

Belki

belki proste, najprostsze przypadki belek prostych, superpozycja wykresów, belki ukośne o różnych obciążeniach, belki przegubowe i gerberowskie

Belki proste

Dla pręta prostego, $\rho \rightarrow \infty$, $ds \equiv dx$, obciążonego jedynie obciążeniem poprzecznym, $p(x) \equiv 0$, ze wzorów różniczkowych dla sił przekrojowych wynika, że siła podłużna jest stała, a ponadto:

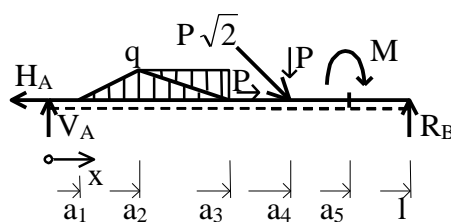
$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x), \quad \text{oraz:} \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Z powyższych równań wynika kilka wniosków:

- Wniosek 1** Zerowanie się siły poprzecznej wskazuje na ekstremum momentu zginającego.
- Wniosek 2** Dla obciążenia poprzecznego zadanego funkcją n -tego stopnia, funkcja siły poprzecznej jest stopnia $n+1$ a momentu zginającego - stopnia $n+2$. Jeżeli więc brak obciążenia ciągłego to moment zginający jest funkcją liniową a siła poprzeczna jest stała. Jeżeli obciążenie poprzeczne jest stałej intensywności, moment jest funkcją 2. stopnia a siła poprzeczna jest funkcją liniową. Jeżeli obciążenie poprzeczne jest liniowo zmienne moment jest funkcją 3. stopnia a siła poprzeczna funkcją 2. stopnia.
- Wniosek 5** Z ostatniego równania oraz z przyjętej konwencji rysowania momentów zginających po stronie włókien rozciąganych wynika, niezależnie od przyjętych konwencji znakowania q i M , że wypukłość wykresu momentów jest zawsze zgodna ze zwrotem działania obciążenia poprzecznego.

Przykład

Równania sił przekrojowych



Wyznaczamy reakcje układu i określamy przedziały charakterystyczne. W trzecim przedziale od a_2 do a_3 obciążenie trójkątne zastępujemy sumą (a właściwie różnicą) obciążeń prostokątnego i trójkątnego. Łatwiej bowiem jest zapisać równania dla sumy takich obciążeń niż dla obciążenia trapezowego (jaki powstaje przy cięciu wewnątrz przedziału).

$$0 < x < a_1$$

$$M(x) = V_A x$$

$$Q(x) = V_A$$

$$N(x) = H_A$$

$$a_1 < x < a_2$$

$$M(x) = V_A x - \frac{q}{a_2 - a_1} (x - a_1) \frac{x - a_1}{2} \frac{x - a_1}{3}$$

$$Q(x) = V_A - \frac{q}{a_2 - a_1} (x - a_1) \frac{x - a_1}{2}$$

$$N(x) = H_A$$

$$a_2 < x < a_3$$

$$M(x) = V_A x - q \frac{a_2 - a_1}{2} \left(x - a_2 + \frac{a_2 - a_1}{3} \right) -$$

$$- \frac{x - a_2}{2} + \frac{q}{a_3 - a_2} (x - a_2) \frac{x - a_2}{2} \frac{x - a_2}{3}$$

$$Q(x) = V_A - q \frac{a_2 - a_1}{2} - q(x - a_2) + \frac{q}{a_3 - a_2} (x - a_2) \frac{x - a_2}{2},$$

$$N(x) = H_A$$

$a_3 < x < a_4$, W - wypadkowa obciążeń ciągłych, a_w - położenie wypadkowej

$$M(x) = V_A x - W(x - a_w)$$

$$Q(x) = V_A - W = \text{const}$$

$$N(x) = H_A$$

$$a_4 < x < a_5$$

$$M(x) = V_A x - W a_w - P(x - a_4)$$

$$Q(x) = V_A - W - P = \text{const}$$

$$N(x) = 0$$

$$a_5 < x < l$$

$$M(x) = V_A x - W a_w - P(x - a_4) + M$$

$$Q(x) = V_A - W - P = \text{const}$$

$$N(x) = 0$$

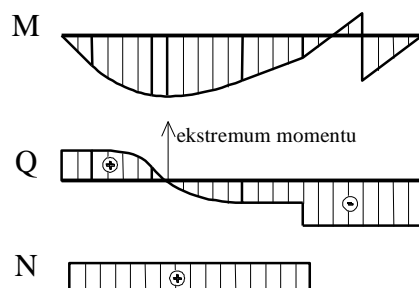
albo (z drugiej strony belki dla x_1)

$$M(x_1) = R_B x_1$$

$$Q(x_1) = -R_B$$

$$N(x_1) = 0$$

Wykresy sił przekrojowych:



