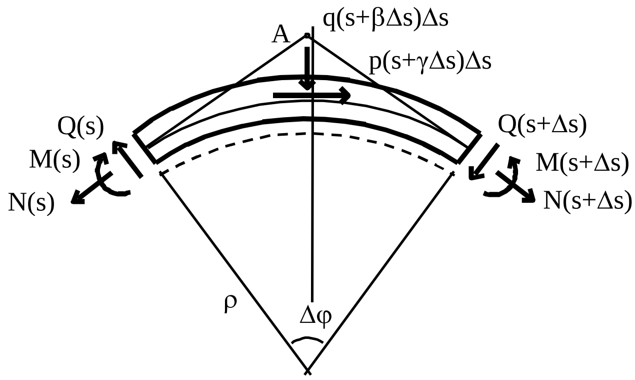
Równania sił przekrojowych

związki różniczkowe sił przekrojowych, równania sił przekrojowych, algorytm zapisu równań, całkowanie obciążenia zadanego dowolną funkcją, zastosowania zasady superpozycji

Związki różniczkowe pomiędzy siłami przekrojowymi dla łuku płaskiego



Rozpatrzmy równowagę elementu o długości *ds* pręta o osi krzywej płaskiej, obciążonego obciążeniem ciągłym *q* - normalnym do osi, oraz *p* - stycznym do osi. Zarówno obciążenie jak i siły przekrojowe zaznaczamy zgodnie z przyjętą konwencją znakowania. Obciążenia możemy zastąpić wypadkowymi, które zgodnie z tw. Lagrange'a oraz po zaniedbaniu małych wyższego rzędu przedstawia rysunek obok. Wycięty element powinien znajdować się w równowadze.

Obliczając sumę rzutów sił na pionową oś symetrii, mamy:

$$-q(s+\beta\Delta s)\Delta s-\frac{dQ(s+\alpha_Q\Delta s)}{ds}\Delta s\cos\frac{\Delta\varphi}{2}-\left[2N(s)+\frac{dN(s+\alpha_N\Delta s)}{ds}\Delta s\right]\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=0,$$

dla sumy rzutów sił na oś poziomą:

$$p(s+\gamma\Delta s)\Delta s-\left[2Q(s)+\frac{dQ(s+\alpha_Q\Delta s)}{ds}\Delta s\right]\sin\frac{\Delta\varphi}{2}+\frac{dN(s+\alpha_N\Delta s)}{ds}\Delta s\cos\frac{\Delta\varphi}{2}=0,$$

a dla sumy momentów względem punktu *A*:

$$-\frac{dM(s+\alpha_M\Delta s)}{ds}\Delta s+\left[2Q(s)+\frac{dQ(s+\alpha_Q\Delta s)}{ds}\Delta s\right]\rho\tan\frac{\Delta\varphi}{2}-p(s+\gamma\Delta s)\Delta s\left[\frac{\rho}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}-\rho\right]=0$$

Jeśli podzielimy równania przez *Δs*, uwzględniając, że dla małego kąta *Δφ* jest: $\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\to 1,\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\to\frac{\Delta\varphi}{2},\tan\frac{\Delta\varphi}{2}\to\frac{\Delta\varphi}{2},\frac{\Delta\varphi}{2}\to\frac{\Delta s}{2\rho},$

oraz że dla $\Delta s\to 0\ \Rightarrow\ f(s+\alpha\Delta s)\to f(s)$, otrzymamy ostatecznie zależności różniczkowe między obciążeniem i siłami wewnętrznymi w postaci:

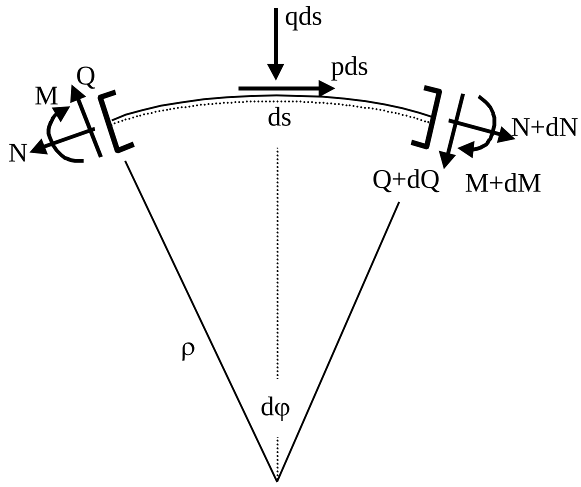
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dM(s)}{ds}&=Q(s)\\ \frac{dQ(s)}{ds}+\frac{N(s)}{\rho}&=-q(s)\\ \frac{dN(s)}{ds}-\frac{Q(s)}{\rho}&=-p(s)\end{aligned}}$$

Wniosek 1 (z pierwszego równania) Pochodna momentu zginającego po współrzędnej łukowej jest równa sile poprzecznej (z dokładnością do znaku: znak może ulec zmianie dla inaczej przyjętych spodów).

Wniosek 2 W przekroju zerowania się siły poprzecznej moment zginający osiąga wartość ekstremalną.

Należy na zakończenie podkreślić, że znaki w wyprowadzonych równaniach zależą od przyjętej konwencji znakowania obciążeń i sił przekrojowych. Zastosowanie odmiennej konwencji prowadzi w ogólności do innych znaków wyrażeń.

