Rozciąganie – część 1

Wzory praktyczne dla prostych prętów pryzmatycznych z siłą podłużną

Stan naprężenia jest jednoosiowy i jednorodny:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

gdzie N – siła podłużna , A – pole przekroju poprzecznego. Stan odkształcenia jest trójosiowy i jednorodny:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

Wydłużenie pręta oblicza się:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Oddziaływania nie-mechaniczne – temperatura

Zmiana temperatury generuje stan naprężenia (naprężenia termiczne) jedynie dla statycznie niewyznaczalnych układów. Zmiany odkształcenia i wydłużenie zależą od współczynnika liniowej rozszerzalności cieplnej, α:

$$\varepsilon_x = \alpha\Delta t, \quad \Delta l = \alpha l \Delta t$$

Stany graniczne

Przepisy Eurokodów odnoszą się do stanów granicznych. Są dwa główne stany graniczne: stan graniczny nośności i stan graniczny użytkowania (użytkowalności). Pierwszy z nich odnosi się do bezpieczeństwa pracy konstrukcji. Drugi – zawiera wiele wskazań i zaleceń dotyczących sztywności, trwałości i temu podobnych. W kursie wytrzymałości, dla uproszczenia, odnosimy się jedynie do wymagań na sztywność konstrukcji.

Stan graniczny nośności

$$\max \sigma_x < R$$

gdzie R jest wytrzymałością obliczeniową materiału (wprost z odpowiedniego Eurokodu lub z doświadczeń dla nietypowych materiałów).

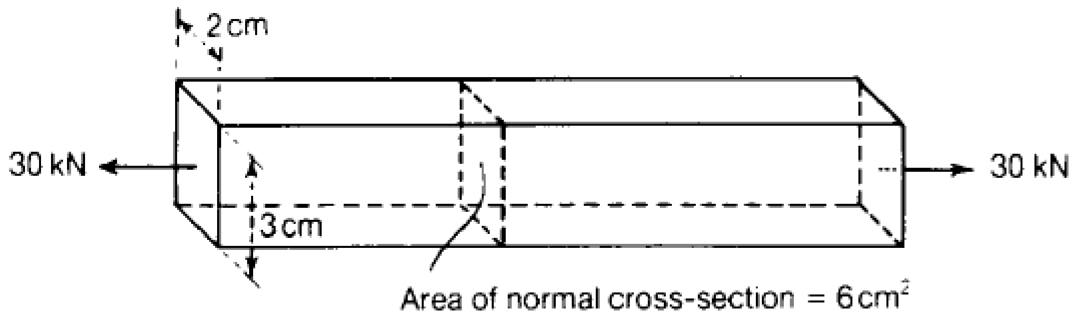
Stan graniczny użytkowania

$$\Delta l < \Delta l_{dop}; \quad \varepsilon < \varepsilon_{dop}$$

Przykłady

Przykład 1

Pręt stalowy o przekroju prostokątnym, 3 cm na 2 cm, obciążony jest siłą osiową 30 kN. Określić naprężenie normalne w przekroju poprzecznym.



Rys. 3.1. Pręt obciążony siłą osiową

Rozwiązanie

Powierzchnia przekroju pręta:

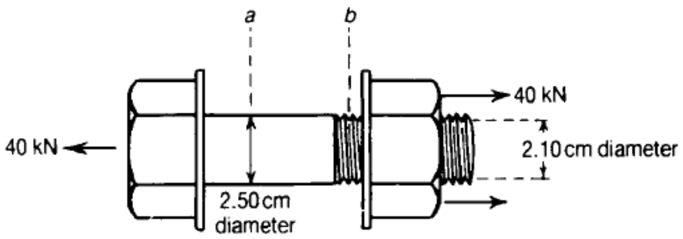
$$A = 0.03 \cdot 0.02 = 0.6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

Naprężenie normalne w przekroju poprzecznym wynosi:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{0.6 \cdot 10^{-3}} = 50\ \mathrm{MPa}$$

Przykład 2

Śruba stalowa o średnicy 25 mm przenosi obciążenie 40 kN. Określić naprężenie normalne w przekroju a i w części gwintowanej b, jeśli średnica podziałowa śruby wynosi 21 mm.