Wnioski¹:

1. wykres momentów:

- wypukłość wykresu momentów jest zgodna ze zwrotem działania obciążenia ciągłego,
- pod siłą skupioną występuje załamanie w kierunku działania tej siły,
- w przekroju obciążonym momentem skupionym następuje rozsuniecie wykresu (skok) o wartość tego momentu,
- na granicach obciążenia ciągłego pochodne są ciągłe,

2. wykres sił poprzecznych:

- pod siłą skupioną występuje skok w kierunku tej siły i równy jej wartości,
- w przekrojach w których $q = 0$ zachodzi równość pochodnych ,
- zmianie pochodnej obciążenia ciągłego odpowiada punkt przegięcia,

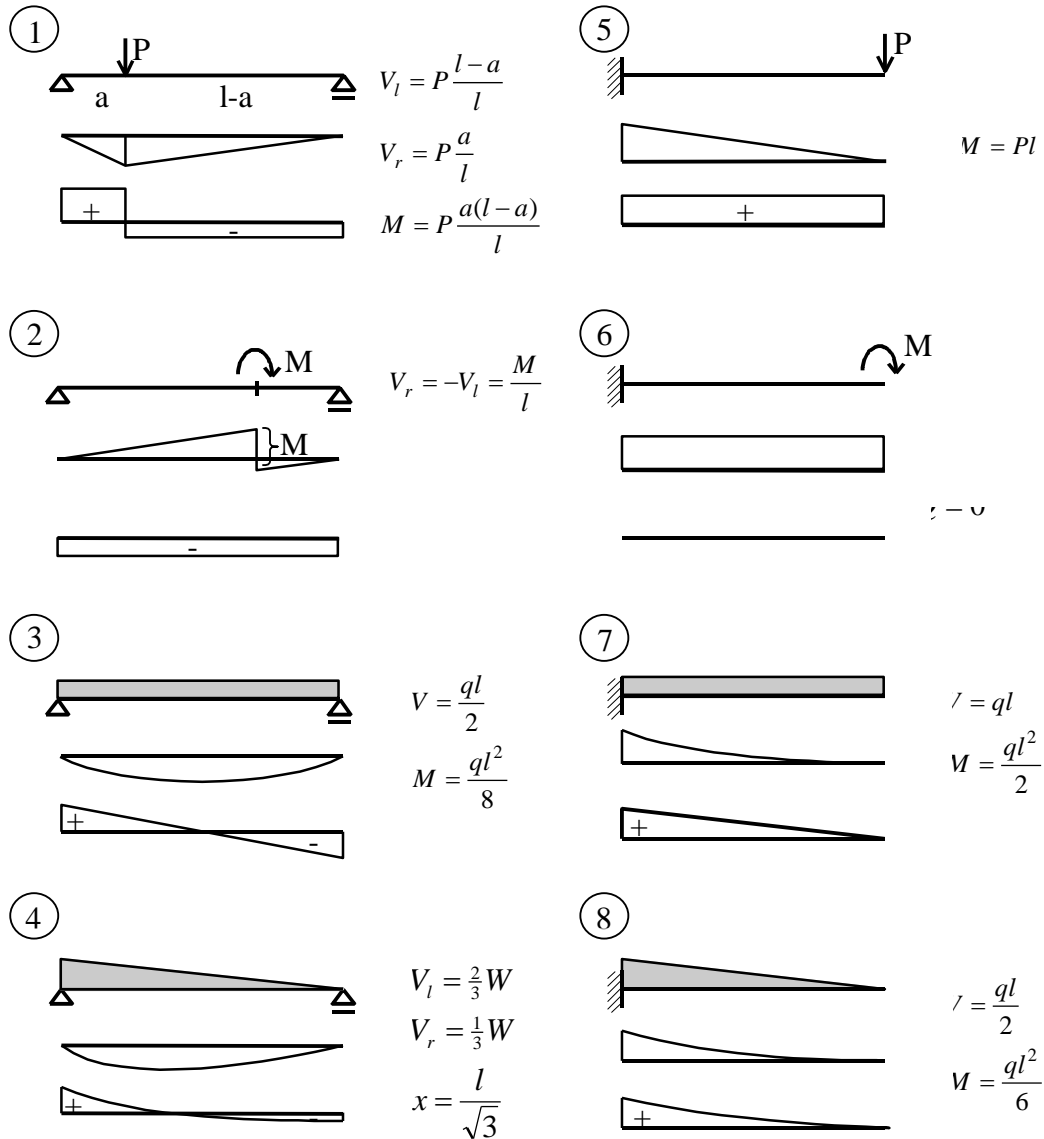
3. wykres sił podłużnych,

- bardzo prosty dla belek obciążonych jedynie obciążeniem ciągłym o kierunku poprzecznym.

Dla przypomnienia powtórzmy, że momenty zginające rysujemy po stronie włókien rozciąganych a znaki ich są w zasadzie dowolne podczas gdy znaki sił poprzecznych i podłużnych są istotne dla jednoznaczności rozwiązania.

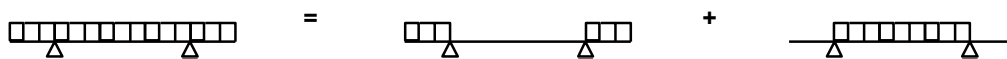
Najprostsze przypadki obciążenia belki

¹ wykresy powinny być zawsze rysowane w skali (osobna skala na osi odciętych dla współrzędnej osi pręta a osobna na osi rzędnych dla wartości siły przekrojowej: momentu zginającego, siły poprzecznej czy siły podłużnej).

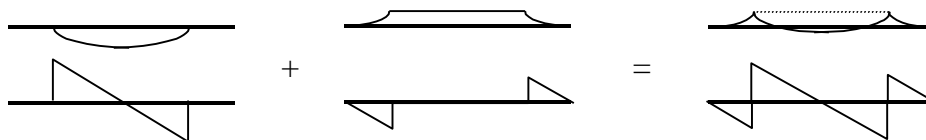


