Kratownice

Kratownicą *nazywamy układ prętów prostych, połączonych przegubowo przegubami bez tarcia, obciążonych jedynie siłami skupionymi w przegubach.*

Należy zwrócić uwagę, że praktyczna realizacja przegubów odbiega - na pierwszy rzut oka - od przyjętego założenia o braku momentów w miejscach połączenia prętów. Jeśli jednak pręty są dostatecznie podatne na zginanie, to przyjęty model dobrze oddaje charakter pracy konstrukcji.

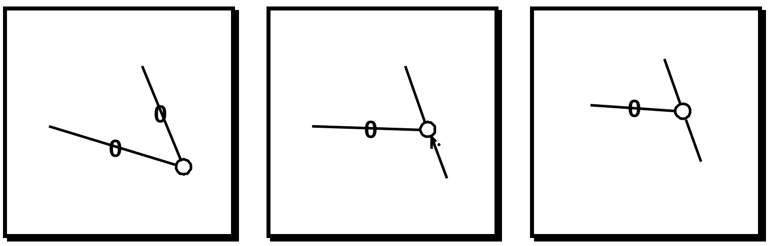
Ponieważ na końcach prętów (w przegubach bez tarcia) moment jest równy zero a wskutek braku obciążenia poprzecznego funkcja momentu jest co najwyżej liniowa, mamy:

$$\left.\begin{aligned} &M(x) = Ax + B \\ &M(0) = 0 \\ &M(l) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad M(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x) \equiv 0 \quad \text{oraz} \quad N(x) = \text{const}$$

W prętach kratownicy występuje jedynie stała siła podłużna.

Twierdzenia o prętach zerowych

W kratownicach często spotyka się pręty, w których siła podłużna jest równa zero. Są to tzw. *pręty zerowe*. Nie oznacza to jednak, że pręty takie nie są potrzebne - spełniają one ważną rolę zapewniając geometryczną niezmienność układu oraz często redukując tzw. *długość wyboczeniową pręta* (o czym szerzej w drugim semestrze wykładów). Poniższy rysunek przedstawia sytuacje, w których od razu można wskazać pręty zerowe.

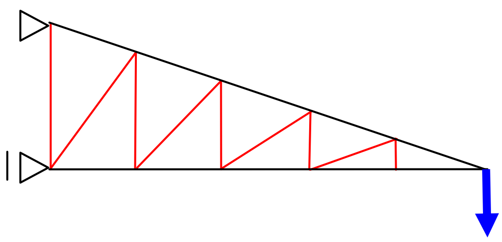


Jeśli w nieobciążonym węźle schodzą się dwa pręty, to oba są zerowe.

Jeśli węzeł, w którym schodzą się dwa pręty, jest obciążony siłą o kierunku jednego z prętów, to drugi pręt jest zerowy.

Jeśli w nieobciążonym węźle schodzą się trzy pręty, przy czym dwa z nich leżą na jednej prostej, to trzeci pręt jest zerowy.

Pręty zerowe są stosowane głównie do dodatkowego podparcia prętów ściskanych (zmniejszenie długości wyboczeniowej). Np. w poniższym układzie duża część prętów to pręty zerowe usztywniające ściskany pręt dolnego pasa:



Metoda analitycznego równoważenia węzłów

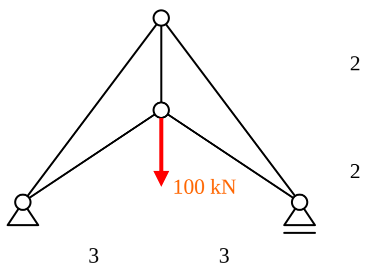
Jeśli wytniemy węzeł kratownicy, przykładając do niego obciążenie zewnętrzne (siła skupiona, zgodnie z definicją) i oddziaływanie prętów na węzeł (również siły skupione), to otrzymamy zbieżny układ sił, który musi znajdować się w równowadze:

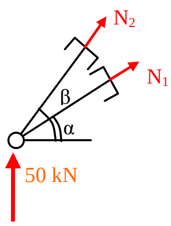
$$\sum X = \sum Y = 0$$

Rozpoczynając od węzła z dwoma prętami i postępując analogicznie dla każdego z kolejnych węzłów, określamy siły, z jakimi pręty oddziałują na węzły, a tym samym siły podłużne w prętach.

