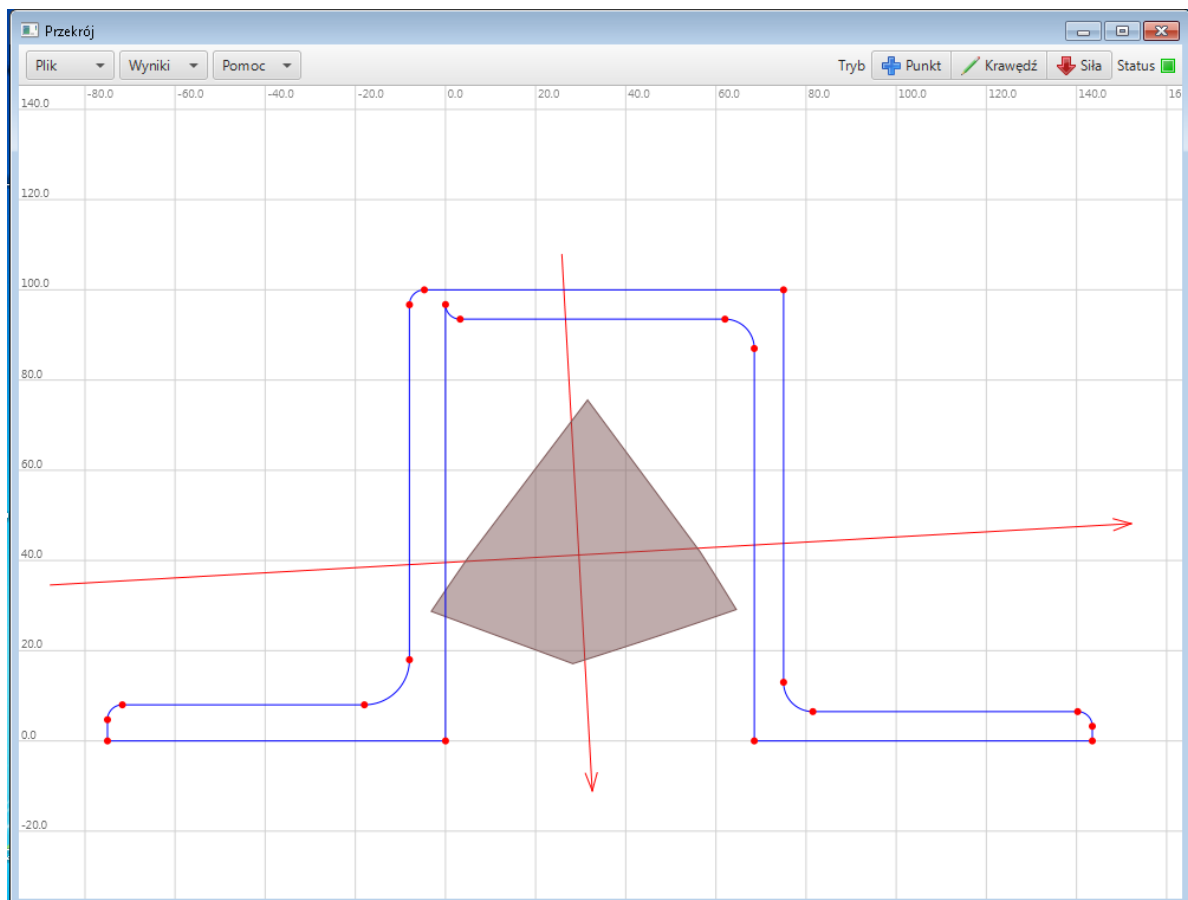
$$I_y = \frac{412.5 + 816}{2} + \sqrt{\left(\frac{412.5 - 816}{2}\right)^2 + 23.2^2} = 817.3 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{412.5 + 816}{2} - \sqrt{\left(\frac{412.5 - 816}{2}\right)^2 + 23.2^2} = 411.2 \text{ cm}^4$$

kierunki główne:

$$\tan \alpha = \frac{817.3 - 412.5}{-23.2} = -17.44 \rightarrow \alpha = -1.514 \text{ rd} (= -86.7^\circ)$$

Sprawdzenie rozwiązania programem „section”⁹:



Rys. 4. Zrzut ekranu z programu section.java

⁸ przyjęto taki obliczeniowy układ współrzędnych, że cały przekrój znalazł się w 1 ćwiartce

⁹ © Paweł Tomasz Zaborski 2015, licencja freeware

Pole powierzchni: 2906.9

Środek ciężkości¹⁰: (29.596, 41.219)

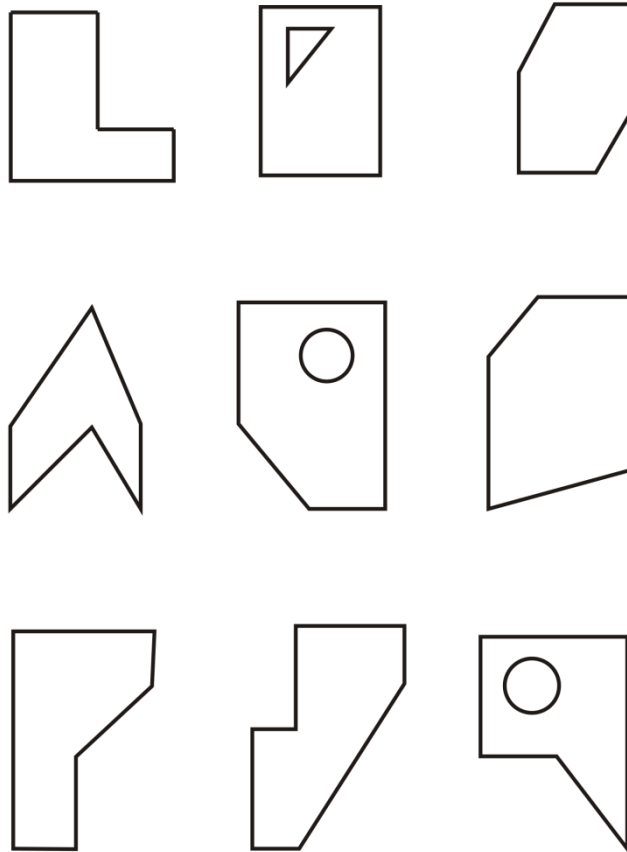
Centralne momenty bezwładności: $I_y=4.1179e+06$, $I_z=8.1646e+06$, $I_{yz}=230347.3$

Główne centralne momenty bezwładności: $I_1=8.1777e+06$, $I_2=4.1048e+06$

Kąt głównych centralnych momentów bezwładności: -1.5141 rad, -86.753°

ZADANIA

Wymagana jest umiejętność obliczania charakterystyk geometrycznych przekroju typu “prostokąt – trójkąt – koło”, jak poniżej.



Rys. 5. Problemy kontrolne

¹⁰ środek układu w narożu kątownika