- ad 1. Jeśli siła działa w środku pręśła, maksymalny moment pod siłą wynosi $Pl/4$.
- ad 2. Moment skupiony powoduje względne rozsuniecie części wykresu: obie części wykresu są do siebie równoległe.
- ad 3. Wykres momentów jest parabolą 2. stopnia.
- ad 4. Wykres momentów jest parabolą 3. stopnia a sił poprzecznych krzywą 2. stopnia. Podobnie dla przypadku 8.

Znając rozwiązania dla powyższych najprostszych przypadków, można od razu rysować wykresy dla bardziej złożonych obciążeń, korzystając z zasady superpozycji. Np. obciążenie belki z przewieszieniami rozbijamy na 2 wsporniki (z lewej i z prawej) oraz na belkę obciążoną na całej długości pręśła:



Sumując wykresy, otrzymujemy:

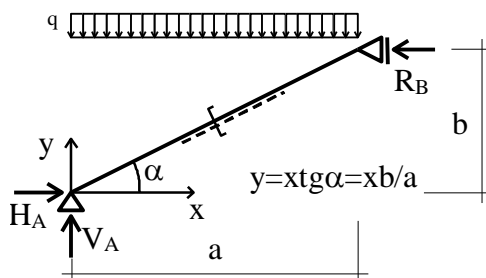


Belki ukośne

Układając równania sił przekrojowych odpowiednio dobieramy obliczeniowy układ współrzędnych. Należy zwrócić uwagę na:

- przyjmowany układ współrzędnych (równania sił przekrojowych zależą od przyjętego układu²)
- znak przecięcia wewnątrz przedziału charakterystycznego, wskazany nawiasem kwadratowym (na zewnątrz nawiasu jest część odrzucana)
- różne definicje intensywności obciążenia $q(x)$. Intensywność obciążenia może być oddawana w jednostkach siły na metr (w rzucie pionowym lub poziomym, przykłady a) i b) poniżej) albo w jednostkach na metr bieżący belki (przykłady c), d) i e) poniżej.

