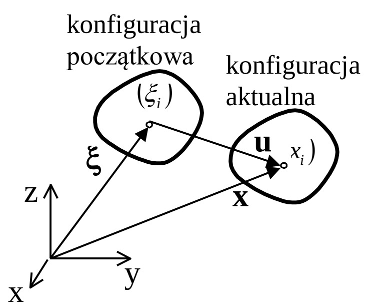
Stan odkształcenia

współrzędne materialne i przestrzenne, tensory odkształceń skończonych, założenie o małych pochodnych przemieszczeń, tensor małych odkształceń, równania Cauchy, interpretacja składowych tensora Cauchy, analiza stanu odkształcenia, równania nierozdzielności

Współrzędne materialne i przestrzenne



Jeżeli na ośrodek ciągły odkształcalny działa układ obciążeń to ośrodek ten doznaje pewnej deformacji. Wprowadźmy globalny układ odniesienia w postaci kartezjańskiego układu współrzędnych i wyróżnijmy 2 stany: konfigurację pierwotną (początkową, nieobciążoną) oraz konfigurację ciała aktualną (końcową, odkształconą). Niech współrzędne ξ oznaczają współrzędne kartezjańskie w konfiguracji pierwotnej a x - w konfiguracji aktualnej. Przebieg procesu pod względem geometrycznym zostanie określony przez znajomość zależności:

$$u_i = x_i - \xi_i,$$

gdzie $u_i = u_i\,(u, v, w)$ jest wektorem przemieszczenia z konfiguracji pierwotnej do aktualnej.

> *Odkształceniem nazywamy zmianę kształtu ośrodka pod wpływem obciążeń. Deformacja ciała jest pojęciem szerszym, obejmującym obok odkształcenia także ruch sztywny ośrodka. Przemieszczenie jest to różnica (geometryczna) wektorów wodzących punktu w konfiguracji końcowej i początkowej.*

Jako konfigurację odniesienia możemy przyjąć zarówno konfigurację pierwotną jak i aktualną (ale także i pewną dowolną konfigurację pośrednią). Opis możemy prowadzić dwojako:

traktując współrzędne ξ_α jako niezależne identyfikujemy w przestrzeni położenie cząstek materialnych, interesuje nas ruch określonego punktu ciała - są to tzw. *współrzędne Lagrange'a* albo inaczej *materialne,*

traktując współrzędne x_i jako niezależne identyfikujemy w przestrzeni położenie punktów przestrzennych, interesuje nas co dzieje się w określonym punkcie przestrzeni - są to tzw. *współrzędne Eulera* albo inaczej *przestrzenne*.

W mechanice ciała stałego używane są najczęściej współrzędne materialne (określa się położenie wybranego punktu materialnego), w hydrodynamice - przestrzenne (dla ustalonego punktu przestrzeni określa się prędkość przepływu, ciśnienie itp.).

Tensory odkształceń skończonych

Pochodne względem współrzędnych materialnych i przestrzennych wyrażą się odpowiednio:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} = x_{i,\alpha} = u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}, \quad \xi_{\alpha,i} = \delta_{\alpha i} - u_{\alpha,i},$$

ich różniczki zupełne odpowiednio:

$$dx_i = x_{i,\alpha} d\xi_\alpha, \quad d\xi_\alpha = \xi_{\alpha,i} dx_i,$$

gdzie wielkości $x_{i,\alpha}, \xi_{\alpha,i}$ są tzw. *gradientami deformacji*, stanowiącymi podstawową miarę deformacji ciała.

Kwadraty długości elementarnego odcinka w konfiguracji pierwotnej i aktualnej zapiszemy w obu układach współrzędnych jako:

$$ds_0^2 = d\xi_\alpha d\xi_\alpha = d\xi_\alpha d\xi_\beta \delta_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha,i} dx_i \xi_{\beta,j} dx_j \delta_{\alpha\beta}, \quad ds^2 = dx_i dx_i = \ldots = x_{i,\alpha} d\xi_\alpha x_{j,\beta} d\xi_\beta \delta_{ij}.$$

Ich różnica, a więc kwadrat zmiany długości elementarnego odcinka, wynosi:

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - d\xi_\alpha d\xi_\alpha = \begin{cases} \left(x_{i,\alpha} x_{j,\beta} \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\right) d\xi_\alpha d\xi_\beta \\ \left(\delta_{ij} - \xi_{\alpha,i} \xi_{\beta,j} \delta_{\alpha\beta}\right) dx_i dx_j \end{cases}$$

