Zginanie ze ściskaniem

Zaprojektować przekrój prostokątny belki $b \times h = d \times 2d$, obciążonej w środku przęsła $l = 4$ m siłą $P = 20$ kN i ściskanej siłą N = 100 kN. Dane: $R =$ 160 MPa, $E = 200$ GPa.

Rozwiązanie 1:

Naprężenia normalne (wzory z wykładu lub podręcznika):

$$\max \sigma_x = \frac{M_{\max}}{W_y} + \frac{N}{F} = \frac{Pl}{4}\frac{\operatorname{tg} u}{u}\frac{6}{4d^3} + \frac{N}{2d^2} \le R,$$

gdzie $u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{P_E}} = \cdots = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3N}{2Ed^4}} = \frac{0.00173}{d^2}$.

Rozwiązując numerycznie nierówność, otrzymujemy: $d = 6.05$ cm.

Sprawdzamy obliczenia:

pole przekroju: $F = 73.27$ cm^2,

momenty bezwładności: $J_y = 894.8$ cm^4, $J_z = 223.7$ cm^4,

wskaźnik wytrzymałości $W_y = 147.8$ cm^3,

siła eulerowska (względem osi y i z): $P_{ey} = 1.1$ MN, $P_{ez} = 276$ kN (obie siły> N),

maksymalne naprężenia normalne: $\max\sigma_x = 160$ MPa,

strzałka ugięcia: $f = f_o \frac{tgu - u}{u^3} = 1.64$ cm

maksymalny moment zginający: $M_{\max} = 21.64$ kNm.

Rozwiązanie 2:

Inny sposób rozwiązania, *metodą kollokacji*, polega na przyjęciu funkcji ugięcia w postaci:

$$w(x) = a \sin\frac{\pi x}{l},$$

spełniającej kinematyczne warunki brzegowe oraz zażądaniu zgodności rozwiązania aproksymowanego z rozwiązaniem ścisłym w kilku dodatkowych punktach. Zażądamy zgodności w jednym dodatkowym przekroju: w środku rozpiętości belki. Jest więc:

$$w''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} a \sin\frac{\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad EJ_y \frac{\pi^2}{l^2} a \sin\frac{\pi x}{l} = M_0(x) + Na \sin\frac{\pi x}{l},$$

a po przekształceniach, dla $x = l/2$:

$$a = \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} - N} = \frac{12}{\pi^2}\frac{Pl^3}{48EJ_y}\frac{1}{1-\frac{N}{P_E}} = \frac{12}{\pi^2} a_{spr} \frac{1}{1-\frac{N}{P_E}},$$

oraz:

$$w(l/2) = f = a \sin \pi/2 = a.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia ponownie do wzoru na naprężenia, otrzymujemy z rozwiązania numerycznego: $d = 6.08$ cm. Pozostałe wielkości podobnie nieznacznie się różnią od wartości uzyskanych w poprzednim obliczeniu:

pole przekroju: $F = 73.94$ cm^2,

momenty bezwładności: $J_y = 911.3$ cm^4, $J_z = 227.8$ cm^4,

wskaźnik wytrzymałości $W_y = 149.9$ cm^3,

siła eulerowska (względem osi y i z): $P_{ey} = 1.12$ MN, $P_{ez} = 281$ kN (obie siły> N),

maksymalne naprężenia normalne: $\max\sigma_x = 160$ MPa,

strzałka ugięcia: $f = 1.95$ cm

maksymalny moment zginający: $M_{\max} = 21.95$ kNm.