Znaki sił podłużnych są bardzo istotne w kratownicach. Aby wyeliminować ewentualne pomyłki w określeniu tych znaków, najlepiej zawsze zakładać zwrot siły rozciągającej (od węzła). Wówczas znak dodatni siły oznacza zgodność z założonym zwrotem, czyli siłę rozciągającą, a znak ujemny — siłę ściskającą.

Przykład





węzeł A:

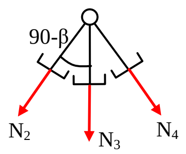
$$\Sigma X = 0: \quad N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta = 0$$

$$\Sigma Y = 0: \quad 50 + N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\beta = 0$$

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{\sqrt{13}} = 0.832, \quad \sin\alpha = \tfrac{2}{\sqrt{13}} = 0.555$$

$$\cos\beta = \tfrac{3}{5} = 0.6, \quad \sin\beta = \tfrac{4}{5} = 0.8$$

skąd: $N_1 = 90.14\,\text{kN}, \; N_2 = -125\ \text{kN}.$



węzeł C:

$$\Sigma X = 0: \quad -N_2 \cos\beta + N_4 \cos\beta = 0 \quad \rightarrow \quad N_4 = N_2 = -125\ \text{kN}$$

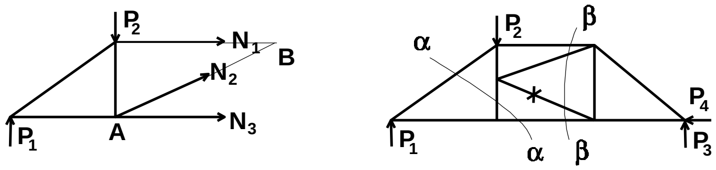
$$\Sigma Y = 0: \quad -N_2 \sin\beta - N_3 - N_4 \sin\beta = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = 200\ \text{kN}$$

Podobnie, z warunku symetrii zadania znajdujemy siłę w ostatnim pręcie DB równą $N_5 = 90.14$ kN.

Metoda Rittera

Często interesuje nas siła w pojedynczym pręcie. Aby ją określić metodą równoważenia węzłów, musimy, chcąc nie chcąc, rozwiązać wszystkie węzły „po drodze” do danego pręta. Jest to uciążliwe rachunkowo i — jeśli jest wiele równoważonych węzłów — łatwo może prowadzić do pomyłek.

W takich wypadkach stosuje się metodę Rittera, polegającą na przecięciu kratownicy na dwa rozłączne podukłady, przekrojem przechodzącym przez dany pręt. Po odrzuceniu jednej z części i zaznaczeniu sił w przeciętych prętach, wyznacza się je z warunku równowagi podukładu.

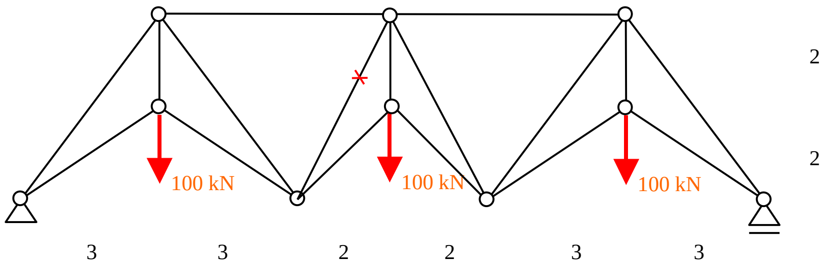


Jeśli przekrój przechodzi przez 3 pręty, które nie są ani równoległe ani ich kierunki nie przecinają się w jednym punkcie, to z 3 równań równowagi można wyznaczyć siły w przecinanych prętach. Taki przekrój będziemy nazywać *przekrojem prostym* (α-α, w odróżnieniu od *przekroju złożonego*, β-β).