Zdefiniujmy odpowiednio tensor odkształcenia lagranżowski $E_{\alpha\beta}$ i eulerowski e_{ij}, jako:

$$E_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\left(x_{i,\alpha} x_{j,\beta} \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\right), \qquad e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \xi_{\alpha,i} \xi_{\beta,j} \delta_{\alpha\beta}\right).$$

Tensorowy charakter powyższych obiektów jest oczywisty (jako iloczynów zewnętrznych 2 wektorów). Wyrażając zmienne niezależne w powyższych definicjach poprzez współrzędne przemieszczenia, otrzymujemy:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\left(u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}\right)\left(u_{j,\beta} + \delta_{j\beta}\right)\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\right] = \ldots = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{k,\alpha} u_{k,\beta}\right),$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\delta_{ij} - \left(\delta_{\alpha i} - u_{\alpha,i}\right)\left(\delta_{\beta j} - u_{\beta,j}\right)\delta_{\alpha\beta}\right] = \ldots = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{\alpha,i} u_{\alpha,j}\right).$$

Uwagi na temat miar deformacji

Zasadniczymi (pierwotnymi) pojęciami są ruch i materiał. Jeżeli przyjmiemy miarę deformacji w postaci stosunku długości włókna odkształconego do długości pierwotnej:

$$\lambda = \frac{l}{l_0}$$

to dla konstrukcji budowlanych wyniki będą w niewielkich granicach $0.999 < \lambda < 1.001$, co jest kłopotliwe rachunkowo.

Możliwy jest inny wybór funkcji $\varepsilon = f(\lambda): \quad f(\lambda = 1) = 0$. Np. rozwijając funkcję $f(\lambda)$ w szereg Taylora wokół 1, mamy:

$$f(\lambda) = f(a) + \frac{\lambda - a}{1!} f'(a) + \frac{(\lambda - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(\lambda - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

żądając, aby:

$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1$ oraz $\forall \lambda > 0: \quad f'(0) > 0$ (monotoniczność funkcji)

możemy wynik zapisać ogólnie w postaci podanej przez R. Hilla:

$$\varepsilon(n) = f(\lambda) = \frac{\lambda^{2n} - 1}{2n},$$

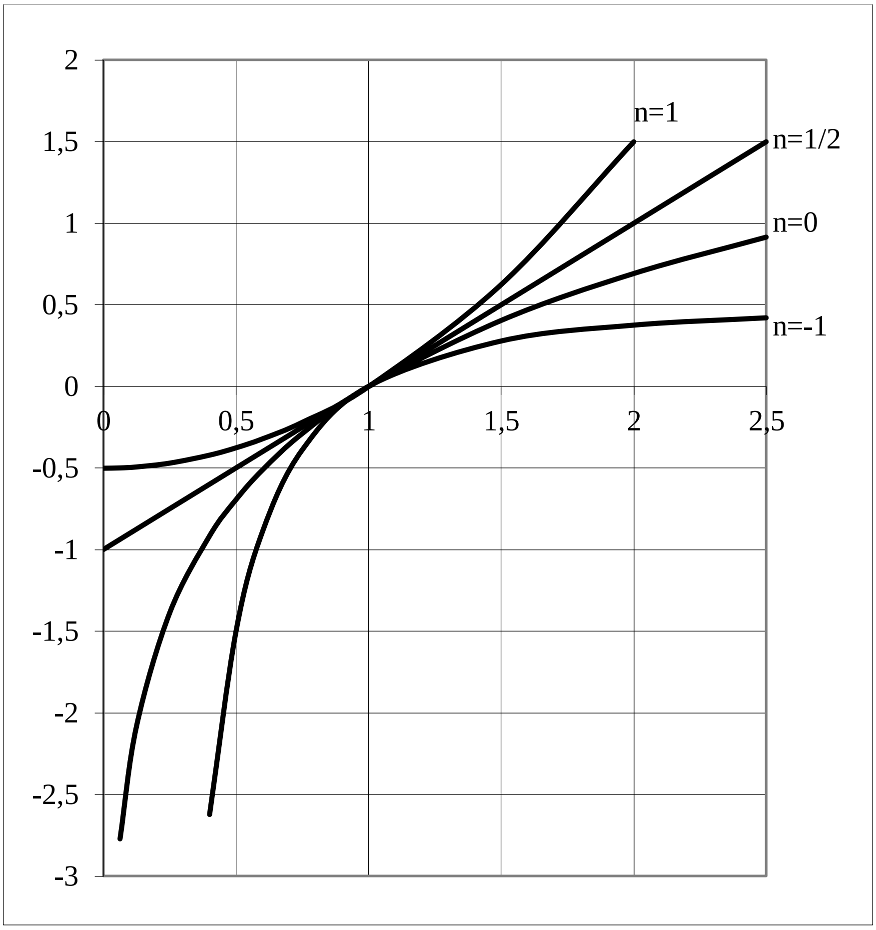
skąd dla:

$$n=\tfrac{1}{2}:\quad \varepsilon=\lambda-1=\frac{l-l_0}{l_0}=\frac{\Delta l}{l_0}$$, tensor Cauchy (odkształceń infinitezymalnych)

$$n=1:\quad \varepsilon=\frac{\lambda^2-1}{2}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^2-1\right]=\tfrac{1}{2}\frac{l^2-l_0^2}{l_0^2}$$, tensor Greena (Eulera)

$$n=-1:\quad \varepsilon=\frac{\lambda^{-2}-1}{-2}=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{l_0^2}{l^2}\right)=\tfrac{1}{2}\frac{l^2-l_0^2}{l^2}$$, tensor Almansiego (Lagrange'a)

$$n=0:\quad \varepsilon=\lim_{n\to 0}\frac{\left(\lambda^{2n}-1\right)'}{\left(2n\right)'}=\lim_{n\to 0}\frac{2\lambda^n\ln\lambda}{2}=\ln\lambda=\ln\frac{l}{l_0}$$, miara logarytmiczna



Porównanie miar deformacji dla odkształceń skończonych

Założenie o małych pochodnych przemieszczeń

Konstrukcje stosowane w budownictwie są z reguły dość sztywne. Przykładowo, norma dla konstrukcji żelbetowych PN-84/B-03264 stanowi, że dopuszczalne wartości ugięć belki nie powinny przekraczać 1:150 do 1:300 długości obliczeniowej belki. Jeżeli przemieszczenia są niewielkie to i ich pochodne również. Typowe wartości pochodnych to $10^{-6}\div 10^{-4}$.

Przyjmujemy zatem założenie o małych pochodnych przemieszczeń: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j},\ \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta}<<1$.

W wyniku tego założenia, znikają ostatnie człony tensorów odkształceń, zawierające nieliniowość. Ponadto, dla małych przemieszczeń zanika różnica między konfiguracją pierwotną i odkształconą.

Dla naszych potrzeb nie jest potrzebne rozróżnienie konfiguracji ciała, jeśli tylko będziemy zdawali sobie sprawę z uproszczonego sposobu rozumowania, w którym utożsamiamy wszystkie wirtualne konfiguracje ciała (początkową, pośrednią i końcową.)

Tensor Cauchy

Utożsamiając współrzędne materialne i przestrzenne dochodzimy do definicji *tensora infinitezymalnych odkształceń Cauchy*:

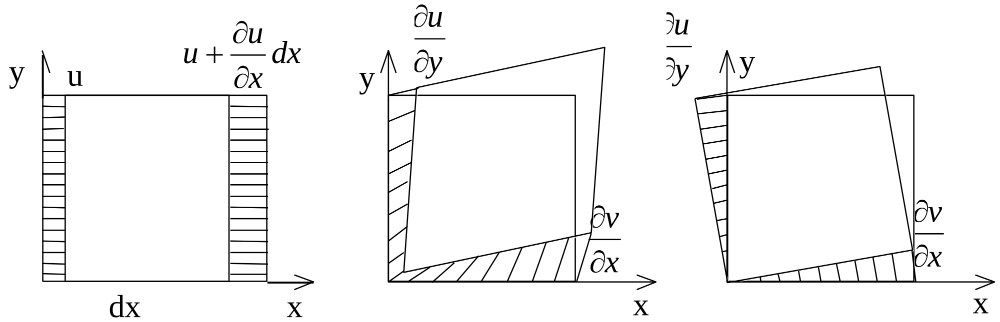
$$\varepsilon_{ij} := \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

W zapisie inżynierskim powyższe związki, zwane *równaniami Cauchy'ego*, mają postać:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},\quad \varepsilon_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{xz} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{yz} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Interpretacja składowych tensora odkształcenia

Rozpatrzmy 3 szczególne przypadki stanu odkształcenia:



Wydłużenie względne. Dla pierwszego przypadku obliczmy wydłużenie względne jako stosunek wydłużenia do długości całkowitej w kierunku osi *x*. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x .$$

Odkształcenia na przekątnej głównej przedstawiają względną zmianę długości (wydłużenie bądź skrócenie względne) odcinka równoległego do osi układu współrzędnych.

