

## Proste zginanie

### Wstęp

Zginanie jest najczęstszym przypadkiem w wymiarowaniu wielu elementów konstrukcyjnych, takich jak belki i dźwigary.

Jest to przypadek pryzmatycznego pręta obciążonego momentem zginającym, którego wektor<sup>1</sup> jest równoległy do głównej centralnej osi bezwładności przekroju poprzecznego.

Najprostszym przykładem elementu poddanego prostemu zginaniu są osie wagonów<sup>2</sup>.

Pewne wyniki prostego zginania będą wykorzystane w innych przypadkach takich jak mimośrodowe rozciąganie czy zginanie poprzeczne.

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego może być znalezione podejściem statycznym, podobnie do rozciągania.

### Twierdzenie Bernoulliego<sup>3</sup>

Przekrój poprzeczny, płaski i prostopadły do osi pręta przed obciążeniem, pozostaje płaski i prostopadły do odkształconej osi pręta po obciążeniu.

Powyższe założenie nie wyklucza deformacji w płaszczyźnie przekroju.

### Stan odkształcenia i naprężenia

Odształcenie liniowe  $\varepsilon_x$  w przekroju poprzecznym zmienia się liniowo z odległością od osi obojętnej. Oś obojętna przecina przekrój poprzeczny i dzieli go na dwa obszary: ściskany i rozciągany. Oś obojętna pokrywa się z osią główną centralną, równoległą do wektora momentu zginającego.

Z równania Hooke'a wynika, że rozkład naprężeń normalnych od zginania jest również liniowy:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z,$$

gdzie  $z$  jest odległością mierzoną od osi głównej centralnej.

Maksymalna bezwzględna wartość naprężenia jest osiągnięta we włóknach najbardziej odległych od osi obojętnej:

$$\max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{J_y} z_{\max}.$$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie oznaczamy przez  $W_y$ :

$$W_y \stackrel{def}{=} \frac{J_y}{z_{\max}} \quad [\text{m}^3]$$

jest więc:

$$\boxed{\max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{W_y}}$$

Maksymalne naprężenie jest proporcjonalne do momentu zginającego i odwrotnie proporcjonalne do wskaźnika na zginanie.

Dla stanu granicznego nośności mamy nierówność wymiarowania:

$$\max|\sigma_x| \leq R \quad \rightarrow \quad \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

<sup>1</sup> jest to tzw. wektor swobodny

<sup>2</sup> taki przypadek często nazywany jest, niezbyt szczęśliwie, zginaniem czteropunktowym

<sup>3</sup> będziemy używać tego twierdzenia jako hipotezy dla przypadku zginania poprzecznego (ze zmiennym momentem zginającym i siłą poprzeczną)

Możliwe są trzy rodzaje zadań:

- określamy geometrię przekroju dla zadanego materiału i momentu zginającego,
- określamy dopuszczalny moment zginający dla danego materiału i zadanej geometrii przekroju,
- poszukujemy materiału, który może przenieść obciążenie przy zadanej geometrii przekroju<sup>4</sup>,

## Krzywizna osi

Krzywizna osi pręta wyraża się wzorem:

$$\kappa = \frac{M_y}{EI_y}$$

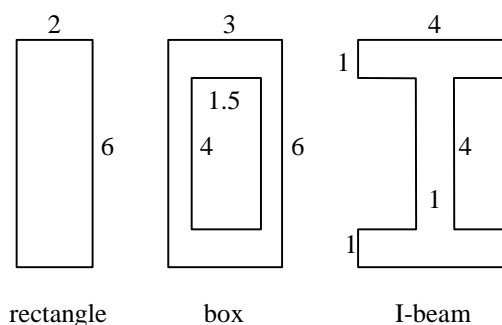
jest więc proporcjonalna do momentu gnącego i odwrotnie proporcjonalna do sztywności na zginanie  $EI_y$ . Matematyczna zależność krzywizny<sup>5</sup> od przemieszczeń może być zlinearyzowana<sup>6</sup>:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|w''|}{\left(\sqrt{1 + (w')^2}\right)^3} \approx |w''|$$

## Przykłady

### Przykład 1

Trzy przekroje mają takie samo pole przekroju i wysokość. Który z przekrojów jest najlepiej sprawdzony na zginanie? Przyjmijmy identyczną wartość momentu zginającego.