Rys. 3.2 Śruba stalowa

Rozwiązanie

Powierzchnia przekroju poprzecznego w przekroju a i b wynosi:

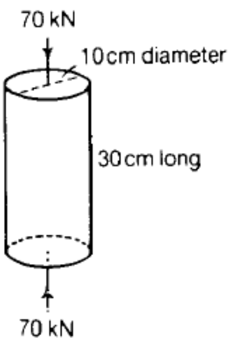
$$A_a = \frac{\pi}{4}(0.025)^2 = 0.491 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2, \quad A_b = \frac{\pi}{4}(0.021)^2 = 0.346 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

Naprężenie normalne w tych przekrojach wynosi

$$\sigma_a = \frac{N}{A_a} = \frac{40 \cdot 10^3}{0.491 \cdot 10^{-3}} = 81.4\ \mathrm{MPa}, \quad \sigma_b = \frac{N}{A_b} = \frac{40 \cdot 10^3}{0.346 \cdot 10^{-3}} = 115.6\ \mathrm{MPa}$$

Przykład 3

Cylindryczny blok długości 300 mm i przekroju kołowym o średnicy 100 mm obciążony jest siłą osiową 70 kN**,** w wyniku czego jego długość zmalała **o** 0.2 mm. Określić naprężenie normalne i odkształcenie liniowe w przekroju poprzecznym.



Rys. 3.3 Cylinder z obciążeniem

Rozwiązanie

Pole przekroju poprzecznego wynosi

$$A = \frac{\pi}{4}(0.10)^2 = 7.85 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

Naprężenie normalne ściskające wynosi

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{70 \cdot 10^3}{7.85 \cdot 10^{-3}} = 8.92\ \mathrm{MPa}$$

a odkształcenie liniowe po długości pręta

$$\varepsilon = \frac{0.02 \cdot 10^{-2}}{30 \cdot 10^{-2}} = 0.67 \cdot 10^{-3}$$

Przykład 4

W trakcie testu rozciągania pręta z miękkiej stali o średnicy 20 mm zaobserwowano płynięcie plastyczne przy sile 80 kN. Maksymalna osiągnięta siła wyniosła 150 kN, a zerwanie nastąpiło pod obciążeniem 70 kN. Określić:

- granicę plastyczności;
- wytrzymałość na rozciąganie;
- naprężenie przy zerwaniu jeśli średnica szyjki wyniosła 10 mm.

Rozwiązanie

Pierwotny przekrój pręta wynosił

$$A_0 = \frac{\pi}{4}(0.020)^2 = 0.314 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

granica plastyczności wyniosła

$$\sigma_Y = \frac{N_Y}{A_0} = \frac{80 \cdot 10^3}{0.314 \cdot 10^{-3}} = 254\ \mathrm{MPa}$$

gdzie N_Y = siła przy której nastąpiło płynięcie plastyczne

Wytrzymałość na rozciąganie (nominalne) przy maksymalnej sile

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_0} = \frac{150 \cdot 10^3}{0.314 \cdot 10^{-3}} = 477 \text{ MPa}$$

Przekrój w szyjce przy zerwaniu

$$A_f = \frac{\pi}{4}(0.010)^2 = 0.0785 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

a naprężenie przy zerwaniu

$$\sigma_f = \frac{N_f}{A_f} = \frac{70 \cdot 10^3}{0.0785 \cdot 10^{-3}} = 892 \text{ MPa}$$

gdzie N_f = końcowe obciążenie przy zerwaniu.

Przykład 5

Pręt o przekroju kołowym średnicy 25 mm i długości 1 m poddano osiowej sile rozciągającej 20 kN. Określić wydłużenie pręta, zakładając zakres sprężysty pracy pręta o module Younga E = 70 GPa.

Rozwiązanie

Pole przekroju pręta wynosi

$$A = \frac{\pi}{4}(0.025)^2 = 0.491 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

naprężenie normalne

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{0.491 \cdot 10^{-3}} = 40.7 \text{ MPa}$$