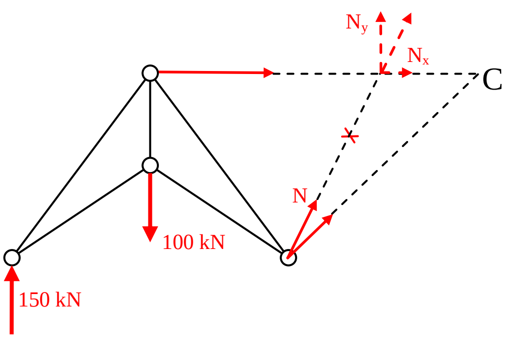
Jeśli to możliwe należy stosować rozprzężone układy równań równowagi (z takich samych powodów jak przy wyznaczaniu reakcji).

Jeśli nie da się dokonać przekroju prostego przez interesujący nas pręt, to potrzebne są dodatkowe przekroje pomocnicze. Np. na powyższym rysunku, w kratownicy o układzie typu „K” należy najpierw z pomocniczego przekroju α—α znaleźć siłę w jednym z czterech prętów przekroju zasadniczego β—β.

<u>Przykład</u>



Dokonujemy przekroju przez wskazany pręt i 2 sąsiednie pręty:



Aby rozprzęgnąć równanie równowagi obliczamy momenty względem punktu C (momenty od dwóch prętów zerują się) a wektor siły N jako wektor swobodny przesuwamy wzdłuż linii działania do takiego punktu w którym zeruje się moment od jednej ze składowych siły, mamy więc:

$\Sigma M_C = 0:$

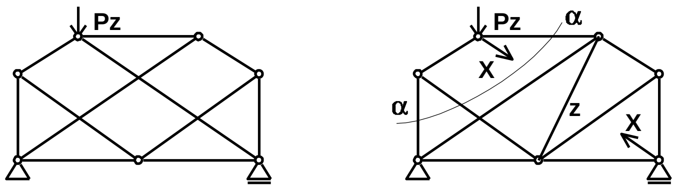
$150 \cdot 10 - 100 \cdot 7 + N_Y \cdot 2 = 0$

skąd:

$N_Y = -400$ kN, i ostatecznie: $\dfrac{N_Y}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} = 0.8944 \quad \rightarrow \quad N = \dfrac{N_Y}{0.8944} = -447.2$ kN

Metoda wymiany prętów (Henneberga)

W przypadkach gdy nie można znaleźć przekroju prostego, a liczba przekrojów pomocniczych dla przekroju złożonego jest znaczna, bardziej efektywna jest tzw. *metoda wymiany prętów (Henneberga)*.



Wyjściowy układ (rysunek z lewej) modyfikujemy w następujący sposób (rysunek z prawej):

– usuwamy jeden z prętów, zastępując jego istnienie siłami w nim występującymi X (na razie nieznanymi),

– aby zapewnić geometryczną niezmienność układu, wstawiamy dodatkowy pręt, tzw. *pręt zastępczy* i żądamy aby siła w nim występująca była równa zero.

Zmodyfikowany układ jest w pełni analogiczny do wyjściowego, zarówno kinematycznie jak i statycznie. Kinematyczna równoważność jest zapewniona przez geometryczną niezmienność układu oraz identyczne — w stosunku do wyjściowego — położenie węzłów. Statyczna równoważność jest spełniona, gdyż nie zmieniliśmy wielkości statycznych, występujących w układzie: usunęliśmy pręt, ale zastąpiliśmy jego działanie siłą w nim występującą oraz wprowadziliśmy dodatkowy pręt, ale żądamy, aby siła w nim występująca była równa zero.

