Statyka układów prętowych

schemat statyczny, klasyfikacja konstrukcji, obciążeń i więzów; geometryczna niezmienność; obliczanie reakcji

Schemat statyczny

Schemat statyczny stanowi wyidealizowany rysunek konstrukcji, który zawiera jedynie informacje istotne z punktu widzenia obliczeń statycznych. Posługując się takim rysunkiem można wykonać wszystkie niezbędne obliczenia. Schemat statyczny stanowi więc model analityczny realnej konstrukcji.

Właściwy dobór takiego modelu stanowi bardzo ważną umiejętność inżyniera i wymaga rozległej wiedzy. Będziemy wykonywać obliczenia przyjmując za punkt wyjścia schemat statyczny, o którym zakładamy, że został właściwie dobrany. Bardziej szczegółowe i praktyczne informacje na temat doboru schematu statycznego podają tzw. przedmioty konstrukcyjne (jak np. konstrukcje stalowe, czy żelbetowe) oraz związane z nimi normy przedmiotowe.

Podstawowymi elementami schematu statycznego konstrukcji budowlanych są: konstrukcja, obciążenia, więzy podłoża.

Klasyfikacja konstrukcji

Biorąc za punkt wyjścia geometrię elementów składowych konstrukcji, możemy wśród tych elementów wyróżnić elementy:

- prętowe, w których jeden wymiar jest znacznie większy od dwu pozostałych - są to:
  - belki (proste i ukośne) oraz słupy,
  - belki przegubowe (belki połączone przegubowo),
  - ramy (układ sztywno połączonych prętów),
  - łuki (pręty zakrzywione),
  - kratownice (pręty połączone przegubowo), oraz
  - układy złożone (składające się z kilku wyżej wymienionych typów prętów),

  rysunek uproszczony tych elementów jest rysunkiem ich osi,
- powierzchniowe, w których dwa wymiary są znacznie większe od trzeciego - są to:
  - tarcze albo inaczej tarczownice (elementy płaskie obciążone w swojej płaszczyźnie, jak np. ściana nośna),
  - płyty (elementy płaskie obciążone prostopadle do swojej płaszczyzny, jak np. strop), oraz
  - powłoki (elementy cienkościenne zakrzywione w przestrzeni),
- konstrukcje masywne, w których wszystkie trzy wymiary są tego samego rzędu — w budownictwie są to z reguły elementy fundamentów, jak np. mur oporowy czy stopa fundamentowa.

Klasyfikacja obciążeń

Zależnie od sposobu działania obciążenia dzielimy na: *bezpośrednie* (przyłożone siły) i *pośrednie* (termiczne, skurczowe, osiadania itp.).

W zależności od czasu działania obciążenia dzielimy na: *stałe* (co do kierunku i wartości), *zmienne* (ruchome i nieruchome, wielokrotnie zmienne itp.), *dynamiczne* (udarowe lub cykliczne), *wyjątkowe* (mało prawdopodobne, jak np. uderzenia pojazdem, sejsmiczne, lub spowodowane pożarem, powodzią czy huraganowym wiatrem).

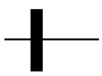
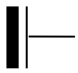
Ze względu na sposób przyłożenia obciążeń, dzielimy je na: *skupione* (siła o wymiarze N, kN, MN; moment o wymiarze Nm, kNm, MNm), *ciągłe* (liniowe o wymiarze N/m, kN/m MN/m; powierzchniowe, N/m^2 itp. oraz objętościowe, N/m^3).

Rozróżnia się następujące wartości obciążeń: *charakterystyczne* (podawane w normach dla różnych materiałów i rodzajów obciążeń użytkowych), oraz *obliczeniowe* (charakterystyczne z częściowym współczynnikiem bezpieczeństwa).

W naszych obliczeniach będziemy używać wartości obliczeniowych obciążeń, stanowiących podstawę projektowania ze względu na wytrzymałość konstrukcji.