Odkształcenie liniowe po długości pręta wynosi:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{40.7 \cdot 10^6}{70 \cdot 10^9} = 0.582 \cdot 10^{-3}$$

a wydłużenie pręta

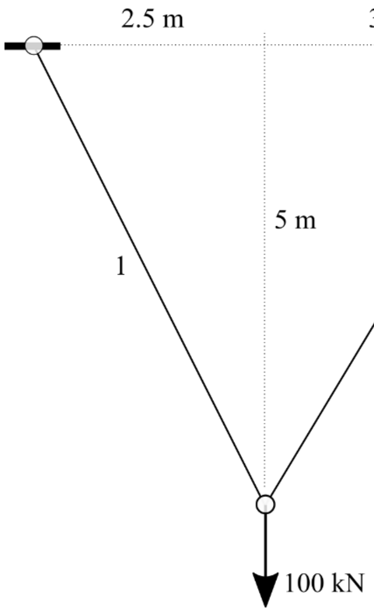
$$\Delta l = \varepsilon l = 0{,}582 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 0{,}582 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.582 \text{ mm}$$

Przykład 6

Dwie kratownice o identycznej geometrii i wykonane z tego samego materiału obciążono:

a) siłą 100 kN (por. rys. poniżej)
b) zmianą temperatury o 45°C.

Określić przemieszczenie dolnego węzła w obu przypadkach, przyjmując E = 210 GPa, pole przekroju prętów A = 50 mm^2 a współczynnik rozszerzalności cieplnej $14.5 \cdot 10^{-6}$ 1/C.



Rys. 3.4 Kratownica pod obciążeniem

Rozwiązanie

a)

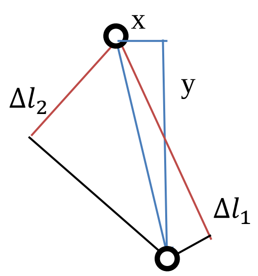
Z warunków równowagi węzła mamy: $N_1 = 60.98$ kN, $N_2 = 53.01$ kN.

Wydłużenia prętów wynoszą

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{60.98 \cdot 10^3 \cdot 5.590}{210 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 3.247 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 3.247\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{53.01 \cdot 10^3 \cdot 5.831}{210 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 2.944 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 2.944\ \mathrm{mm}$$

Jest to zadanie o 2 stopniach swobody (dwie translacje: pozioma i pionowa).



Rys. 3.5 Plan przemieszczeń wirtualnych

Dokonując rzutowania parametrów *x* oraz *y* na kierunki Δl_1 oraz Δl_2

$$\overrightarrow{e_1}(0.4472, -0.8944), \quad \overrightarrow{e_2}(-0.5145, -0.8575)$$

$$\overrightarrow{e_x}(1, 0), \quad \overrightarrow{e_y}(0, -1)$$

oraz

$$\Delta l_1 = x \cdot \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_1}, \;\; \Delta l_2 = x \cdot \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_2} + y \cdot \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_2}$$

jest więc

$$0.4472x + 0.8944y = 3.242 \cdot 10^{-3}$$

$$-0.5145x + 0.8575y = 2.944 \cdot 10^{-3}$$

z rozwiązaniem

$$x = 1.74 \cdot 10^{-4}, y = 3.54 \cdot 10^{-3}$$

b)

Wydłużenia prętów wynoszą

$$\Delta l_1 = \alpha l_1 \Delta t = 14.5 \cdot 10^{-6} \cdot 5.59 \cdot 45 = 3.647 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 3.647\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta l_2 = \alpha l_2 \Delta t = 14.5 \cdot 10^{-6} \cdot 5.831 \cdot 45 = 3.805 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 3.805\ \mathrm{mm}$$

Układ równań, analogiczny do tego z poprzedniego przypadku, wyraża się

$$0.4472x + 0.8944y = 3.647 \cdot 10^{-3}$$

$$-0.5145x + 0.8575y = 3.805 \cdot 10^{-3}$$

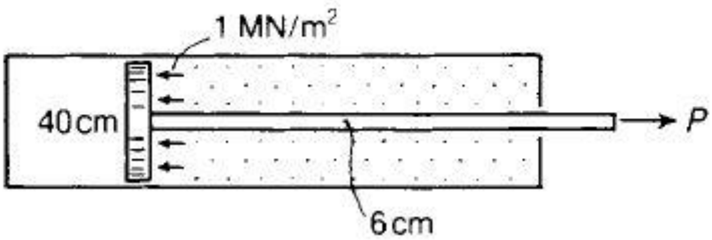
a rozwiązaniem są wartości

$$x = -3.27 \cdot 10^{-4}, \;\; y = 4.24 \cdot 10^{-3}.$$

Problemy do samodzielnego rozwiązania

Problem 1

Tłok siłownika hydraulicznego ma średnicę 400 mm a tłoczysko 60 mm średnicy. Ciśnienie wody wynosi 1 MN/m^2. Określić naprężenie w tłoczysku i jego wydłużenie na długości 1 m, przyjmując E = 200 GPa.