Siły w usuniętym pręcie, określamy z warunku zerowania się siły w pręcie zastępczym. Korzystamy (i to wielokrotnie) z zasady superpozycji. Siła N_z w pręcie zastępczym będzie sumą sił w tym pręcie pochodzących od obciążeń zewnętrznych i od sił X:

$$N_Z = N_Z^P + N_Z^X = N_Z^P + X \cdot N_Z^{X=1}, \text{ skąd: } X = -\frac{N_Z^P}{N_Z^{X=1}}$$

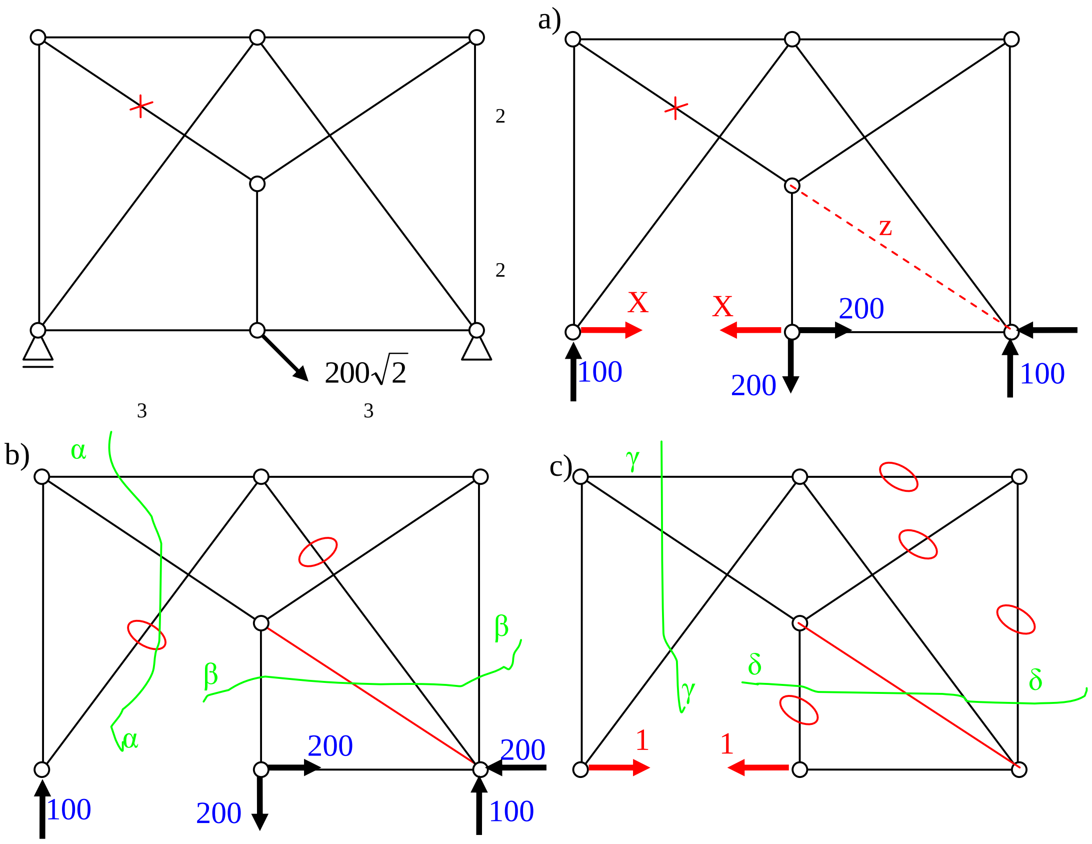
Aby więc wyznaczyć siłę X, rozwiązujemy kratownicę dwukrotnie: osobno dla sił zewnętrznych i osobno dla sił jednostkowych ($X=1$). Siłę w dowolnym pręcie obliczamy stosując superpozycję rozwiązań:

$$N_i = N_i^P + X \cdot N_i^{X=1}.$$

Tak więc metoda sprowadza się do wymiany prętów w kratownicy, skąd jej nazwa. W metodzie przed przystąpieniem do rachunków warto zastanowić się nad wyborem pręta usuwanego oraz miejscem wstawienia pręta zastępczego, pamiętając, że warunkiem koniecznym wprowadzania pręta zastępczego jest przywrócenie geometrycznej niezmienności układu (co oczywiście dobrze jest sprawdzić).