(to samo inaczej)



Pręt zakrzywiony obciążony jest obciążeniem stycznym do osi p oraz obciążeniem normalnym do osi q. Wycinamy infinitezymalny odcinek łukowy ds pręta, redukując obciążenia działające na odrzucone części układu do przekrojów cięcia. Możemy przyjąć, z dokładnością do małych wyższego rzędu, że odcinek ten posiada stały promień krzywizny ρ a obciążenie na nim zastąpić wypadkowymi, jak na rysunku. Ponadto mamy:

$$ds = \rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{2} = \frac{ds}{2\rho},$$

a z uwagi na to, że kąt $d\varphi$ jest również mały, możemy zapisać:

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} = \frac{ds}{2\rho}, \quad \cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1.$$

Z sumy rzutów na oś x, mamy:

$$pds + dN\cos\frac{d\varphi}{2} - 2Q\sin\frac{d\varphi}{2} - dQ\sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad pds + dN - \frac{Q}{\rho}ds - \frac{dQds}{2\rho} = 0.$$

Ostatnie wyrażenie przed znakiem równości jest małą wyższego rzędu, którą możemy zaniedbać. Po podzieleniu obu stron przed ds, dostajemy:

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{\rho} = -p.$$

Z sumy rzutów na oś y, mamy:

$$-qds - dQ\cos\frac{d\varphi}{2} - 2N\sin\frac{d\varphi}{2} - dN\sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -qds - dQ - \frac{N}{\rho}ds - \frac{dNds}{2\rho} = 0.$$

Postępując podobnie jak poprzednio, otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{dQ}{ds} + \frac{N}{\rho} = -q.$$

Obliczając sumę momentów względem punktu przyłożenia wypadkowych obciążenia na odcinku łukowym, uwzględnimy jedynie momenty skupione na końcach oraz momenty od składowych pionowych sił poprzecznych, pomijając od razu, jako małe wyższego rzędu, pozostałe składniki:

$$-dM + \left(2Q\frac{ds}{2} + dQ\frac{ds}{2}\right)\cos\frac{d\varphi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -dM + Qds + dQ\frac{ds}{2} = 0\,.$$

Pomijając znowu małą wyższego rzędu i dzieląc przez *ds*, mamy:

$$\frac{dM}{ds} = Q\,.$$

Równania sił przekrojowych

Równania sił przekrojowych zapisujemy przedziałami, wyznaczonymi przez *punkty charakterystyczne*:

- początek i koniec pręta,
- punkty przyłożenia więzów,
- punkty przyłożenia obciążeń skupionych,
- punkty stanowiące początek i koniec obciążeń ciągłych,
- punkty połączenia prętów o różnych krzywiznach.

Punkty charakterystyczne wyznaczają *przedziały charakterystyczne* równań sił przekrojowych.

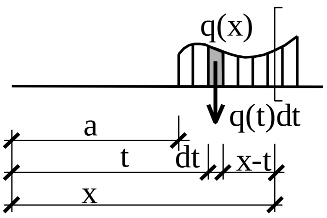
Przedziałem charakterystycznym nazywamy przedział, w którym możemy pojedynczymi równaniami zapisać funkcje określające siły przekrojowe.

Algorytm zapisu równań sił przekrojowych

1. Analiza geometrycznej niezmienności układu,
2. Obliczenie reakcji,
3. Wyznaczenie punktów i przedziałów charakterystycznych,
4. Dokonanie cięć w kolejnych przedziałach:
- odrzucamy część „zewnętrzną” układu, redukując układ sił zewnętrznych, przyłożonych do tej części, względem środka ciężkości przekroju poprzecznego cięcia,
- suma rzutów sił na kierunek normalnej zewnętrznej jest siłą podłużną (osiową),
- suma rzutów sił na kierunek poprzeczny jest siłą ścinającą (poprzeczną, tnącą),
- suma momentów od obciążeń działających na odrzuconą część układu jest momentem zginającym (gnącym),
5. Po zapisaniu równań sił przekrojowych, obliczamy wartości na końcach przedziałów charakterystycznych oraz poszukujemy ich ekstremów (jeśli występują),
6. Rysujemy wykresy w skali, pamiętając o odkładaniu momentów zginających po stronie włókien rozciąganych oraz znakowaniu sił podłużnych i poprzecznych.

Całkowanie obciążenia zadanego dowolną funkcją

Jeśli obciążenie *q(x)* jest zadane dowolną funkcją — obowiązują wzory:

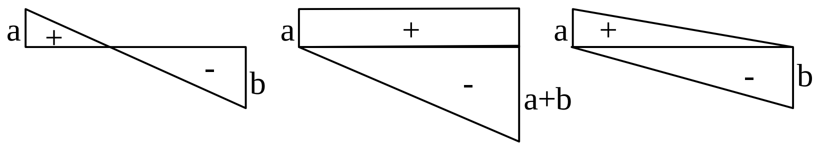


$$M(x) = \ldots \int_a^x q(t)(x-t)dt$$

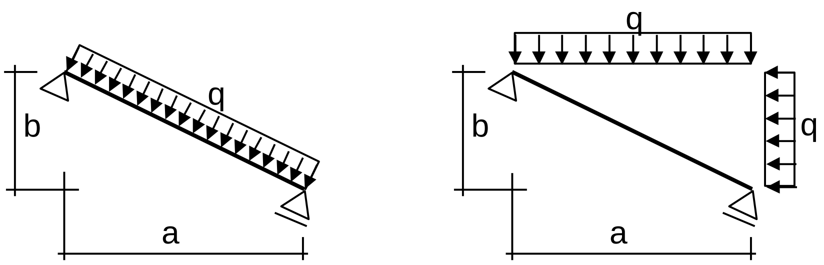
$$Q(x) = \ldots \int_a^x q(t)dt$$

Zastosowania zasady superpozycji (addytywności)

Następujące trzy obciążenia są statycznie równoważne:



Podobnie, poniższe dwa obciążenia są statycznie równoważne:



Identyczny rozkład na liniowe obciążenia pionowe i poziome można dokonać dla obciążenia radialnego[1] łuku.

[1] prostopadłego do krzywoliniowej osi łuku