

## Stan naprężenia

### Przykład 1: Tarcza (płaski stan naprężenia)

Określić siły masowe oraz obciążenie brzegu tarczy jeśli stan naprężenia wynosi:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & -2y \\ -2y & 8 \end{pmatrix}.$$

#### Rozwiązanie:

Składowe sił masowych obliczamy wykonując różniczkowanie zapisane w równaniach równowagi wewnętrznej Naviera,

$$\sigma_{ij,j} + P_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + P_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 - 2 + P_x = 0 \\ 0 + 0 + P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_x = 2 \\ P_y = 0 \end{cases}$$

otrzymując:  $\mathbf{P} (2, 0)$

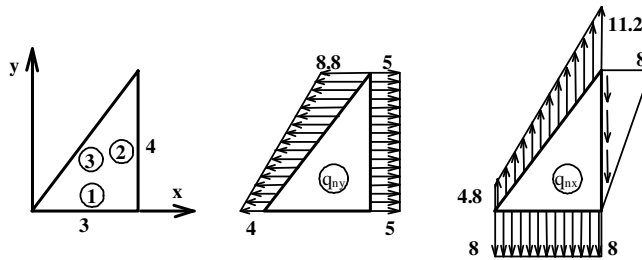
Statyczne warunki brzegowe

$$q_i = \sigma_{ij} n_j \quad \begin{cases} q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ q_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{cases}$$

rozpisujemy kolejno dla ponumerowanych części brzegu tarczy, określając najpierw składowe normalnej zewnętrznej:

$$\begin{aligned} \text{na ścianie 1: } n(0, -1), \quad q_x = 2y = 0, \quad q_y = -8 \\ \text{na ścianie 2: } n(1, 0), \quad q_x = 5, \quad q_y = -2y \\ \text{na ścianie 3: } n(-0.8, 0.6), \quad q_x = -4 - 1.2y, \quad q_y = 1.6y + 4.8 \end{aligned}$$

Wynik przedstawiamy graficznie, pamiętając, że znak dodatni wektora oznacza zgodność jego zwrotu ze zwrotem odpowiedniej osi układu współrzędnych.



Sprawdzenie równowagi globalnej tarczy:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 \{ \text{ściana 1} \} + 5 \cdot 4 \{ \text{ściana 2} \} + 0.5 \cdot (-8, 8) \cdot 5 \{ \text{ściana 3} \} + 2 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot 4 \{ P_x \cdot F \} = 32 - 32 = 0 \\ \Sigma Y &= -8 \cdot 3 \{ \text{ściana 1} \} - 0.5 \cdot 8 \cdot 4 \{ \text{ściana 2} \} + 0.5 \cdot (4, 8 + 11, 2) \cdot 5 \{ \text{ściana 3} \} + 0 \{ P_y \cdot F \} = -40 + 40 = 0 \\ \Sigma M_O &= -8 \cdot 3 \cdot 1.5 \{ \text{ściana 1} \} - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 0.5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 \{ \text{ściana 2} \} + 4 \cdot 5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4, 8 \cdot 5 \cdot 2/3 \cdot 4 + 4, 8 \cdot 5 \cdot 1, 5 + 0, 5 \cdot 6, 4 \cdot 5 \cdot 2 \{ \text{ściana 3} \} - 2 \cdot 0, 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1/3 \cdot 4 \{ \text{moment od sił masowych} \} = -36 - 40 - 48 + 40 + 32 + 36 + 32 - 16 = -140 + 140 = 0 \end{aligned}$$

### Przykład 2: Przestrzenny stan naprężenia

Dana jest macierz naprężenia oraz wektor normalnej zewnętrznej do brzegu ciała. Określić wektor obciążenia i jego składowe: normalną i styczną.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 200 & -300 & 100 \\ & -200 & 150 \\ & & 100 \end{pmatrix} \text{ MPa}, \quad \bar{n}(-2, 3, 2)$$

Określić rzuty wektora naprężenia na kierunki wersorów  $v_1(0, -0.5547, 0.8320)$ ,  $v_2(0.8745, 0.4036, 0.2691)$ . Wyniki obliczeń zilustrować rysunkiem.