Rys 1. Porównywane przekroje

### Rozwiązanie

Obliczamy wskaźnik wytrzymałości na zginanie każdego z przekrojów:

- dla przekroju prostokątnego  $W_y = 12 \text{ cm}^3$  (przyjmujemy jako 100%)
- dla przekroju skrzynkowego  $W_y = 15.33 \text{ cm}^3$  (czyli 128%)
- dla dwuteownika  $W_y = 18.67 \text{ cm}^3$  (156%)

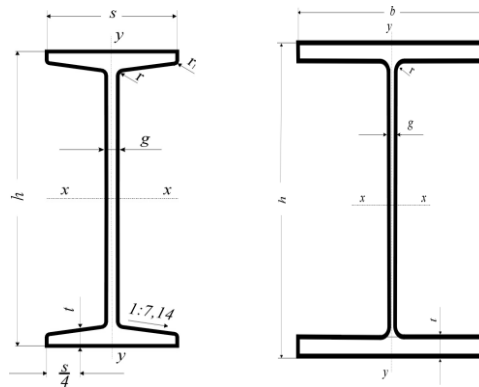
Przyjmując maksymalne naprężenia dla przekroju prostokątnego za 100%, odpowiednie wartości naprężenia dla przekroju skrzynkowego i dwuteownika wynoszą odpowiednio 78% i 64%.

Wyniki pokazują, że przekrojem najlepiej nadającym się na zginanie jest taki przekrój, w którym materiał jest najbardziej oddalony od osi obojętnej, jak np. w profilach INP i HEB, rys. 2.

<sup>4</sup> rzadko jednak “sterujemy” materiałem; jest on z reguły odgórnie narzucony, głównie z powodów ekonomicznych czy technologicznych

<sup>5</sup> zaskakujące, ale w matematyce nie ma ujemnej krzywizny, podobnie jak i ujemnego promienia krzywizny

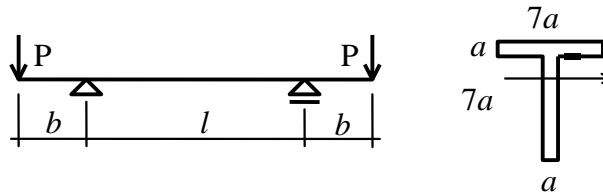
<sup>6</sup> błąd przybliżenia liniowego wzoru na krzywiznę jest nieznaczący, i – dla elementów konstrukcji budowlanych – mniejszy niż 0.1%



Rys. 2. Dwuteowniki INP i HEB

### Przykład 2

Określić wartość parametru  $a$  przekroju poprzecznego belki na rys. 3, jeśli  $P = 140$  kN,  $l = 2$  m,  $b = 0.2$  m,  $R = 150$  MPa.



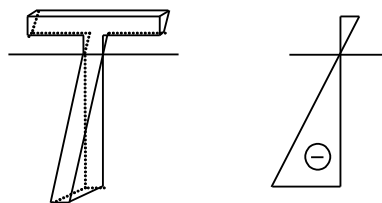
Rys. 3. Belka i jej przekrój poprzeczny

### Rozwiązanie

- maksymalny moment zginający wystąpi w przęśle<sup>7</sup> i wynosi  $M_y = Pb = 28$  kNm
- położenie środka przekroju:  $y_0 = 5.5a$
- główny centralny moment bezwładności:  $J_y = 85.17a^4$
- wskaźnik przekroju:  $W_y = \frac{85.17a^4}{5.5a} = 15.48a^3$
- naprężenie normalne:  $\sigma_x = \frac{M_y}{W_y} = \frac{28 \cdot 10^3}{15.48a^3} \leq R = 150 \cdot 10^6$
- więc, parametr  $a$ :  $a^3 \geq \frac{28 \cdot 10^3}{15.48 \cdot 150 \cdot 10^6} = 1.206 \cdot 10^{-5}$ ,  $\rightarrow a \geq 0.0229$  m

Ostatecznie przyjmujemy  $a = 2.3$  cm,  $J_y = 2380$  cm<sup>4</sup>,  $W_y = 188$  cm<sup>3</sup> i  $\max|\sigma_x| = 149$  MPa.

Rozkład naprężenia normalnego może być obrazowany bryłą naprężenia albo wykresem naprężenia, rys. 4.