Zmiana postaci elementarnej powierzchni. Obliczmy połowę zmiany kąta prostego, jak widać bezpośrednio z rysunku:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varepsilon_{xy}$$

Tzw. odkształcenie postaciowe przedstawia połowę zmiany kąta prostego.

Sztywny obrót. Mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{xy} \equiv 0 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{ij} \equiv 0.$$

Znikanie tensora odkształcenia jest WKW ruchu ciała sztywnego.

Na podstawie powyższych rozważań możemy powiedzieć, że współrzędne tensora odkształcenia na przekątnej głównej przedstawiają wydłużenia względne odcinków równoległych do odpowiednich osi układu współrzędnych, a współrzędne poza przekątną — odkształcenia postaciowe, czyli połowy zmiany kątów o jakie zmieniają się kąty proste między odcinkami równoległymi do odpowiednich osi układu współrzędnych. Odkształcenia są bezwymiarowe.

Macierz odkształcenia ma - w zapisie inżynierskim i „naukowym" - postać:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Znajomość macierzy odkształcenia wystarcza do określenia stanu odkształcenia w punkcie. Wiedząc, że macierz odkształcenia jest tensorem, możemy — korzystając ze wzorów rachunku tensorowego — bezpośrednio rozwiązać wiele problemów, takich jak:

znalezienie odkształcenia włókna o kierunku wyznaczonym przez zadany wersor:

$$\varepsilon_{ij} = a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl}, \quad i,j = 1,2,3, \quad k,l = x,y,z$$

gdzie współczynniki a są współrzędnymi macierzy przejścia (np. $a_{1x} \equiv \cos(1, x)$),

znalezienie, spośród wszystkich włókien przechodzących przez zadany punkt, włókien odkształcających się ekstremalnie — jest to zagadnienie wartości własnych; macierz odkształcenia w kierunkach własnych przyjmuje postać diagonalną:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Odkształcenia główne zwykle oznacza się indeksami (1, 2, 3).

Jak widać zapis w kierunkach głównych znacznie się upraszcza: zamiast 6 niezależnych współrzędnych mamy jedynie 3 współrzędne. Ponadto, odkształcenia w kierunkach głównych są ekstremalne spośród odkształceń we wszystkich możliwych kierunkach. Wszystko to stanowi o praktycznej przydatności analizy tensorowej stanu odkształcenia.

(Podstawowe twierdzenie o deformacji). Deformacja stanowi złożenie translacji, sztywnego obrotu głównych osi i rozciągnięć wzdłuż tych osi. Kolejność tego składania może być dowolna.

Wzory na wartości własne i kierunki własne, wyprowadzone poprzednio pozostają w mocy, zarówno w przestrzennym jak i płaskim stanie odkształcenia.

Równania nierozdzielności

Jeśli dana jest funkcja przemieszczeń, to obliczenie współrzędnych tensora odkształcenia drogą różniczkowania jest proste. Zadanie odwrotne obliczenia przemieszczeń na podstawie współrzędnych tensora odkształcenia jest zadaniem znacznie bardziej skomplikowanym. Wymaga ono całkowania równań Cauchy z wykorzystaniem tzw. *kinematycznych warunków brzegowych*.

Kinematyczne warunki brzegowe są matematycznym zapisem więzów, narzuconych na pole przemieszczeń

Przykładowo:

$$w_A = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ldots \text{itp.}$$

Przed wykonaniem całkowania równań Cauchy - najczęściej długich i żmudnych obliczeń - należy upewnić się czy istnieje rozwiązanie w klasie dopuszczalnych funkcji. Z założenia o kontinuum materialnym żądamy, aby funkcje przemieszczeń były ciągłe.

Przypomnijmy twierdzenie z matematyki mówiące o tym, że układ równań różniczkowych cząstkowych ma rozwiązanie jedynie wtedy, gdy spełnione są warunki zgodności (całkowalności), które zapewniają, że różniczkowanie równań prowadzi do takich samych pochodnych wyższych rzędów. Aby otrzymać warunki zgodności należy wyeliminować funkcję przemieszczenia u i jej pochodne z układu równań będących zróżniczkowanymi równaniami wyjściowymi.

Po dwukrotnym różniczkowaniu i odpowiedniej eliminacji, otrzymujemy 81 równań nierozdzielności:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0,$$

z których jedynie 6 jest liniowo niezależnych w przypadku 3D a tylko jedno dla 2D:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Zanim przystąpimy do całkowania równań Cauchy, zawsze będziemy najpierw sprawdzać spełnienie równań nierozdzielności.