#### Rozwiązanie:

wersor normalnej:  $\bar{n}(-0.4851, 0.7276, 0.4851)$

wektor obciążenia:  $q_i = \sigma_{ij} n_j$ , co rozpisujemy:

$$q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \quad q_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \quad q_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

$$q_x = 200 \cdot (-0.4851) - 300 \cdot 0.7276 + 100 \cdot 0.4851 = -266.8$$

$$q_y = -300 \cdot (-0.4851) - 200 \cdot 0.7276 + 150 \cdot 0.4851 = 72.78$$

$$q_z = 100 \cdot (-0.4851) + 150 \cdot 0.7276 + 100 \cdot 0.4851 = 109.1$$

$$\text{długość wektora obciążenia: } q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \sqrt{266.8^2 + 72.78^2 + 109.1^2} = 297.3$$

składową normalną obliczamy rzutując wektor obciążenia na kierunek normalnej:

$$\sigma = q_i n_i = q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = -266.8 \cdot (-0.4851) + 72.78 \cdot 0.7276 + 109.1 \cdot 0.4851 = 235.3$$

a jego składową styczną z równoległoboku sił:

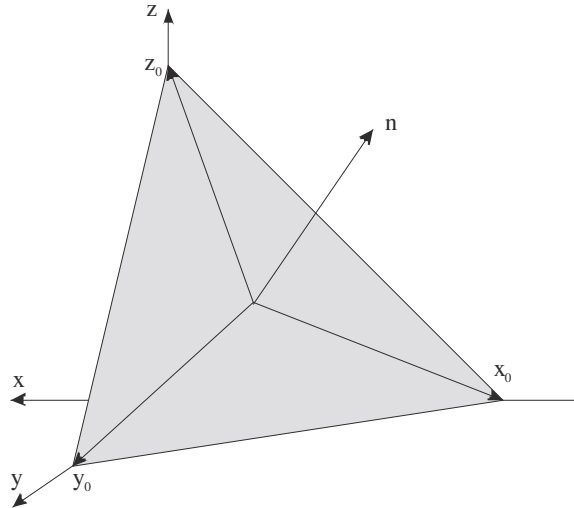
$$\tau = \sqrt{q^2 - \sigma^2} = \sqrt{297.3^2 - 235.3^2} = 181.7$$

Rzuty na kierunki wektorów  $v_1$  i  $v_2$  wynoszą odpowiednio:

$$\tau_1 = q_i v_i = -266.8 \cdot 0 + 72.78 \cdot (-0.5547) + 109.1 \cdot 0.8320 = 50.40$$

$$\tau_2 = q_i v_i = -266.8 \cdot 0.8745 + 72.78 \cdot 0.4036 + 109.1 \cdot 0.2691 = -174.6$$

Wyniki obliczeń przedstawiamy na rysunku. Aby prawidłowo narysować płaszczyznę cięcia, zakładamy że przechodzi ona przez punkt nieco przesunięty względem początku układu, np. (1,1,1). Przecina ona osie układu współrzędnych w punktach  $(x_0, 0, 0)$ ,  $(0, y_0, 0)$ ,  $(0, 0, z_0)$ . Współrzędne punktów znajdziemy z warunku ortogonalności wektorów łączących te punkty z punktem (1,1,1) z wektorem normalnej zewnętrznej, por. rys.:



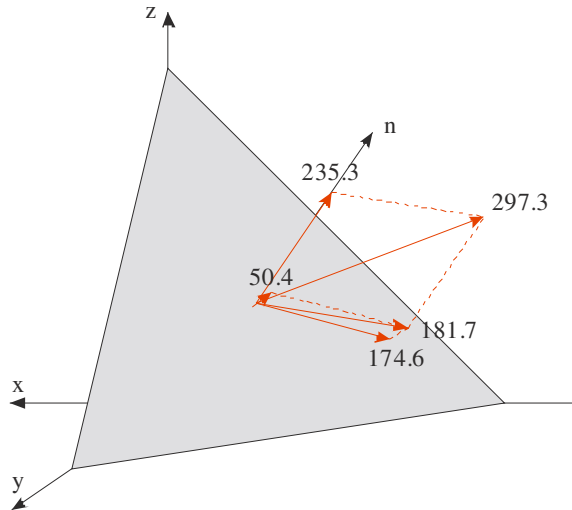
$$(n_x, n_y, n_z) \perp (x_0 - 1, -1, -1) \rightarrow n_x(x_0 - 1) - n_y - n_z = 0 \rightarrow x_0 = \frac{n_x + n_y + n_z}{n_x}$$

$$(n_x, n_y, n_z) \perp (-1, y_0 - 1, -1) \rightarrow -n_x + n_y(y_0 - 1) - n_z = 0 \rightarrow y_0 = \frac{n_x + n_y + n_z}{n_y}$$

$$(n_x, n_y, n_z) \perp (-1, -1, z_0 - 1) \rightarrow -n_x - n_y + n_z(z_0 - 1) = 0 \rightarrow z_0 = \frac{n_x + n_y + n_z}{n_z}$$

skąd:  $x_0 = -1.50$ ,  $y_0 = 1.00$ ,  $z_0 = 1.50$ .

Dobieramy kąt widzenia zapewniający widoczność płaszczyzny cięcia a odkładając współrzędne wektorów uwzględniamy skrót perspektywny.



v

### Przykład 3: Przestrzenny stan naprężenia

Dana jest macierz naprężenia. Określić naprężenia i kierunki główne. Obliczyć wektor naprężenia na płaszczyźnie o zadanej normalnej zewnętrznej  $\mathbf{n}$ . Obliczyć składowe normalną i styczną wektora obciążenia.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}(1, -1, \sqrt{7})$$

#### Rozwiązanie:

- Obliczamy niezmienniki podstawowe:  
 $I_1 = \{\text{suma po przekątnej}\} = 5 + 8 - 7 = 6$ ,  
 $I_2 = \{\text{suma podwyznaczników}\} = 5 \cdot 8 - 2 \cdot 2 - 8 \cdot 7 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 4 \cdot 4 = 40 - 4 - 56 - 36 - 35 - 16 = -107$ ,  
 $I_3 = \{\text{wyznacznik z macierzy, } \det(T_{\sigma})\} = 5 \cdot (-8 \cdot 7 - 6 \cdot 6) + 2 \cdot (2 \cdot 7 - 4 \cdot 6) + 4 \cdot (-2 \cdot 6 - 8 \cdot 4) = -656$
- Równanie sześciennego ma postać:  
 $\sigma^3 - 6\sigma^2 - 107\sigma + 656 = 0$   
 pierwiastki tego równania, czyli wartości własne (wartości główne, niezmienniki główne, naprężenia główne), wynoszą:  
 $\sigma_1 = 10.1809$   
 $\sigma_2 = 6.20436$   
 $\sigma_3 = -10.3853$
- Rozwiązujemy (programem naprężenia, ©A. Zaborski) zagadnienie wartości własnych kolejno dla każdego z pierwiastków z osobna, otrzymując wersory kolejnych kierunków własnych (głównych):  
 dla  $\sigma_1$ : (-0.134093, 0.944864, 0.29875)  
 dla  $\sigma_2$ : (0.951374, 0.0383786, 0.305639)  
 dla  $\sigma_3$ : (0.277321, 0.325207, -0.904065)  
 i w rezultacie macierz przejścia z układu wyjściowego do własnego ma postać:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -0.134093 & 0.944864 & 0.29875 \\ 0.951374 & 0.0383786 & 0.305639 \\ 0.277321 & 0.325207 & -0.904065 \end{pmatrix}$$

gdzie np. kosinus kąta między osią „y” a „3” wynosi 0.325207. Macierz jest ortogonalna i unormowana (czyli ortonormalna), co łatwo sprawdzić. Jedynie 3 jej składowe są niezależne.