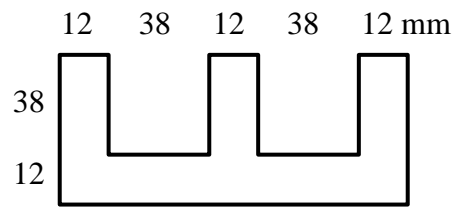


Rys. 4. Bryła naprężeń i wykres rozkładu naprężenia

### Przykład 3

Określić nośność zginanego przekroju, rys. 5, ekstrudowanego<sup>8</sup> z materiału o dopuszczalnych naprężeniach 84 MPa na rozciąganie i 110 MPa na ściskanie. Dolne włókna są rozciągane.

<sup>7</sup> moment w przęśle jest stały a siła poprzeczna jest równa zero, jest to więc zginanie proste



Rys. 5. Przekrój ekstrudowany

### Rozwiązanie

Charakterystyki przekroju:

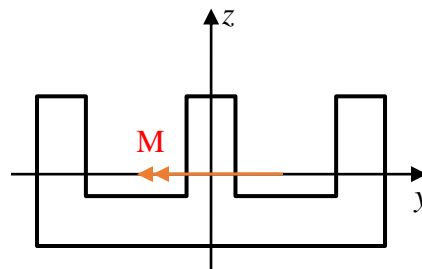
– pole:  $A = (3 \cdot 12 + 2 \cdot 38) \cdot 50 - 2 \cdot 38 \cdot 38 = 2712 \text{ mm}^2$

– położenie centroidu:  $z_c = \frac{112 \cdot 50 \cdot 25 - 2 \cdot 38 \cdot 38 \cdot 31}{2712} = 18.61 \text{ mm}$

– główny centralny moment bezwładności:

$$J_y = \frac{112 \cdot 50^3}{12} + 112 \cdot 50 \cdot (25 - 18.61)^2 - 2 \cdot \left[ \frac{38^4}{12} + 38^2 \cdot (31 - 18.61)^2 \right] = 604500 \text{ mm}^4$$

– rozkład naprężenia:



Rys. 6. Oś przekroju i działający moment

z uwagi na zwrot momentu, mamy:

$$\sigma_x = \frac{-M_y}{J_y} z,$$

a więc po stronie rozciąganej

$$\sigma_x(z = -18.61) = \frac{-M_y}{604500 \cdot 10^{-12}} (-0.01861) \leq 84 \cdot 10^6,$$

skąd:

$$M_y \leq 2.73 \text{ kNm}$$

a po stronie ściskanej

$$\sigma_x(z = 31.39) = \frac{-M_y}{604500 \cdot 10^{-12}} (0.03139) \geq -110 \cdot 10^6$$

mamy:

$$M_y \leq 2.12 \text{ kNm},$$

i, ostatecznie wybieramy mniejszą wartość:

$$M_y \leq 2.12 \text{ kNm}$$

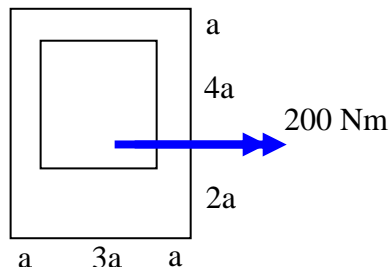
(Oba warunki na naprężenia skrajne można zapisać korzystając z wartości bezwzględnych momentu, współrzędnych i wytrzymałości).

<sup>8</sup> wyciskanego przez matrycę pod ciśnieniem

## Zadania kontrolne

### Zadanie 1

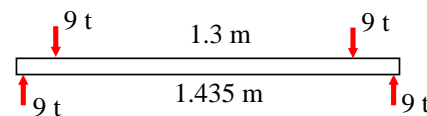
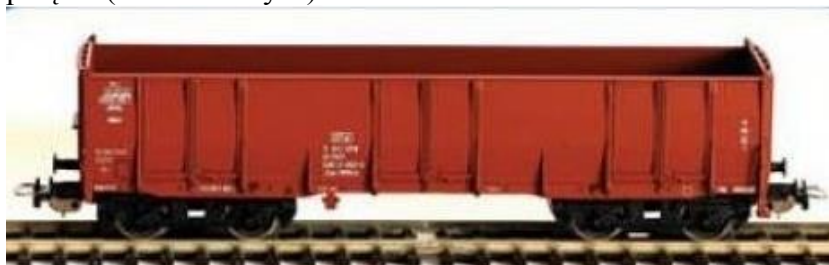
Określić parametr  $a$  przekroju z rys. 7, jeśli dopuszczalne naprężenia normalne wynoszą  $R = 240$  MPa.