Przykład

Obliczyć siłę w zaznaczonym pręcie:



a) Usuwamy jeden z prętów zastępując go nieznaną siłą X i dostawiamy pręt zastępczy przywracający geometryczną niezmienność układu.

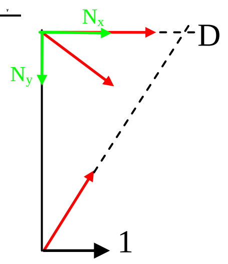
b) Obliczamy siły od podstawowego układu obciążenia. Wyszukujemy i zaznaczamy pręty zerowe. Z przekroju α-α znajdujemy wartość siły we wskazanym pręcie:

$$\Sigma Y = 0: \quad 100 - N_X^P \frac{2}{\sqrt{13}} = 0 \quad \rightarrow \quad N_X^P = 180.3 \text{ kN}$$

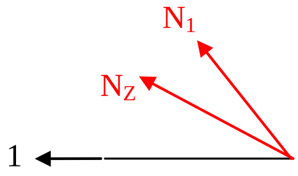
a z przekroju β-β i sumy rzutów na oś poziomą wnioskujemy, że pręt zastępczy jest prętem zerowym: $N_Z^P = 0$

c) Obliczamy siły od samozrównoważonego, jednostkowego układu sił X = 1. Wyszukujemy i zaznaczamy pręty zerowe. Z przekroju γ-γ, mamy:

γ



δ



$$\Sigma M_D = 0:$$
$$1 \cdot 4 + N_y \cdot 3 = 0$$

skąd

$$N_Y = -1.333 \text{ kN},$$

czyli

$$N_X^1 = N_Y \tfrac{\sqrt{13}}{2} = -2.404 \text{ kN}.$$

Z przekroju δ-δ natomiast wynika:

$$\Sigma X = 0: \quad -1 - N_Z^1 \frac{3}{\sqrt{13}} - 0.6 N_1 = 0$$
$$\Sigma Y = 0: \quad N_Z^1 \frac{2}{\sqrt{13}} + 0.8 N_1 = 0$$

, skąd dostajemy:

$$N_1 = -0.6934 N_Z^1 = \ldots = 1.667 \text{ kN}$$
$$N_Z^1 = -2.404 \text{ kN}$$