Interpretacja geometryczna. Transformacja wyjściowego układu współrzędnych (x, y, z) do układu własnego polega na złożeniu 3 obrotów względem osi współrzędnych. Zakładając, że obroty są wykonywane w kolejności względem osi z, potem x a na końcu względem y, obliczamy współrzędne wersorów układu wyjściowego po transformacji, składając poszczególne transformacje:

$$A = (3 \text{ wersory}) (\text{obrót wzgl. z}) (\text{obrót wzgl. x}) (\text{obrót wzgl. y})$$

czyli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

gdzie  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają odpowiednie kąty obrotu względem osi, otrzymując:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

skąd wyliczamy (np. Matlabem):

$$\alpha = 1.5302072 \text{ (ok. } 87.57^\circ)$$

$$\beta = -0.33123062 \text{ (ok. } -18.98^\circ)$$

$$\gamma = 2.8439558 \text{ (ok. } 162.9^\circ)$$

Oczywiście zmieniając kolejność obrotów (składania transformacji składowych) otrzymamy inne kąty gdyż mnożenie macierzy nie jest przemienne.

4. Sprawdźmy macierz przejścia obliczając transformację z prawa transformacji tensorowej:

$$\sigma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{x1} a_{x1} \sigma_{xx} + a_{x1} a_{y1} \tau_{xy} + a_{x1} a_{z1} \tau_{xz} + \\ &+ a_{y1} a_{x1} \tau_{yx} + a_{y1} a_{y1} \sigma_{yy} + a_{y1} a_{z1} \tau_{yz} + \\ &+ a_{z1} a_{x1} \tau_{zx} + a_{z1} a_{y1} \tau_{zy} + a_{z1} a_{z1} \sigma_{zz} = \\ &= (-0.134094) \cdot [-0.134093 \cdot 5 + 0.944864 \cdot (-2) + 0.29875 \cdot 4] + \\ &+ 0.944864 \cdot [-0.134093 \cdot (-2) + 0.944864 \cdot 8 + 0.29875 \cdot 6] + \\ &+ 0.29875 \cdot [-0.134093 \cdot 4 + 0.944864 \cdot 6 + 0.29875 \cdot (-7)] = 10.1809 \text{ {OK.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= a_{x1} a_{x2} \sigma_{xx} + a_{x1} a_{y2} \tau_{xy} + a_{x1} a_{z2} \tau_{xz} + \\ &+ a_{y1} a_{x2} \tau_{yx} + a_{y1} a_{y2} \sigma_{yy} + a_{y1} a_{z2} \tau_{yz} + \\ &+ a_{z1} a_{x2} \tau_{zx} + a_{z1} a_{y2} \tau_{zy} + a_{z1} a_{z2} \sigma_{zz} = \\ &= (-0.134094) \cdot [0.951374 \cdot 5 + 0.0383786 \cdot (-2) + 0.305639 \cdot 4] + \\ &+ 0.944864 \cdot [0.951374 \cdot (-2) + 0.0383786 \cdot 8 + 0.305639 \cdot 6] + \\ &+ 0.29875 \cdot [0.951374 \cdot 4 + 0.0383786 \cdot 6 + 0.305639 \cdot (-7)] = -5.8 \cdot 10^{-15} \approx 0 \text{ {OK.}} \end{aligned}$$

(itd.)