a) intensywność obciążenia q podana jest w kN/m w rzucie pionowym



Jest jeden przedział charakterystyczny dla równań sił przekrojowych.

$$M(x) = V_A x - H_A y - \frac{qx^2}{2}$$

$$Q(x) = (V_A - qx) \cos \alpha - H_A \sin \alpha$$

$$N(x) = (-V_A + qx) \sin \alpha - H_A \cos \alpha$$

Jest oczywiste, że siła poprzeczna (funkcja liniowa) zmienia znak, co oznacza istnienie miejsca zerowego siły poprzecznej³ i istnienie w tym przekroju ekstremalnego momentu zginającego:

² ale same siły przekrojowe, jako wielkości obiektywne, nie zależą od przyjętego układu. Bez względu w jakim układzie prowadzimy obliczenia końcowy wynik w postaci wykresów będzie identyczny.

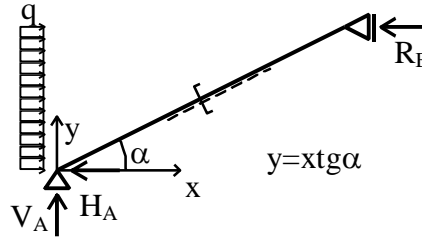
³ łatwo stwierdzić, wstawiając wartości reakcji, że miejsce zerowe wystąpi w środku rozpiętości belki

$$M_{\max} = \frac{q(l \cos \alpha)^2}{8}$$

Możemy sprawdzić, że pochodna momentu zginającego⁴ jest równa sile poprzecznej⁵.

$$\frac{dM(x)}{ds} = \frac{dM(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \cos \alpha \frac{dM(x)}{dx} = \dots = Q(x)$$

b) intensywność obciążenia q podana jest w kN/m w rzucie poziomym



Jak poprzednio, mamy jeden przedział charakterystyczny i podobne ekstremum momentów zginających.

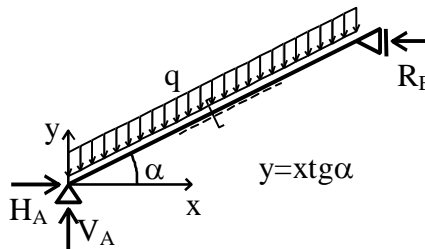
$$M(x) = V_A x + H_A y - \frac{qy^2}{2}$$

$$Q(x) = V_A \cos \alpha + (H_A - qy) \sin \alpha$$

$$N(x) = -V_A \sin \alpha + (H_A - qy) \cos \alpha$$

$$M_{\max} = \frac{q(l \sin \alpha)^2}{8}$$

c) intensywność obciążenia q podana jest w kN/m.b.⁶



Znowu jest jeden przedział charakterystyczny i ekstremum momentów w środku pręśla.

$$M(x) = V_A x - H_A y - q \frac{x}{\cos \alpha} \frac{x}{2}$$

$$Q(x) = V_A \cos \alpha + H_A \sin \alpha - \frac{qx}{\cos \alpha} \cos \alpha$$

$$N(x) = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha + \frac{qx}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

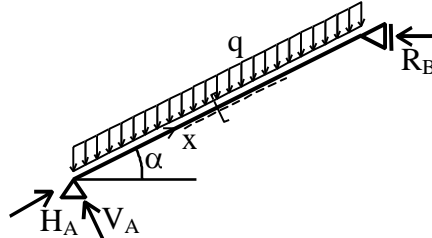
⁴ przypominamy, że ma to być pochodna po współrzędnej związanej z osią pręta, a więc nie po x lecz po s

⁵ z dokładnością do znaku

⁶ na metr bieżący (osi podłużnej belki)

$$\frac{dM(s)}{ds} = \frac{dM(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \cos \alpha \frac{dM(x)}{dx}$$

d) Taki sam przykład, jak powyżej, ale z inaczej obliczanymi reakcjami



Niewiele to zmienia same obliczenia sił przekrojowych i – choć wzory wyglądają nieco inaczej – wyniki (w postaci wykresów) będą takie same.