Klasyfikacja więzów

Będziemy się ograniczać (z niewielkimi wyjątkami) jedynie do układów płaskich gdyż układy przestrzenne analizuje się podobnie. W układach płaskich charakterystyka więzów jest następująca:

Określenie	*Wizualizacja*	*Zastępczy schemat kinematyczny*	*Liczba odebranych stopni swobody*	*Liczba reakcji - sił biernych*
Podpora przegubowa		2 pręty nierównoległe	2 przesuwy	2 siły prostopadłe do siebie[1]
Podpora przesuwna		1 pręt prostopadły do kierunku przesuwu	1 przesuw	1 siła prostopadła do kierunku przesuwu
Utwierdzenie		3 pręty nie przecinające się w jednym punkcie	2 przesuwy i obrót	2 siły prostopadłe do siebie[2] i moment
Utwierdzenie pionowo przesuwne		2 pręty równoległe, prostopadłe do kierunku przesuwu	1 przesuw i 1 obrót	Siła prostopadła do kierunku przesuwu i moment
Utwierdzenie poziomo przesuwne		2 pręty równoległe, prostopadłe do kierunku przesuwu	1 przesuw i 1 obrót	Siła prostopadła do kierunku przesuwu i moment

Geometryczna niezmienność układu

Mówimy, że układ jest geometrycznie niezmienny, jeśli ma odebrane wszystkie stopnie swobody.

Analizować będziemy jedynie układy geometrycznie niezmienne. Mechanizmy o jednym lub większej liczbie stopni swobody stanowią przedmiot zainteresowania dynamiki i wymagają uwzględnienia sił bezwładności. Do analizy statycznej wszystkie elementy składowe konstrukcji wraz z więzami powinny być połączone ze sobą w sposób geometrycznie niezmienny, czyli że konstrukcja wraz z więzami (ostoją) ma stanowić jedną sztywną tarczę.

[1] taki układ obliczeniowy jest najczęściej stosowany; oczywiście siły nie muszą być do siebie prostopadłe, wystarczy, że nie będą równoległe

[2] j.w.

Dla celów praktycznej analizy geometrycznej niezmienności układów wprowadzimy następujące określenia.

Przez geometryczną *niezmienność zewnętrzną* (lub krótko: geometryczną niezmienność) rozumiemy niezmienność całego układu rozpatrywanego łącznie z więzami (podłożem). Układ geometrycznie niezmienny (zewnętrznie) ma odebrane wszystkie stopnie swobody. Podkreślmy jeszcze raz, że tylko takie układy geometrycznie niezmienne mogą być analizowane statycznie i tylko takie układy są stosowane w budownictwie.

Przez geometryczną *niezmienność wewnętrzną* rozumiemy niezmienność układu, rozpatrywanego w oderwaniu od więzów, tzn. rozpatrujemy wyłącznie samą konstrukcję bez jej podparcia. Układ geometrycznie niezmienny wewnętrznie stanowi jedną sztywną tarczę. Analiza niezmienności wewnętrznej ułatwia analizę statyczną układu poprzez zrozumienie, w jaki sposób układ pracuje. Np. wewnętrzna zmienność układu z reguły oznacza pewne komplikacje obliczenia reakcji układu (dołączenie dodatkowego równania przegubu czy wykonanie dodatkowych cięć). Jeśli układ jest wewnętrznie niezmienny to do obliczania reakcji wystarczają wyłącznie standardowe równania równowagi.

Wzory analityczne określające geometryczną niezmienność układu, często cytowane w literaturze, nie są godne polecenia. Stanowią jedynie warunek konieczny lecz nie wystarczający geometrycznej niezmienności. Ponadto zastępują analizę pracy układu mechanicznym obliczeniem. Bardziej godne polecenia jest stosowanie *zasady prędkości wirtualnych*.

Układ jest geometrycznie zmienny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje niesprzeczny plan prędkości wirtualnych.

Twierdzenie przeciwne jest też prawdziwe:

Układ jest geometrycznie niezmienny jeśli można wykazać sprzeczność w planie prędkości wirtualnych.

Dla celów praktycznych przydatne są twierdzenia o geometrycznie niezmiennym połączeniu 2 tarcz:

WKW geometrycznie niezmiennego połączenia 2 tarcz jest połączenie co najmniej 3 prętami, które nie są równoległe, ani ich kierunki nie przecinają się w jednym punkcie (który byłby środkiem chwilowego obrotu jednej tarczy względem drugiej).

oraz 3 tarcz:

WKW geometrycznie niezmiennego połączenia 3 tarcz jest połączenie każdych 2 tarcz co najmniej dwoma prętami w taki sposób, aby wszystkie pręty jednocześnie nie były do siebie równoległe, ani też punkty przecięcia się kierunków prętów, łączących każde 2 tarcze nie leżały na jednej prostej.

