Wprowadzenie do rachunku tensorowego

konwencja sumacyjna, transformacja przez obrót, definicja tensora II rzędu, wartości i kierunki własne tensora, wzory na wartości i kierunki własne w przestrzeni 2-wymiarowej

Konwencja sumacyjna Einsteina

Powtórzenie się 2 wskaźników oznacza sumowanie, są to tzw. *wskaźniki nieme*. Wskaźniki nieme można dowolnie zmieniać, zachowując jednak regułę ich powtarzania się:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \equiv a_i x_i \equiv a_j x_j \equiv a_k x_k$$

Iloczyn skalarny wektorów zapisujemy: $\mathbf{uv} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \sum_{i=x,y,z} u_i v_i = u_i v_i (= u_k v_k)$,

a długość wektora (skalar): $|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \sum_{i=x,y,z} u_i u_i = u_i u_i$

Układ i równań zapisujemy z użyciem *wskaźników żywych*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a_{ij}x_j + b_i = 0 \text{ (sumowanie po } j\text{, tyle równań ile } i\text{)}$$

Jeśli powtarzające się wskaźniki nie należy sumować, będziemy pisali je w nawiasach, np. suma kwadratów kosinusów kierunkowych prostej w przestrzeni: $a_{(n)i}a_{(n)i} = n_i n_i = 1$ (n bez nawiasów oznaczałoby podwójne sumowanie: po n i po i).

Pochodne po współrzędnych oznaczać będziemy przecinkiem przed indeksem współrzędnej po której różniczkujemy:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f_{,i}.$$

Transformacja przez obrót

Transformacja układu współrzędnych zapisuje się:

$$\xi_i = a_{ij} x_j$$

gdzie a są współrzędnymi macierzy przejścia (niesymetrycznej, ortonormalnej), np. dla obrotu o kąt α na płaszczyźnie:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Elementy pierwszego wiersza zawierają kolejno kosinusy kątów pomiędzy pierwszą osią nowego układu (obróconego) a osiami układu wyjściowego. W drugim wierszu widnieją kosinusy między drugą osią nowego układu a osiami układu wyjściowego.

Macierz a jest ortogonalna: $a_{ik}a_{jk} = 0$ dla $i \neq j$, oraz unormowana: $a_{ik}a_{jk} = 1$ dla $i = j$. Oznacza to, że wiersze i kolumny macierzy przejścia są wersorami osi ortogonalnego układu nowego w starym układzie (wyjściowym).

Delta Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ 1 & \text{dla} \quad i = j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Warunek ortonormalności zapiszemy więc: $a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad i, j = \xi, \eta, \quad k = x, y$. Jest także:

$$b_{ij} \delta_{ij} = b_{ii}.$$

Definicja tensora II rzędu

Tensorem (drugiego rzędu) nazywamy macierz kwadratową (3^2 *współrzędnych), której współrzędne przy obrocie układu współrzędnych transformują się zgodnie z prawem (zwanym prawem transformacji tensorowej):*

$$\boxed{t_{ij} \equiv a_{ik} a_{jl} t_{kl}.}$$

gdzie a_{ik}, a_{jl} są dostawami kierunkowymi osi (kosinusami kątów między osiami *i*-*k*, *j*-*l*, czyli współrzędnymi wersorów osi w układzie współrzędnych). Są elementami macierzy przejścia ze starego układu współrzędnych do nowego.

Prawo transformacji jest liniowe i jednorodne względem współrzędnych tensora.

Każdy obiekt geometryczny, który przy zmianie układu współrzędnych transformuje się zgodnie z prawem transformacji tensorowej, jest tensorem.

Do tensorów stosują się wszelkie zasady rachunku tensorowego, a zapis tensorowy jest niezależny od przyjętego układu współrzędnych (obojętne czy kartezjańskiego czy też krzywoliniowego, nieortogonalnego).

Uwaga 1: Będziemy zajmowali się wyłącznie tensorami symetrycznymi: $t_{ij} = t_{ji}$.

Uwaga 2: Ilość współrzędnych zależy od wymiaru przestrzeni i rzędu tensora (w *m*-wymiarowej przestrzeni tensor *n*-tego rzędu ma m^n współrzędnych).