Rys. 7. Zadany przekrój i moment

### Zadanie 2

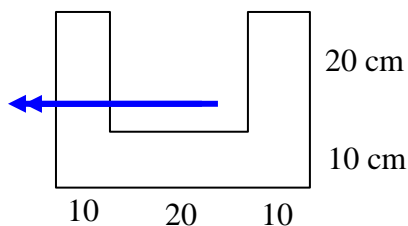
Określić maksymalne naprężenia normalne w osi wagonu-węglarki, rys. 8. Całkowita waga wagonu wynosi 72 tony, dla wagonu 4-osiowego średnica osi wynosi 120 mm, rozstaw toru 1435 cm, długość przęsła (rozstaw łożysk) 1.3 m.



Rys. 8. Węglarka i schemat osi

### Zadanie 3

Określić dopuszczalną wartość momentu zginającego, działającego w przekroju z rys. 9, wiedząc, że dopuszczalne naprężenie wynosi 80 MPa na rozciąganie i 105 MPa na ściskanie. Narysować wykres rozkładu naprężenia.

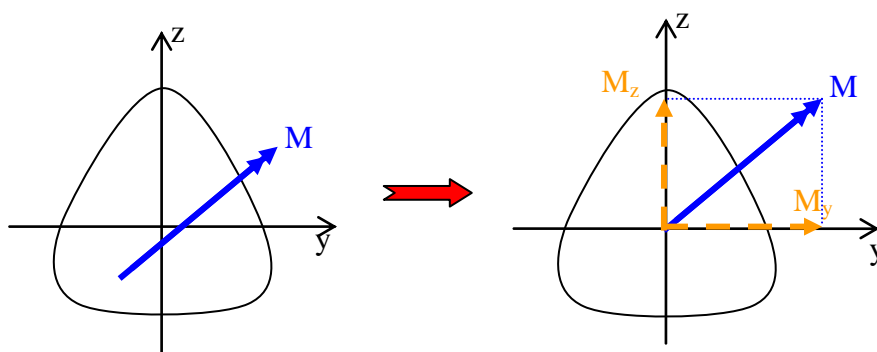


Rys. 9. Zginany przekrój

## Zginanie ukośne

### Wstęp

Na pierwszy rzut oka dwa przypadki wydają się być różne, choć tak w rzeczywistości nie jest: (a) zginanie przekroju momentem, którego kierunek nie jest równoległy do żadnej z osi głównych centralnych przekroju, i (b) przekrój zginany dwoma momentami działającymi w kierunkach głównych centralnych osi przekroju, rys. 1.



Rys. 1. Moment zginający i jego dekompozycja

Zauważmy, że zawsze rozważamy kierunki działania momentów zginających względem osi głównych centralnych przekroju.

Uwaga: nie istnieje zginanie ukośne takich przekrojów jak koło, kwadrat czy jakikolwiek inny wielokąt foremny; nie ma zginania ukośnego jeśli każda z osi centralnych przekroju jest jednocześnie osią główną. Z zasady superpozycji, naprężenie normalne jest sumą naprężeń od dwóch składowych zginania:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y.$$

Rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym jest liniowy.

Oś obojętna jest linią prostą przechodzącą przez środek ciężkości przekroju:

$$\sigma_x = 0 \rightarrow z = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{J_y}{J_z} y.$$

Kierunek osi obojętnej nie pokrywa się z kierunkiem wypadkowego momentu zginającego: jej kierunek jest odchylony w kierunku osi o mniejszym głównym centralnym momencie bezwładności.

Maksymalne co do bezwzględnej wartości naprężenia normalne osiągane są w punktach najbardziej odległych od osi obojętnej.