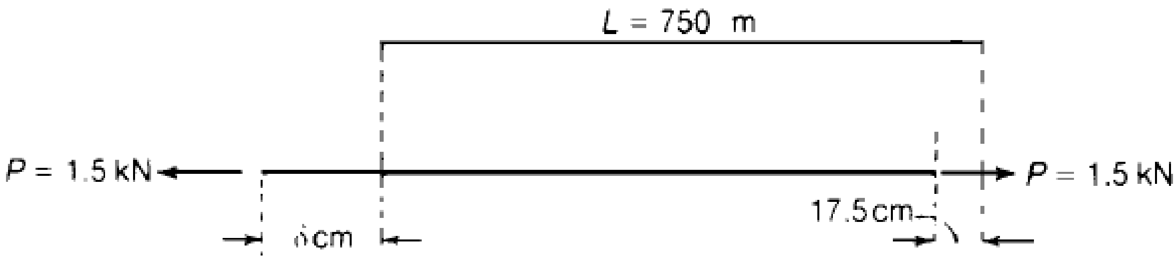


Rys. 3.6 Siłownik hydrauliczny

Odp.: $\sigma = 43.5$ MPa, $\Delta l = 0.218$ mm

Problem 2

Stalowy pręt sygnalizatora kolejowego ma długość 750 m i 5 mm średnicy. Zakładając siłe w pręcie 1.5 kN, określić niezbędne przesunięcie na końcu w nastawni, jeśli przemieszczenie wymagane na końcu sygnałowym powinno wynosić 175 mm. Przyjąć moduł Younga 200 GPa.

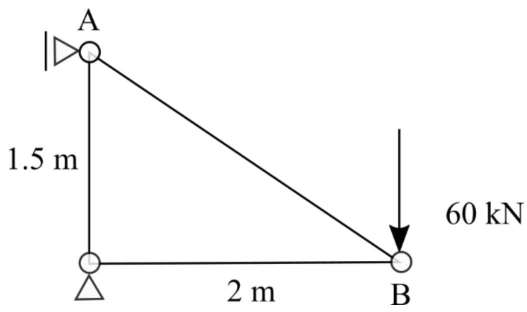


Rys. 3.7 Pręt sygnalizatora kolejowego

Odp. $\delta = 46.2$ cm

Problem 3

Określić niezbędny przekrój pręta AB jeśli wytrzymałość obliczeniowa wynosi R = 250 MPa.

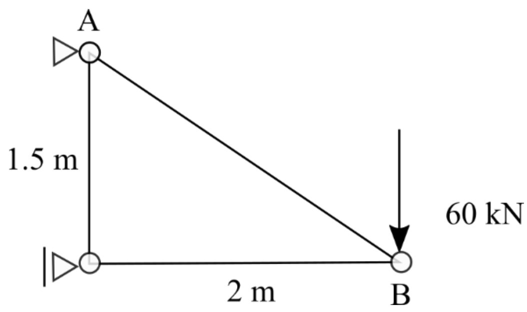


Rys. 3.8 Kratownica pod obciążeniem

Odp. $A = 4\ \text{cm}^2$.

Problem 4

Określić przemieszczenie pionowe i poziome węzła B. Przyjąć E = 210 GPa i przekrój poprzeczny prętów $A = 4\ \text{cm}^2$.



Rys. 3.9 Kratownica pod obciążeniem

Odp. $\delta(1.9, 7.5)$ mm (w lewo w dół).

Rozciąganie – część 2

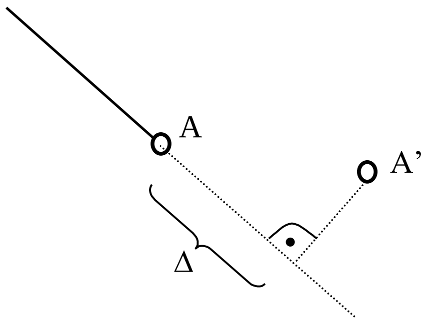
Układy statycznie niewyznaczalne

W przypadku kiedy równania statyki nie wystarczają do wyznaczenia sił przekrojowych, należy wykorzystać pełny zestaw równań dla problemu brzegowego:

- równania statyki (← równania Naviera + statyczne warunki brzegowe)
- równania zgodności (geometryczne, ciągłości) (← równania Cauchy'ego + kinematyczne warunki brzegowe)
- równania konstytutywne (fizyczne) (← równania Hooke'a, rozszerzalności termicznej i t.p.)