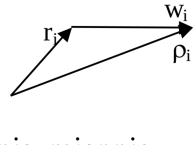
Przykłady:

Dotychczas poznaliśmy:

tensory 0. rzędu (3^0 współrzędnych), czyli skalary: $a_{kk} = a = const$,

tensory 1. rzędu (3^1 współrzędnych); jak widać z zapisu są nimi współrzędne punktu (które możemy uważać za wektory wodzące), $w_i = a_{ij} w_j$,

tensorem 1. rzędu są też wektory (nie tylko wodzące); dowód:



$w_i = \rho_i - r_i$ = (rys.obok) = $a_{ij} \rho_j - a_{ij} r_j = a_{ij} (\rho_j - r_j) = a_{ij} w_j$.

tensor 2. rzędu jednostkowy - delta Kroneckera δ_{ij}; jest to tensor niezmienniczy, gdyż dla układu ortogonalnego: $\delta_{ij} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$.

Tensorem 2. rzędu jest iloczyn współrzędnych 2 wektorów (tzw. iloczyn skalarny zewnętrzny, diadyczny):

$$v_i w_i = a_{ik} v_k a_{jl} w_l = a_{ik} a_{jl} v_k w_l ,$$

przykładem takiego iloczynu jest iloczyn wektora siły *P* i wersora normalnej zewnętrznej *n* do płaszczyzny przekroju:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x n_x & P_x n_y & P_x n_z \\ P_y n_x & P_y n_y & P_y n_z \\ P_z n_x & P_z n_y & P_z n_z \end{pmatrix}$$

Interpretacja geometryczna jest następująca: składowe na przekątnej głównej są to rzuty składowych *P* na kierunek normalnej *n*, równoległej do osi *x, y, z* a składowe poza tą przekątną to rzuty na 2 prostopadłe kierunki leżące na płaszczyźnie przekroju.

Dowód:

$P_x\, n_x = P_x \cos(n,x)$, podobnie dla pozostałych „jednoimiennych”

$P_x^2\, n_x^2 + P_x^2\, n_y^2 + P_x^2\, n_z^2 = P_x^2\, (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\,) = P_x^2$,

skąd wynika, że są to sumy geometryczne 3 wzajemnie do siebie prostopadłych składowych. Jest to więc nic innego jak rozkład wektora na kierunek normalnej zewnętrznej i 2 kierunki styczne do płaszczyzny, wzajemnie prostopadłe.

Niedługo poznamy nowe, szczególnie przydatne tensory 2. rzędu.

Tensor pomnożony przez wektor daje w wyniku wektor:

$$t_{ij} w_j = a_{ik} a_{jl} t_{kl} a_{jk} w_k = a_{jl} a_{jk} t_{kl} a_{ik} w_k = \delta_{kl} t_{kl} w_i = t_{kk} w_i = t w_i \,.$$

Powyższe twierdzenie może być przyjęte jako definicja tensora, z której można wyprowadzić wzory transformacyjne. Jeśli w powyższym wzorze wektor zastąpimy wersorem normalnej do pewnego kierunku, to definicję tę można wypowiedzieć:

Tensor n-tego rzędu jest to obiekt geometryczny, którego rzut na dowolny kierunek jest tensorem n-1 rzędu.

Wynika stąd, że rzuty tensora 2. rzędu na kierunki trzech osi układu współrzędnych są trzema wektorami, każdy o trzech współrzędnych (skalarnych), skąd całkowita ilość współrzędnych (skalarnych) dla tensora 2. rzędu w przestrzeni 3D wynosi 9.