Stosując powyższe metody, dochodzimy do wniosku, że układ może być:
- geometrycznie niezmienny wewnętrznie i zewnętrznie (np. belka na 2 podporach które w sposób właściwy odbierają 3 stopnie swobody),
- geometrycznie niezmienny wewnętrznie i zmienny zewnętrznie (np. belka na 2 podporach z chwilowym środkiem obrotu),
- geometrycznie zmienny wewnętrznie i niezmienny zewnętrznie (np. tzw. układ trójprzegubowy),
- geometrycznie zmienny wewnętrznie i zewnętrznie (np. układ trójprzegubowy z przegubami współliniowymi).

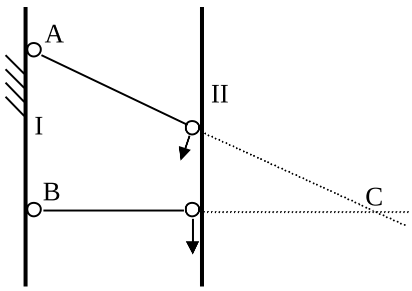
Obliczenia statyczne wykonujemy jedynie dla układów zewnętrznie geometrycznie niezmiennych.

Analiza wewnętrznej geometrycznej niezmienności sugeruje nam sposób rozwiązania. Jeśli układ jest wewnętrznie zmienny a niezmienny zewnętrznie, do obliczenia reakcji nie wystarczą same równania równowagi. Potrzebne są dodatkowe równania, np. równanie przegubu lub analogiczne.

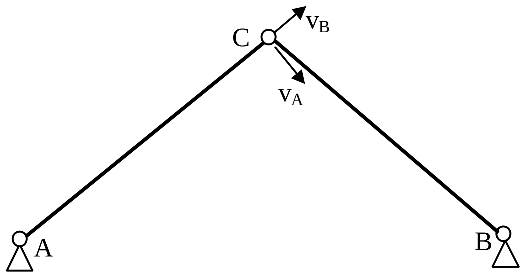
Z twierdzenia o trzech tarczach wynika, że połączenie "w trójkąt" jest geometrycznie niezmienne.

Istotny jest tutaj nie kształt trójkąta, ale istnienie dokładnie 3 tarcz (wieloboku o liczbie boków 3, zbudowanego z 3 tarcz; dla lepszego zapamiętania nazwijmy go "trójbokiem" czy też "tribokiem"[3]).

Przykład zastosowania planu prędkości wirtualnych:



a) układ geometrycznie zmienny



b)układ 3-przegubowy, niezmienny

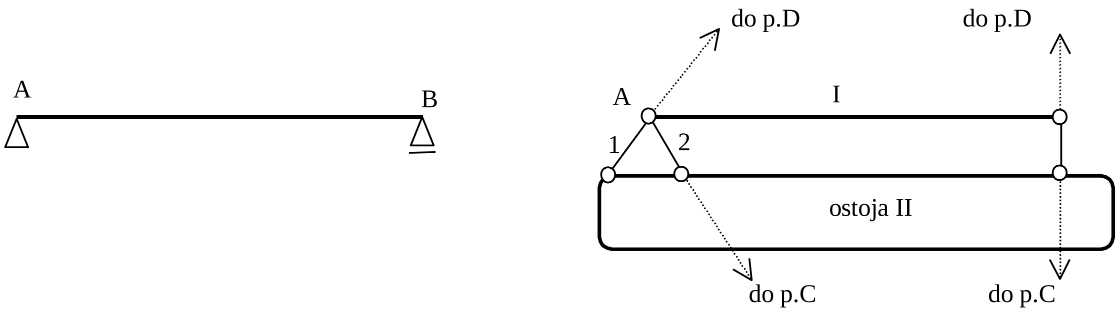
W przykładzie z rysunku a) najpierw myślowo unieruchamiamy jedną z tarcz, np. I. Wówczas punkty A i B są chwilowymi środkami obrotu prętów łączących tarczę II. Kierunki prędkości wirtualnych końców tych prętów przecinają się w punkcie C, który jest chwilowym środkiem obrotu tarczy II. Tak więc tarcza II posiada chwilowy środek obrotu w ruchu względem tarczy I. Plan prędkości wirtualnych nie jest sprzeczny, co wskazuje na geometrycznie zmienne połączenie tarcz.