Zlinearyzowana geometria układu

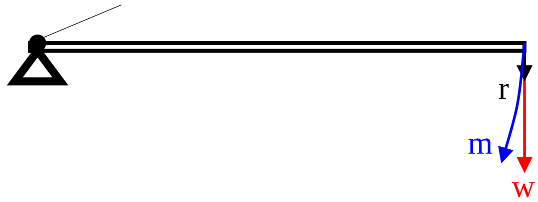
Zakładamy, że długości prętów ulegają zmianie ale kąty nie zmieniają się (ich zmiany są pomijalnie małe). Oznacza to, że zmiana długości pręta jest odcinkiem wyznaczonym przez dwa punkty: rzut aktualnego położenia końca pręta na pierwotny kierunek pręta i sam koniec pręta, por. rys. poniżej.



Rys. 3.10 Wydłużenie pręta

Jak wiadomo z kursu mechaniki teoretycznej, rozróżniamy trzy typy przemieszczenia, rys. 3.11:

– rzeczywiste ("prawdziwe", "aktualne", obserwowane),
– możliwe (t.j. takie które wynikają z nałożonych więzów)
– wirtualne (równoległe do kierunków prędkości wirtualnych)[1].



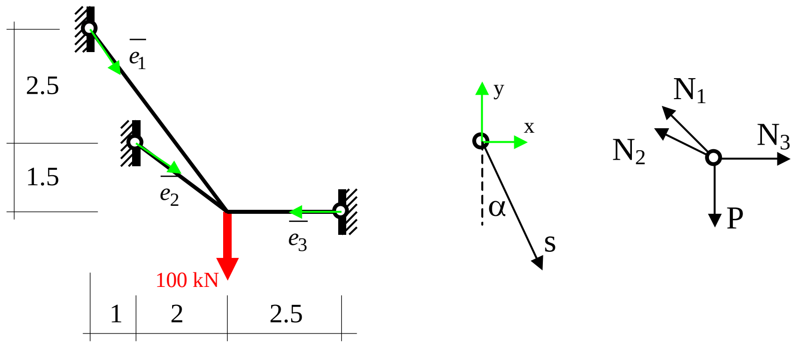
Rys. 3.11 Przemieszczenia

[1] w tym ostatnim przypadku oznacza to, że mogą być to wielkości skończone (niekoniecznie nieskończenie małe)

Przykłady problemów statycznie niewyznaczalnych

Przykład 1

Określić siły w układzie prętowym, jak na rys. poniżej.



Rys. 3.12 Układ prętów, przemieszczenia i siły

Rozwiązanie:

Mamy:

$$\mathbf{s} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$$

$$\mathbf{e_1} = (0.6, -0.8), \quad \mathbf{e_2} = (0.8, -0.6), \quad \mathbf{e_3} = (-1, 0)$$

skąd:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{s} = 0.6s \cdot \sin\alpha + 0.8s \cdot \cos\alpha, \\
\Delta_2 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{s} = 0.8s \cdot \sin\alpha + 0.6s \cdot \cos\alpha, \\
\Delta_3 &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{s} = -s \cdot \sin\alpha,
\end{aligned}$$

Eliminując:

$$s \cdot \sin\alpha = -\Delta_3, \quad s \cdot \cos\alpha = \frac{\Delta_2 + 0.8\Delta_3}{0.6}$$

mamy:

$$3\Delta_1 - 4\Delta_2 - 1.4\Delta_3 = 0 \tag{1*}$$

Zakładając $EA = \text{idem}$ oraz podstawiając związki Hooke'a, zamieniamy niewiadome kinematyczne w równaniu (1*) na niewiadome statyczne:

$$15N_1 - 10N_2 - 3.5N_3 = 0 \tag{1}$$

Mamy ponadto dwa równania statyki (równowagi węzła):

$$-0.6N_1 - 0.8N_2 + N_3 = 0 \tag{2}$$

$$0.8N_1 + 0.6N_2 - P = 0 \tag{3}$$

które wraz z równaniem (1) tworzą układ 3 równań z 3 niewiadomymi. Rozwiązaniem układu są siły:

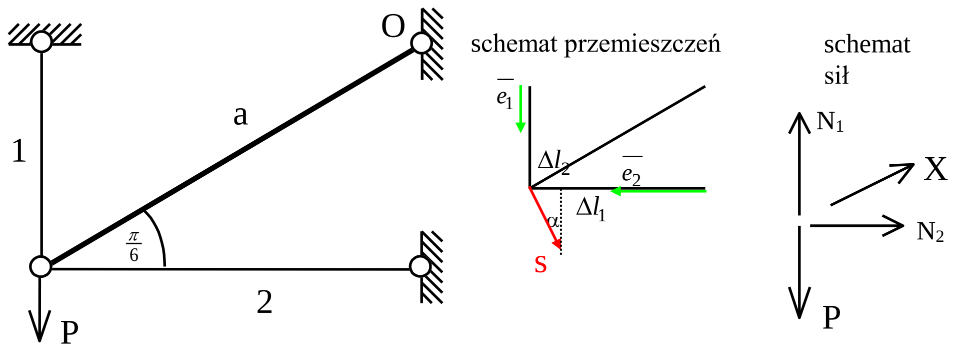
$$N_1 = 0.712P, \quad N_2 = 0.717P, \quad N_3 = 1.00P\,.$$

Aby sprawdzić liniowość geometryczną obliczamy przemieszczenie węzła, E = 210 GPa, A = 4 cm^2: $\Delta_1 = \ldots = 4.24$ mm, $\Delta_2 = \ldots = 2.13$ mm, $\Delta_3 = \ldots = 2.98$ mm oraz składowe wektora przemieszczenia $\mathbf{s}(2.98,-7.52)$ mm. Wynik dowodzi że przemieszczenia są dostatecznie małe.

Wskazówka: Oba schematy przemieszczeń wirtualnych i równowagi statycznej powinny być zgodne. Schemat statyczny, zawsze może być tak dobrany, aby był zgodny ze schematem kinematycznym, ale nie na odwrót: nie dla każdego schematu statycznego istnieje odpowiadający mu schemat kinematyczny[2]. Dlatego najpierw rysujemy schemat kinematyczny a potem odpowiadający mu schemat statyczny.

Przykład 2

W tym przykładzie kierunek przemieszczenia węzła jest narzucony (ale nie jego zwrot) poprzez sztywny łącznik, rys. poniżej:



Rys. 3.13 Układ, schematy przemieszczenia oraz sił

Rozwiązanie:

$$\bar{s} = s(\sin\alpha, -\cos\alpha), \quad \overline{e_1} = (0,-1), \quad \overline{e_2} = (-1,0)$$

skąd:

$$\Delta_1 = \bar{s}\cdot\overline{e_1} = s\cos\alpha, \quad \Delta_2 = \bar{s}\cdot\overline{e_2} = -s\sin\alpha\,.$$

i równanie geometryczne przyjmuje postać:

$$\Delta_1 = -\sqrt{3}\Delta_2$$

podstawiają równania fizyczne, mamy:

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \sqrt{3}\frac{N_2 l_2}{EF}$$

[2] chodzi o niezgodność znaków siły i wydłużenia

więc

$$N_1 = 3N_2 \tag{1}$$

Równania statyki uzupełniają układ równań:

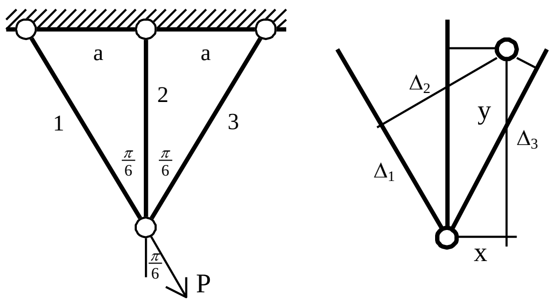
$$(P - N_1)a\cos\tfrac{\pi}{6} + N_2 a\sin\tfrac{\pi}{6} = 0. \tag{2}$$

Rozwiązaniem są wartości sił:

$$N_1 = \frac{3\sqrt{3}P}{3\sqrt{3}+1} = 0.8386P, \quad N_2 = -\frac{\sqrt{3}P}{3\sqrt{3}+1} = -0.2795P \text{ (ściskanie).}$$

Przykład 3

Dla kratownicy jak na rys. poniżej, określić siły w prętach.