Zagadnienie wartości własnych

Poszukujemy takiej transformacji (takiego obrotu) układu współrzędnych, dla której współrzędne tensora na przekątnej głównej $t_{(n)(n)} = t$ będą ekstremalne. Współrzędną z przekątnej głównej tensora uzyskuje się dwukrotnie rzutując tensor na kierunek: za pierwszym razem otrzymując wektor $t_i = n_j t_{ij}$, a za drugim – jego współrzędną $t = n_i n_j t_{ij}$. Zadanie sprowadza się do poszukiwania ekstremum funkcji *t* z warunkiem pobocznym: $n_i n_i = 1$ (suma kwadratów cosinusów kierunkowych a więc długość wersora normalnej), czyli:

$$f = n_i n_j t_{ij} + \lambda(1 - n_i n_i) \quad \to \quad f_{,n_i} = 0.$$

Obliczamy pochodną:

$$(n_i n_j t_{ij})_{,n_i} - \lambda(n_i n_i)_{,n_i} = (n_i n_i \delta_{ij} t_{ij})_{,n_i} - \lambda 2n_i = 2n_i \delta_{ij} t_{ij} - 2\lambda n_i = 2n_j t_{ij} - 2\lambda \delta_{ij} n_j = 2(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j$$

,

i przyrównując do zera, otrzymujemy:

$$\boxed{(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0}$$

W powyższym równaniu jeden ze wskaźników jest żywy, co oznacza że mamy do czynienia z układem 3 równań (np. i = 1, 2, 3). Są to równania algebraiczne, liniowe i jednorodne ze względu na wektor normalnej.

Do identycznego układu równań dochodzimy poszukując takiego kierunku dla którego wektor naprężenia $t_i = t_{ij} n_j$ byłby współliniowy z normalną zewnętrzną: $t_i = \lambda n_i$, skąd po porównaniu wyrażeń: $t_{ij} n_j = \lambda n_i$ od razu dostajemy powyższe równanie. Oznacza to, że szukając kierunków dla których wartości na przekątnej byłyby ekstremalne (ściślej: chodzi o warunek ich stacjonarności), otrzymujemy macierz w tzw. postaci diagonalnej: jedynie na przekątnej głównej znajdują się wartości niezerowe (rzuty na pozostałe kierunki prostopadłe do normalnej są zero).

Tensor transformowany do układu współrzędnych określonego z powyższych równań ma postać diagonalną (współrzędne poza przekątną główną są równe zero).

Poszukujemy nietrywialnego (niezerowego) rozwiązania powyższego układu. W matematyce takie zagadnienie nazywa się zagadnieniem wartości własnych tensora: $\lambda = t_{(n)}$, określonych przez n_j - współrzędne wersorów kierunków własnych (głównych) tensora. Przytoczmy bez dowodu dwa twierdzenia algebry:

WKW istnienia rozwiązania niezerowego liniowego układu równań, jest zerowanie się wyznacznika macierzy głównej układu.

Ale jednocześnie:

WKW, aby macierz kwadratowa była nieosobliwa jest nie zerowanie się jej wyznacznika.

Jeśli więc zażądamy $\det(t_{ij} - t_{(n)} \delta_{ij}) = 0$, to tym samym żądamy liniowej zależności układu równań. Wówczas spośród 3 równań układu jedynie 2 równania są liniowo niezależne. Aby więc rozwiązać układ równań musimy dołączyć równanie z warunku pobocznego poszukiwania ekstremum, wiążące dostawy kierunkowe wektora własnego (suma kwadratów = 1).

Po rozpisaniu warunku zerowania się wyznacznika, otrzymujemy równanie sześcienne na wartości własne:

$$\boxed{t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3 = 0.}$$

W matematyce dowodzi się, że dla macierzy symetrycznej powyższe równanie ma 3 pierwiastki rzeczywiste, które oznaczymy (t_1, t_2, t_3). Z jednoznaczności rozwiązania wnioskujemy, że – niezależnie od pierwotnego układu współrzędnych – równanie sześcienne jest takie samo, tzn. że zarówno wartości własne jak i współczynniki równania są takie same dla danego tensora. Mówimy o nich że są niezmiennikami:

t_1, t_2, t_3 są nazywane *niezmiennikami głównymi*, wartościami głównymi, wartościami własnymi tensora $\boldsymbol{t}$,

I_1, I_2, I_3 są nazywane niezmiennikami podstawowymi tensora **t**, przy czym:

$I_1 = t_{ii}$ (= suma po przekątnej),

$I_2 = t_{ij}\ t_{ji}$ (suma podwyznaczników),

$I_3 = t_{ij}\ t_{jk}\ t_{ki}$ (wyznacznik główny macierzy tensora).