Po obliczeniu wszystkich współrzędnych, otrzymujemy macierz naprężenia w postaci diagonalnej:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 10.1809 & 0 & 0 \\ 0 & 6.20436 & 0 \\ 0 & 0 & -10.3853 \end{pmatrix}$$

5. Obliczamy wersor płaszczyzny cięcia (normujemy wektor normalnej zewn.):

$$\mathbf{n}(1, -1, \sqrt{7}) \Rightarrow \mathbf{n}(0.3333, -0.3333, 0.8820)$$

6. Obliczenia w układzie wyjściowym (x, y, z):

obliczamy wektor obciążenia, w układzie wyjściowym (x, y, z), ze wzoru:  $p_i = \sigma_{ij} n_j$ , mamy:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3333 \\ -0.3333 \\ 0.8820 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.861 \\ 1.958 \\ -6.840 \end{pmatrix}$$

jego długość wynosi:  $p = 9.218$ . Aby obliczyć składową normalną wektora, rzucamy go na kierunek normalnej, czyli – zgodnie z interpretacją iloczynu skalarnego – jest ona równa iloczynowi skalarnemu wektora i wersora normalnej:

$$\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \dots = -4.731.$$

Składową styczną możemy obliczyć z dokładnością do znaku z twierdzenia Pitagorasa:

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2} = \dots = 7.911.$$

Teraz to samo, ale obliczane w układzie głównym (własnym), (1, 2, 3):

transformujemy wersor normalnej zewnętrznej wg wzoru:  $n_i = a_{ij} n_j = (-0.0962 \quad 0.5739 \quad -0.8133)$ ,

obliczamy składowe wektora obciążenia:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 10.1809 & 0 & 0 \\ 0 & 6.20436 & 0 \\ 0 & 0 & -10.3853 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0962 \\ 0.5739 \\ -0.8133 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9792 \\ 3.5606 \\ 8.4461 \end{pmatrix}$$

sprawdzamy jego długość:  $p = 9.218$  (jak poprzednio) i składową normalną:

$$\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \dots = -4.731 \text{ (jak poprzednio).}$$

Współrzędne wektora różnią się w obu układach, ale długość wektora obciążenia i jego składowe: normalna i styczna, są identyczne.

#### Przykład 4: płaski stan naprężenia

Dla danego tensora naprężenia w p.s.n. określić naprężenia i kierunki główne

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ 16 & -10 \end{pmatrix}.$$

**Rozwiązanie:**

Naprężenia główne ze wzorów:  $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$  wynoszą:  $\sigma_1 = 44.68$ ,  $\sigma_2 = -14.68$

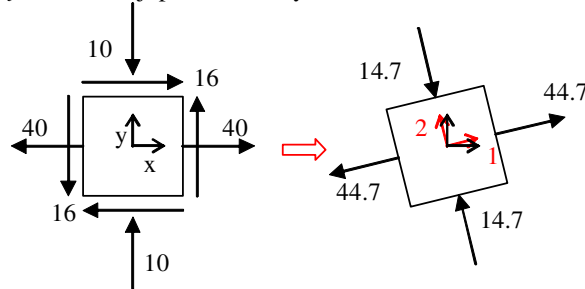
Kierunki główne:  $\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \Rightarrow \alpha_1 = 0.2847$ ,  $\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \Rightarrow \alpha_2 = -1.286$

gdzie  $\alpha_1$  jest kątem pomiędzy osią „x” układu wyjściowego a osią „1” układu głównego (dokładniej: mniejszy z 2 możliwych),  $\alpha_2$  to kąt pomiędzy osią „x” a osią „2”, przy czym:  $|\alpha_1| + |\alpha_2| = \frac{\pi}{2}$ .

Macierz przejścia i tensor naprężenia w układzie własnym:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9598 & 0.2808 \\ 0.2808 & -0.9598 \end{pmatrix}, T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 44.68 & 0 \\ 0 & -14.68 \end{pmatrix}$$

Interpretację geometryczną transformacji przedstawia rysunek:



#### Przykład 5: płaski stan naprężenia

Dla podanego płaskiego stanu naprężenia, określić wartości własne, kierunki główne i macierz przejścia.

Transformację układu zinterpretować graficznie. Rozpisać tensorowe prawo transformacji dla składowych  $\sigma_{11}$  i  $\tau_{12}$  tensora w kierunkach głównych i porównać ich wartości z wyliczonymi z zagadnienia wartości własnych.

Dane:  $\sigma_x = 20$  MPa,  $\sigma_y = -15$  MPa,  $\tau_{xy} = -15$  MPa.