W przykładzie b) punkty A i B są nieruchome ponieważ są połączone z ostoją. Stanowią one chwilowe środki obrotu prętów I i II. Prędkości wirtualne końców tych prętów w punkcie C posiadają różne kierunki. Tak więc punkt C posiada dwie różne (sprzeczne) prędkości wirtualne, które będą sobie równe tylko jeśli $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$. Oznacza to, że punkt C jest unieruchomiony a cały układ jest geometrycznie niezmienny[4]. Z uwagi na istnienie 3 przegubów (A, B i C) układ nosi nazwę układu 3-przegubowego.

[3] przez analogię do pewnej marki sportowych butów

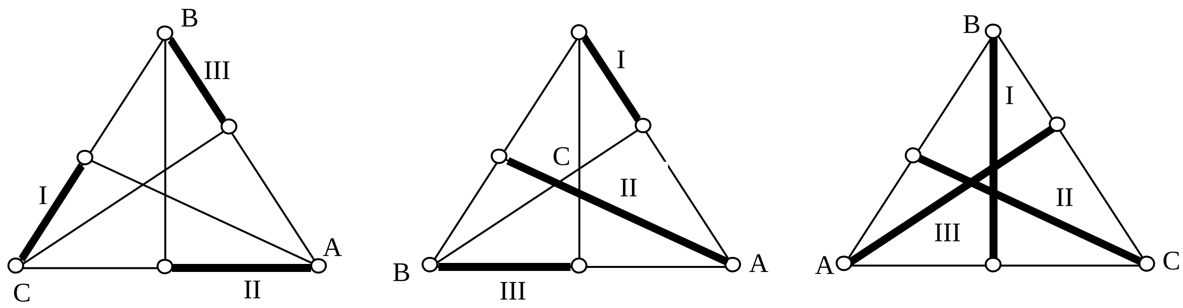
[4] jest oczywiste, że dla unieruchomienia sztywnej tarczy wystarcza unieruchomienie jej w dwóch dowolnych punktach

Przykład zastosowania twierdzenia o 2 tarczach:



Belka AB podparta jest na podporach: przegubowej nieprzesuwnej i przegubowej przesuwnej. Działanie podpory przegubowej zastępujemy równoznacznym układem dwóch prętów 1 i 2. Działanie podpory przesuwnej zastępujemy połączeniem jednym prętem o kierunku prostopadłym do kierunku możliwego przesuwu. Dwie tarcze: I i ostoja II są połączone 3 prętami, których kierunki przecinają się w punktach A, C i D, nie leżącymi na jednej prostej. Zgodnie z twierdzeniem układ jest geometrycznie niezmienny.

Przykład zastosowania twierdzenia o 3 tarczach:



Sześciobok w kształcie trójkąta został usztywniony 3 prętami nie przecinającymi się na płaszczyźnie. Jak widać z rysunku, istnieje wiele możliwości wyboru prętów jako 3 tarcz: I, II i III. Przedstawiono przykładowo 3 możliwości. W każdej z nich tarcza I jest połączona z tarczą II dwoma prętami, których kierunki przecinają się w punkcie A. Podobnie, kierunki 2 prętów łączących tarczę II z III przecinają się w punkcie B, a tarcz I i III — w punkcie C. Punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej, a więc układ jest geometrycznie niezmienny.

Równania równowagi

Z założeń o geometrycznej niezmienności i o równowadze statecznej wynika równowaga statyczna układu. Mówimy, że układ jest w równowadze statycznej, jeśli spełnione są równania równowagi statycznej.