Rys. 3.14 Kratownica i schemat przemieszczeń

Rozwiązanie:

Węzeł ma dwa stopnie swobody: translację poziomą i pionową. Za pomocą tych dwu parametrów możemy wyrazić zmiany długości prętów:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \overline{e_1} \cdot \overline{AA_1} = -x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} \\ \Delta_2 = \overline{e_2} \cdot \overline{AA_1} = y \\ \Delta_3 = \overline{e_3} \cdot \overline{AA_1} = x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

Eliminując pomocnicze parametry x oraz y, otrzymujemy równanie geometryczne w postaci:

$$\Delta_3 + \Delta_1 = \sqrt{3}\Delta_2 .$$

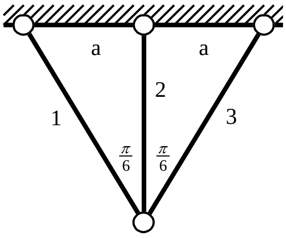
Wyrażając wydłużenia poprzez siły w prętach, otrzymujemy równanie, które wraz z równaniami statyki tworzy układ równań, umożliwiający obliczenie sił w prętach.

Problemy do samodzielnego rozwiązania

Problem 1

Określić siły w prętach kratownicy, rys. poniżej, powstałe wskutek wzrostu temperatury o 30 stopni. Przyjąć $A_1 = A_2 = 3$ cm^2, $A_3 = 5$ cm^2, $a = 3$ m, $E = 205$ GPa, współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha = 14.5 \cdot 10^{-6}$.

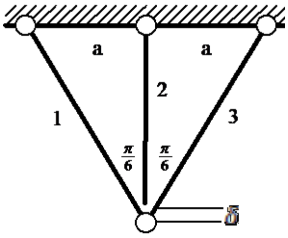
Odp.: $N_1 = N_3 = -3.186$ kN, $N_2 = 5.518$ kN.



Rys. 3.15 Kratownica przy zmiennej temperaturze

Problem 2

Określić siły w prętach kratownicy, jeśli pręt 2 byłby krótszy o $\delta = 2$ mm. Założyć $A_1 = A_2 = 3$ cm^2, $A_3 = 5$ cm^2, a = 3 m, E = 205 GPa.

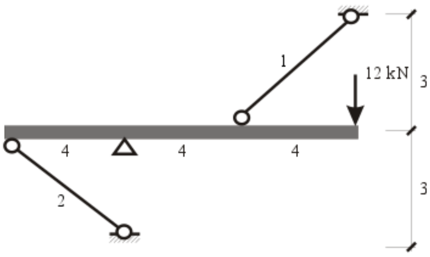


Rys. 3.16 Zadanie z luzem montażowym

Odp.: $N_1 = N_3 = -8.46$ kN, $N_2 = 14.65$ kN.

Problem 3

Określić siły w odkształcalnych prętach, rys. poniżej. Przyjąć $A_1 = 5$ cm^2, $A_2 = 4$ cm^2, $E = 205$ GPa.

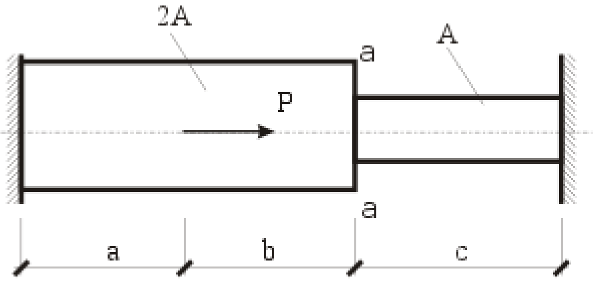


Rys. 3.17 Zadanie ze sztywnym łącznikiem

Odp.: $N_1 = 22.24$ kN, $N_2 = 17.76$ kN.

Problem 4

Określić siłę osiową w pręcie na rys. poniżej. Przyjąć E = 205 GPa, P = 20 kN, a = 3.5 cm, b = 4 cm, c = 5 cm, A = 7 cm^2.



Rys. 3.18 Rozciąganie nieswobodne

Odp.: 16 kN (a) and -4 kN (b+c)