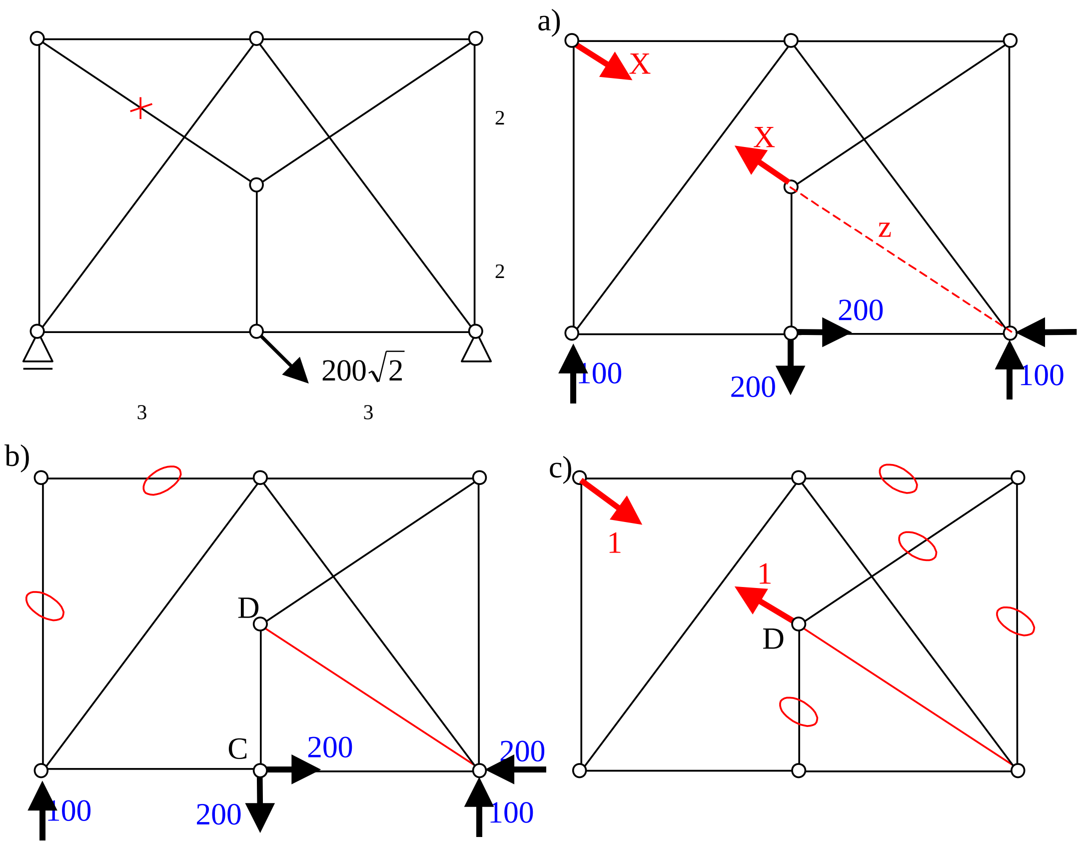
d) Obliczamy ostatecznie:

$$N_Z = 0 \quad \to \quad X = \frac{N_Z^P}{N_Z^1} = \frac{0}{-2.404} = 0$$

$$N_X = N_X^P + X \cdot N_X^1 = 180.3 + 0 \cdot (-2.404) = 180.3 \text{ kN}.$$

(drugi sposób)

Usuwamy pręt dla którego szukamy wartości siły podłużnej, pręt zastępczy wstawiamy tak jak poprzednio:

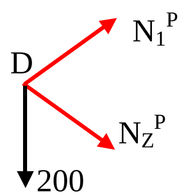


a) Usuwamy zaznaczony w temacie pręt zastępując go nieznaną siłą X i dostawiamy pręt zastępczy przywracający geometryczną niezmienność układu.

b) Obliczamy siły od podstawowego układu obciążenia. Wyszukujemy i zaznaczamy pręty zerowe. Z równowagi węzła C mamy:

$$\Sigma Y = 0: \quad -200 + N_{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{CD} = 200 \text{ kN}$$

a z równowagi węzła D dostajemy:



$$\Sigma X = 0: \quad 0.832 \cdot N_1^P - 0.832 \cdot N_Z^P = 0 \quad \rightarrow \quad N_1^P = -N_Z^P$$

$$\Sigma Y = 0: \quad -200 - 2 \cdot 0.555 \cdot N_Z^P = 0 \quad \rightarrow \quad N_Z^P = -180.3 \text{ kN}$$

c) Obliczamy siły od samozrównoważonego, jednostkowego układu sił X = 1. Wyszukujemy i zaznaczamy pręty zerowe. Wprost z równowagi węzła D mamy:

$$N_Z^{X=1} = 1$$

Obliczamy siłę X (jest to poszukiwana siła we wskazanym pręcie):

$$X = -\frac{N_Z^P}{N_Z^{X=1}} = -\frac{-180.3}{1} = 180.3 \text{ kN}.$$

Jak widać, w tym przypadku drugi sposób wymagał mniej obliczeń.