> *WKW równowagi statycznej przestrzennego układu sił jest spełnienie 6 równań równowagi: sumy rzutów sił na 3 osie nierównoległe do siebie oraz sum momentów względem tych osi.*

Dla płaskiego układu sił równania równowagi mogą przyjąć jedną z trzech postaci:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum L = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

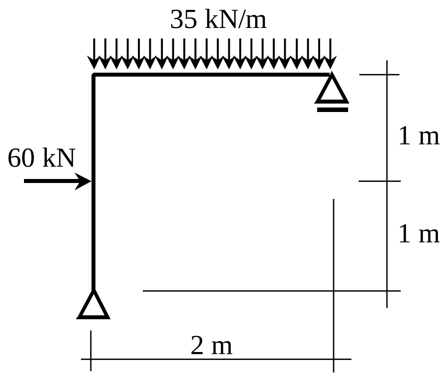
przy czym X # Y (osie X i Y nie są równoległe), L nie ⊥ do AB (oś L nie jest prostopadła do odcinka AB), punkty A, B, C nie są współliniowe (nie leżą na jednej prostej).

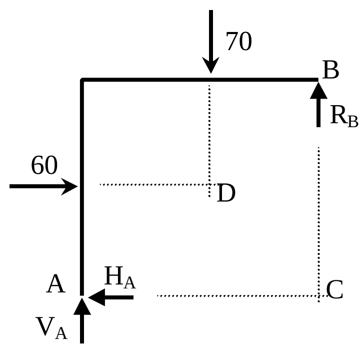
Należy przypomnieć, że dla *zbieżnego płaskiego układu sił* jedynie 2 równania sumy rzutów są liniowo niezależne a dla *płaskiego układu sił równoległych* jedynie 2 równania (sumy momentów i sumy rzutów na oś nie prostopadłą) są liniowo niezależne.

Algorytm obliczania reakcji

1. Zaznaczamy reakcje więzów (zwroty dowolne).
2. Poszukujemy rozprzężonego układu równań równowagi[5] .
3. Ujemny znak reakcji oznacza zwrot przeciwny do założonego - najlepiej nie poprawiać znaków ani zwrotów.
4. Sprawdzenie wykonujemy w taki sposób, aby w równaniu sprawdzającym wystąpiły w miarę możności wszystkie obliczone wielkości.

Przykład obliczenia reakcji:





Odrzucamy myślowo więzy a ich oddziaływanie zastępujemy siłami reakcji. Dla podpory nieprzesuwnej są to: reakcja pionowa V_A oraz reakcja pozioma H_A, dla podpory przesuwnej reakcja R_B. Obciążenie ciągłe zastępujemy wypadkową, przyłożoną w środku rozpiętości rygla.

Aby uzyskać rozprzęgnięty układ równań równowagi w każdym z równaniu musi występować tylko jedna niewiadoma reakcja. Dla wyznaczenia H_A wybieramy więc sumę rzutów na oś *x*, dla V_A — sumę momentów względem p. C (momenty od H_A i R_B są względem tego punktu równe zero), dla R_B natomiast — sumę momentów względem p. A. Tak więc układ równań równowagi możemy zapisać:

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad 60 - H_A = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 60\ \text{kN}\,,$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 60\cdot 1 - 70\cdot 1 + V_A\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 5\ \text{kN}\,,$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 60\cdot 1 + 70\cdot 1 - R_B\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 65\ \text{kN}\,.$$

Sprawdzenie wykonujemy w taki sposób, aby uwzględnić wszystkie obliczone reakcje. Jeżeli wybierzemy punkt D, to momenty od obciążeń zewnętrznych będą równe zero:

[5] rozprzęgnięcie równań, jeśli tylko jest możliwe, oznacza mniejszy nakład obliczeń, mniejsze prawdopodobieństwo pomyłki rachunkowej i – jeśli błąd wystąpi – poprawa ogranicza się jedynie do błędnego równania; pozostałe wyniki mogą być poprawne

$$\sum M_D = V_A \cdot 1 + H_A \cdot 1 - R_B \cdot 1 = 60 + 5 - 65 = 0 \text{ .}$$

Uwaga: Jak wynika z zasady zesztywnienia, kształt konstrukcji nie wpływa na wielkości reakcji. Decyduje tutaj obciążenie i sposób podparcia.