Pomnóżmy dwa równania zagadnienia wartości własnych odpowiednio

$$\begin{aligned} t_{ij} n_j^1 - t_1 n_i^1 = 0 \quad & /n_i^2 \\ t_{ij} n_j^2 - t_2 n_i^2 = 0 \quad & /n_i^1 \end{aligned},$$

i odejmijmy od siebie, uwzględniając symetrię tensora $t_{ij} = t_{ji}$ oraz zamieniając miejscami wskaźniki nieme

$$t_{ij} n_j^1 n_i^2 = t_{ji} n_j^1 n_i^2 = t_{ij} n_i^1 n_j^2,$$

otrzymujemy:

$$t_2 \delta_{ij} n_i^1 n_j^2 - t_1 \delta_{ij} n_j^1 n_i^2 = (t_2 - t_1) n_i^1 n_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_i^1 n_i^2 = 0, \quad \text{gdy} \quad t_1 \neq t_2 .$$

Jeśli wartości własne są różne, to odpowiadające im kierunki główne są prostopadłe. Jeśli 2 wartości własne są sobie równe, to każdy kierunek na płaszczyźnie jest kierunkiem głównym. Jeśli 3 wartości własne są sobie równe, to każdy kierunek w przestrzeni jest kierunkiem głównym.

Jaki jest sens powyższych wywodów? Jeśli tensor, zapisany w dowolnym układzie współrzędnych, transformujemy do układu wyznaczonego przez kierunki główne, to otrzymamy tensor w postaci diagonalnej, przy czym wartości główne występujące na diagonalnej przyjmują wartości ekstremalne (ściślej 2 wartości ekstremalne a jedna „stacjonarna").

Zamiast 9 współrzędnych tensora (lub 6 współrzędnych dla tensora symetrycznego) „wystarczają" 3 wartości własne, co m. in. znacznie upraszcza zapis:

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \overset{(x,y,z)\to(1,2,3)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix}.$$

Mając współrzędne tensora w jednym układzie możemy na podstawie wzorów transformacyjnych obliczyć jego współrzędne w innym układzie.

Zagadnienie wartości własnych w przestrzeni 2-wymiarowej (na płaszczyźnie)

Jeśli niezmiennik podstawowy $I_3 = 0$ (z takim przypadkiem mamy do czynienia jeśli np. n-ta kolumna i odpowiadający jej n-ty wiersz zawierają same zera, ale nie tylko), to jedna z wartości własnych jest równa zero i równanie sześcienne redukuje się do równania kwadratowego:

$$t^2 - I_1 t + I_2 = 0.$$

Pierwiastki tego równania (dla $t_{iz} \equiv 0$) wyrażają się wzorami:

$$\boxed{t_{1;2} = \frac{1}{2}\left(t_{xx} + t_{yy}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(t_{xx} - t_{yy}\right)^2 + 4t_{xy}^{\ 2}}}$$

a układ kierunków głównych określony jest kątem α, o jaki należy obrócić wyjściowy układ współrzędnych:

$$\begin{cases} (t_{xx} - t)\cos\alpha + t_{xy}\sin\alpha = 0 \\ t_{xy}\cos\alpha + (t_{yy} - t)\sin\alpha = 0 \end{cases},$$

skąd, dla wartości własnych (1, 2) znajdujemy z pierwszego równania:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha_i = \frac{t_i - t_{xx}}{t_{xy}}},$$

a z drugiego równania:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha_i = \frac{t_{xy}}{t_i - t_{yy}}}$$

gdzie kąt α_i oznacza kąt mierzony od osi *x* do *i*-tego kierunku głównego. Ponieważ pierwszy niezmiennik podstawowy jest sumą wyrazów na przekątnej głównej i jest niezależny od kąta obrotu układu współrzędnych, wynika stąd ortogonalność 2 kierunków głównych:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{t_1 - t_{xx}}{t_{xy}} \frac{t_{xy}}{t_2 - t_{yy}} = \frac{t_{xx} + t_{yy} - t_2 - t_{xx}}{t_2 - t_{yy}} = -1.$$