**Rozwiązanie:**

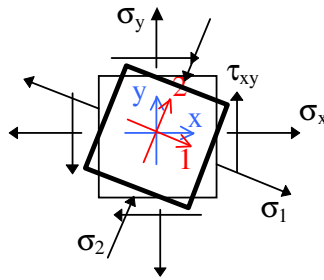
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \sigma_1 = 25.55 \text{ MPa}, \sigma_2 = -20.55 \text{ MPa}.$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = -0.185, \alpha_1 = -10.48^\circ$$

macierz przejścia:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} \\ a_{1y} & a_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9833 & -0.1819 \\ 0.1819 & 0.9833 \end{pmatrix}$$

interpretacja graficzna:



z tensorowego prawa transformacji dla p.s.n.:

$$\sigma_{11} = a_{1x}^2 \sigma_{xx} + a_{1y}^2 \sigma_{yy} + 2a_{1x}a_{1y} \tau_{xy} = \dots = 25.55 \text{ MPa} = \sigma_1,$$

$$\sigma_{12} = a_{1x}a_{2x} \sigma_{xx} + a_{1y}a_{2y} \sigma_{yy} + a_{1x}a_{2y} \tau_{xy} + a_{1y}a_{2x} \tau_{yx} = \dots = 0.$$

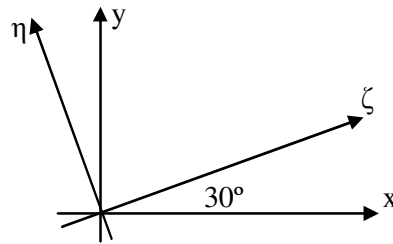
### Przykład 6: Płaski stan naprężenia

Określić podaną macierz naprężenia w układzie obróconym o kąt  $30^\circ$ .

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 225 & -30 \\ & -40 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

#### Rozwiązanie:

Jak wiadomo, macierz przejścia zawiera dostawy kierunkowe (cosinusy kątów między osiami) nowego układu zapisane w starym układzie (lub na odwrót: starego układu w nowym).



Z rysunku wynika:

	$\zeta$	$\eta$
x	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
y	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$

czyli:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0.8660 & -0.5 \\ 0.5 & 0.8660 \end{pmatrix}$$

Z prawa transformacyjnego:  $\sigma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$

rozpisujemy:

$$\sigma_\xi = a_{\xi x}^2 \sigma_x + 2a_{\xi x} a_{\xi y} \tau_{xy} + a_{\xi y}^2 \sigma_y$$

$$\sigma_{\xi\eta} = a_{\xi x} a_{\eta x} \sigma_x + a_{\xi x} a_{\eta y} \tau_{xy} + a_{\xi y} a_{\eta x} \tau_{xy} + a_{\xi y} a_{\eta y} \sigma_y$$

$$\sigma_\eta = a_{\eta x}^2 \sigma_x + 2a_{\eta x} a_{\eta y} \tau_{xy} + a_{\eta y}^2 \sigma_y$$

(gdzie mnożnik przy podkreślonych członach wynika z przemienności mnożenia i symetrii tensora).

Po wykonaniu rachunków, otrzymujemy:

$$T_{\sigma'} = \begin{pmatrix} 132.8 & -130.0 \\ -130.0 & 52.23 \end{pmatrix}$$

### Przykład 7: Płaski stan naprężenia

Dla podanego tensora naprężenia określić ekstremalne naprężenia styczne i ich kierunki.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

**Rozwiązanie:**

Jak widać macierz jest w postaci diagonalnej, co oznacza że zapisana jest w układzie własnym. Ekstremalne naprężenia styczne wyrażają się wzorem (dla płaskiego stanu naprężenia jeden wzór):

$$\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = \frac{200 - 100}{2} = 50$$

Kierunki ekstremalnych naprężeń stycznych są pod kątem  $45^\circ$  do kierunków głównych. Sprawdźmy, jak wygląda macierz naprężenia transformowana z postaci diagonalnej do nowego układu obróconego o  $45^\circ$ . Ze wzoru transformacyjnego, dla macierzy przejścia:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ a_{2x} & a_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix}$$