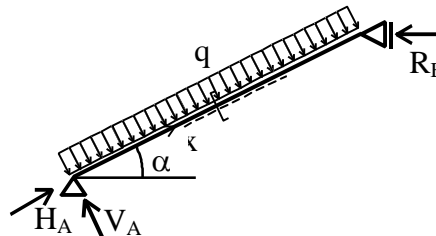
$$M(x) = V_A x - qx \frac{x \cos \alpha}{2}$$

$$Q(x) = V_A - qx \cos \alpha$$

$$N(x) = -H_A + qx \sin \alpha$$

$$M_{\max} = \frac{ql(l \cos \alpha)}{8}$$

e) intensywność obciążenia, prostopadłego do osi belki, jest podana w jednostkach siły na metr bieżący osi belki



Tym razem wydaje się celowe przyjęcie kierunków niewiadomych reakcji na podporze A z uwzględnieniem kierunku osi belki i kierunku obciążenia oraz przyjęcie współrzędnej przekroju cięcia we współrzędnej ξ , związanej z osią pręta. Znakomicie ułatwia to zapis równań sił przekrojowych.

$$M(\xi) = V_A \xi - \frac{q\xi^2}{2}$$

$$Q(\xi) = V_A - q\xi$$

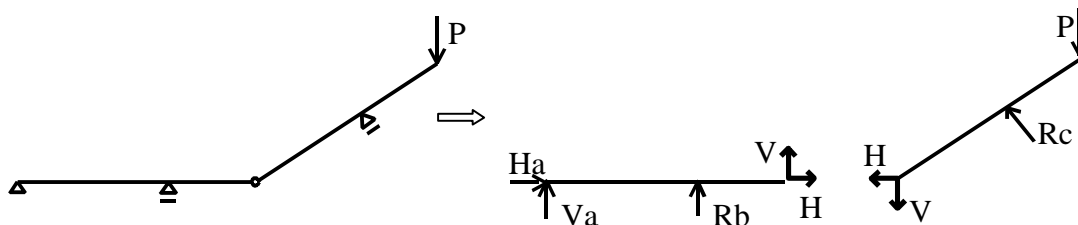
$$N(\xi) = -H_A$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

Dla przeciwiczenia metody zapisu równań sił przekrojowych, można spróbować ponownego zapisu dla reakcji pion/poziom na podporze A i poziomej osi współrzędnych.

Belki przegubowe

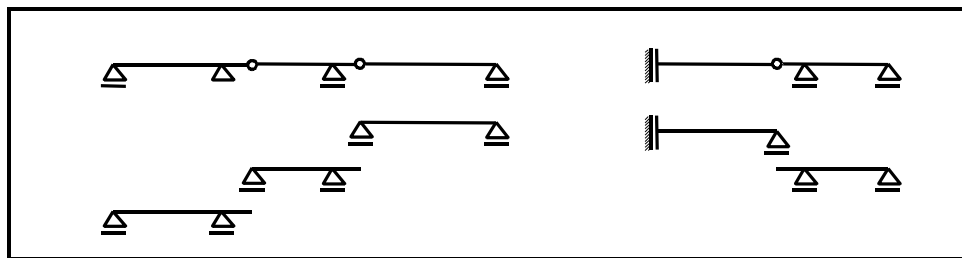
Moment zginający w przegubie jest równy zero. W przegubie działa jedynie siła o niezna-nej wartości i kierunku. Możemy zawsze ją przedstawić w postaci dwóch sił o znanym kierunku lecz niezna-nej wartości.



Otrzymujemy dwa układy belek prostych, a w miejscu cięcia przykładamy siły V i H . Siły te mają przeciwne zwroty w każdym z podukładów (zasada akcji i reakcji). Po rozbiciu belki przegubowej na belki proste, rozwiązujemy każdą z nich z osobna, wyznaczając niezna-ne siły w przegubach z odpowiednich równań równowagi dla podukładów.