Dla stanu granicznego nośności mamy nierówność:

$$\max|\sigma_x| \leq R,$$

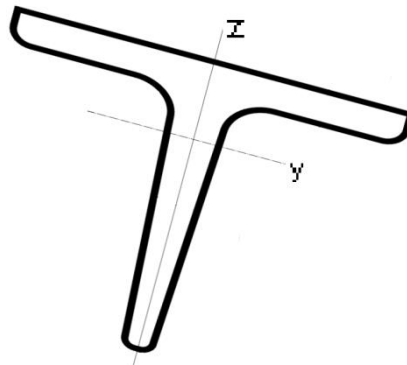
gdzie  $R$  jest wytrzymałością obliczeniową materiału.

Aby określić punkty przekroju o największych bezwzględnych wartościach naprężeń normalnych należy znać położenie osi obojętnej.

### Przykłady

#### Przykład 1

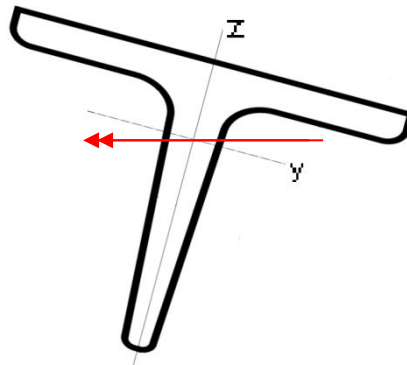
Teowa płatew, rys. 2, jest zginana momentem o kierunku poziomym. Wiedząc, że naprężenia dopuszczalne wynoszą 150 MPa, określić wartość momentu dopuszczalnego. Charakterystyki przekroju poprzecznego:  $s = h = 60$  mm,  $e = 18.6$  mm,  $J_y = 23.8$  cm<sup>4</sup>,  $J_z = 12.2$  cm<sup>4</sup>, kąt  $\alpha = 12.5^\circ$ .



Rys. 2. Teowa płatew

### Rozwiązanie

rozkład wektora momentu na kierunki osi głównych centralnych:



Rys. 3. Płatew i wektor momentu gnącego

$$M_y = -M \cos \alpha,$$

$$M_z = -M \sin \alpha,$$

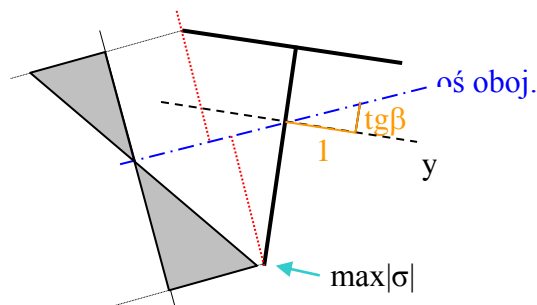
naprężenia normalne:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = M \left( -\frac{\cos \alpha}{J_y} z + \frac{\sin \alpha}{J_z} y \right) = M \left( -\frac{\cos \alpha}{23.8 \cdot 10^{-8}} z + \frac{\sin \alpha}{12.2 \cdot 10^{-8}} y \right),$$

równanie osi obojętnej:

$$z = \tan \alpha \cdot \frac{23.8}{12.2} y = \tan 0.218 \cdot 1.95 = 0.433 y$$

z rozkładu naprężenia przedstawionego na rys. 4:



Rys. 4. Przekrój z osią obojętną

znajdujemy maksymalne naprężenia w narożu środnika, blisko osi symetrii,  $(0, -41.4)$  w [mm]:

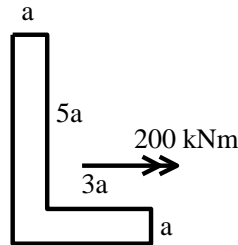
$$\sigma_x = M \left( -\frac{0.976}{23.8 \cdot 10^{-8}} (-4.14 \cdot 10^{-3}) \right) = 0.1698 \cdot 10^6 M$$

dla stanu granicznego nośności, mamy:

$$|\sigma_x| \leq R \rightarrow 0.1698 \cdot 10^6 M \leq 150 \cdot 10^6 \rightarrow M \leq 883 \text{ Nm}$$

### Przykład 2

Określić parametr przekroju  $a$ , rys. 5, wiedząc, że dopuszczalne naprężenia wynoszą  $R = 300 \text{ MPa}$ .