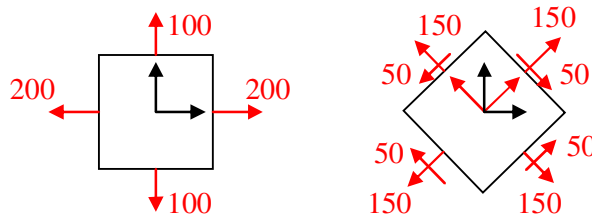
znajdujemy:

$$\sigma_x = a_{1x}^2 \sigma_1 + a_{2x}^2 \sigma_2 = 0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 100 = 150$$

$$\tau_{xy} = a_{1x} a_{1y} \sigma_1 + a_{2x} a_{2y} \sigma_2 = -0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 100 = -50$$

$$\sigma_y = a_{1y}^2 \sigma_1 + a_{2y}^2 \sigma_2 = 0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 100 = 150$$

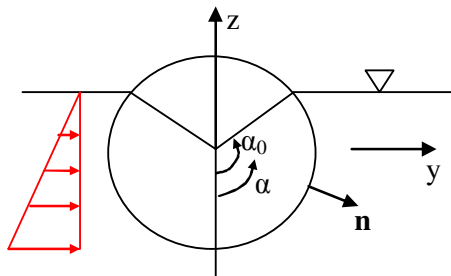
Wynik ilustruje rysunek.

**Przykład 8 – Statyczne warunki brzegowe**

Kłoc drewna o przekroju kołowym pływa w wodzie zanurzony w  $2/3$  obwodu. Zapisać statyczne warunki brzegowe na obciążonej części poboczniczy i denek walca.

**Rozwiązanie:**

Jak wiadomo z twierdzenia Pascala, ciśnienie hydrostatyczne wody (a tym samym i jej parcie na zanurzone ciało) rośnie liniowo z głębokością, por. rysunek.



wersor normalnej zewnętrznej:  $\mathbf{n}(\sin \alpha, -\cos \alpha)$

a ponieważ zwrot ciśnienia jest przeciwny do normalnej zewnętrznej, mamy wyrażenie na całkowite parcie:

$$q = R(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

(przyjęty jednostkowy ciężar właściwy wody)

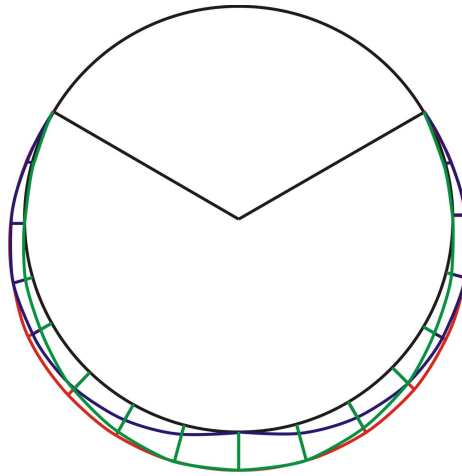
i po rzutowaniu na osie, składowe:

$$q_y = -R(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \sin \alpha$$

$$q_z = R(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \cos \alpha$$

Wyniki przedstawia tabela i rysunek.

	0	15	30	45	60	75	90	105	120
q	4.50	4.40	4.10	3.62	3.00	2.28	1.50	0.72	0
q <sub>y</sub>	0	-1.14	-2.05	-2.56	-2.60	-2.20	-1.5	-0.70	0
q <sub>z</sub>	4.50	4.25	3.55	2.56	1.50	0.59	0	-0.19	0



Na denkach walca, dla  $z < -R \cos \alpha_0 = z_0$ :

$$q_x = z - z_0, \quad q_y = q_z = 0$$

Na nieobciążonej części brzegu jest oczywiście  $q_x = q_y = q_z = 0$  (pobocznica i denka nad lustrem wody).