Belki gerberowskie⁷

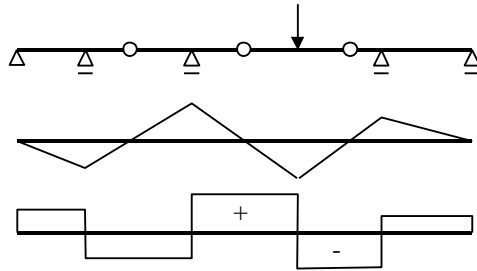
Jeśli oś belki przegubowej jest linią prostą (tzw. *belka gerberowska*), to rozwiązanie belki znacznie się upraszcza. Aby układ taki był statycznie wyznaczalny, może istnieć tylko jedna reakcja styczna do osi belki. Po jej wyznaczeniu, możemy określić oraz narysować wykres sił podłużnych uwzględniając wszystkie obciążenia styczne do osi belki. Obciążenia te nie będą miały wpływu na siły poprzeczne i na momenty zginające, dlatego też w dalszym toku obliczeń nie bierzemy je pod uwagę. Belkę podstawową zastępujemy układem belek prostych, opartych jedna na drugiej w taki sposób, aby w otrzymanym układzie belek prostych każda z nich była statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna:



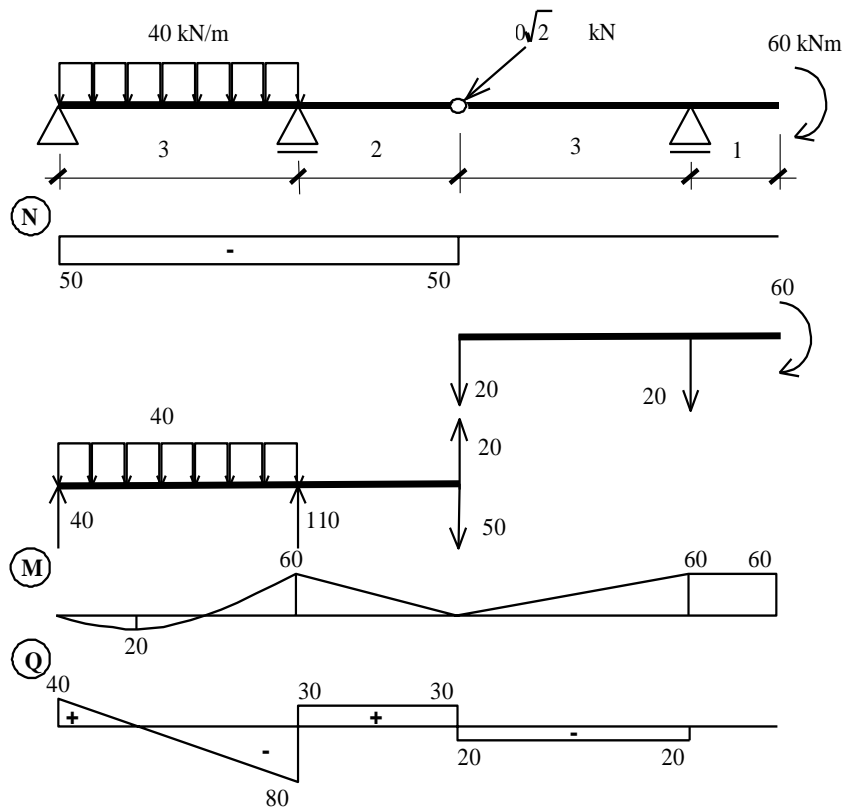
Obliczamy reakcje belek prostych i rozwiązujemy je, poczynając od belek „górných”. Wykresy przedstawiamy w postaci zbiorczej - dla całej belki przegubowej.

Należy przypomnieć, że *przegub* nie jest punktem charakterystycznym równań sił przekrojowych. Korzystając z tej informacji możemy w prostych przypadkach od razu naszkicować wykres momentów, a na jego podstawie i wykres sił poprzecznych:

⁷ od nazwiska niemieckiego inżyniera który opatentował zastosowanie takich belek



Przykład



Komentarz odnośnie do algorytmu:

- wyznaczamy jedyną poziomą reakcję belki, pochodzącą od obciążeń poziomych (jako np. składowych poziomych obciążeń ukośnych)
- rysujemy wykres siły podłużnej
- rozbijamy belkę na belki proste
- rozwiązujemy belki, zaczynając od belki górnej, przechodząc stopniowo „w dół” aż do belki najniższej położonej
- rysujemy wykresy zbiorcze momentów zginających i sił poprzecznych