Rys. 5. Przekrój wraz z obciążeniem

### Rozwiązanie

charakterystyki geometryczne przekroju:

położenie środka ciężkości:  $y_c = 1.17, z_c = 2.17a$

momenty centralne:  $I_{y_c} = 30.75a^4, I_{z_c} = 10.75a^4, I_{y_c z_c} = -10a^4$

wartości własne:  $I_y = 34.89a^4, I_z = 6.61a^4$ , kierunki główne:  $\alpha = 22.49^\circ$

rozkład momentu zginającego na składowe w kierunkach głównych

$M_y = M \cos \alpha = 185 \text{ kNm}, M_z = M \sin \alpha = 76.5 \text{ kNm}$

rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = \frac{5.30z + 11.57y}{a^4} 10^3$$

równanie osi obojętnej:

$$z = -2.19y$$

obliczamy współrzędne naroży w układzie głównych centralnych osi bezwładności ze wzorów transformacyjnych<sup>9</sup>

punkt	y1	z1	y	z	odl.od osi oboj.	$\sigma$ [MPa]
A	-1.17 a	-2.17 a	-1.91 a	-1.56 a	2.39 a	-243
B	2.83 a	-2.17 a	1.78 a	-3.09 a	0.34 a	35
C	2.83 a	-1.17 a	2.17 a	-2.16 a	1.07 a	109
D	-0.17 a	3.83 a	1.31 a	3.60 a	2.69 a → max.	274
E	-1.17 a	3.83 a	0.38 a	3.99 a	2.01 a	205

Tablica. 1. Obliczenia dla zadania 2.

Punktem najbardziej odległym od osi obojętnej jest p. D gdzie wartość naprężenia jest największa.

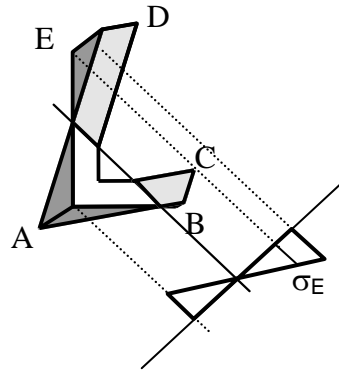
Wymiarowanie przekroju:

$$\sigma_x(1.31a, 3.60a) \leq R \rightarrow a = 0.0485 \text{ m} \approx 0.05 \text{ m}$$

Naprężenia normalne dla przyjętej wartości parametru  $a$  stanowią ostatnią kolumnę w tablicy 1, a wykres rozkładu naprężeń normalnych przedstawia rys. 6.

<sup>9</sup> wzory te podane są na końcu





Rys. 6. Rozkład naprężeń normalnych

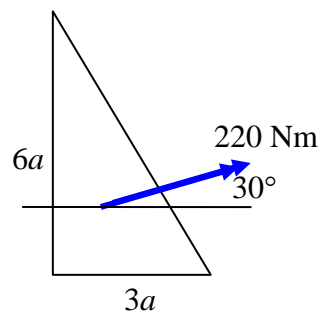
## Zadania kontrolne

### Zadanie 1

Z tablicy profili dwuteowych dobrać odpowiedni profil wiedząc, że naprężenie dopuszczalne wynosi 150 MPa a moment gnący  $M = 12 \text{ kNm}$  jest obrócony o  $20^\circ$  względem osi głównej centralnej (poziomej).

### Zadanie 2

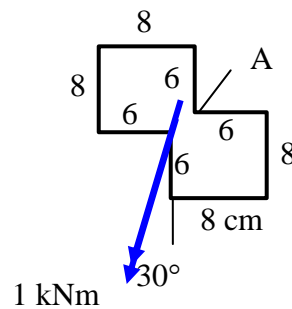
Określić parametr  $a$  przekroju z rys. 7. Naprężenie dopuszczalne wynosi 280 MPa. Narysować rozkład naprężeń normalnych.



Rys. 7. Przekrój wraz z obciążeniem

### Zadanie 3

Określić rozkład naprężeń normalnych w przekroju na rys. 8. Narysować rozkład naprężeń normalnych i określić wartość naprężenia w p. A.



Rys. 8. Przekrój wraz z obciążeniem

## **Dodatek**

### **Użyteczne wzory**

Wzory transformacyjne dla współrzędnych punktów:

$$y = y_1 \cos \alpha + z_1 \sin \alpha$$

$$z = y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha$$

Odległość punktu  $P$  do prostej o równaniu  $y \cos \alpha + z \sin \alpha - p = 0$ :

$$d = |y_p \cos \alpha + z_p \sin \alpha - p|$$