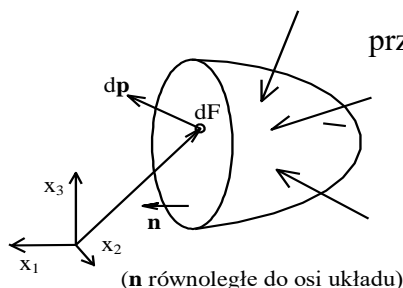


Stan naprężenia

Definicja naprężenia, naprężenia normalne i styczne, znakowanie, tensor naprężenia i jego symetria, równania równowagi wewnętrznej Naviera, statyczne warunki brzegowe, płaski stan naprężenia, przykłady, ekstremalne naprężenia styczne, koła Mohra

Definicja naprężenia



Rozważmy przekrój bryły płaszczyzną o normalnej \mathbf{n} , przechodzącą przez punkt o promieniu wodzącym \mathbf{r} .

Gęstość sił wewnętrznych wyraża iloraz:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{p}}{dF}$$

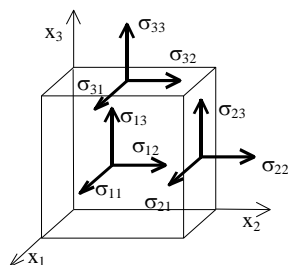
i jest ona funkcją wektorową wektora \mathbf{r} i \mathbf{n} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

Jeżeli dokonamy przekrojów bryły płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn osi układu współrzędnych to wektory normalne do płaszczyzn cięcia będą równoległe do osi układu współrzędnych.

Naprężeniem nazywamy gęstość sił wewnętrznych w płaszczyźnie o normalnej zewnętrznej równoległej do osi układu współrzędnych.

Możemy dokonać 6 takich przekrojów, gdyż każdy kierunek ma dwa zwroty.



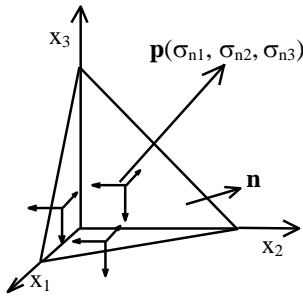
Zagadnienie zilustrujemy rysunkiem, który przedstawia ideowo 6 przekrojów w otoczeniu punktu materialnego. Na każdą ze ścianek tak powstałego sześcianu oddziałuje gęstość sił wewnętrznych jej przyporządkowana. Rozłożmy każdy z takich wektorów na kierunki: normalny do płaszczyzny przekroju (ścianki sześcianu) i 2 kierunki styczne, równoległe do osi układu współrzędnych. Składowe te oznaczymy symbolami σ z dwoma indeksami: pierwszy indeks określa kierunek normalnej zewnętrznej do płaszczyzny cięcia, drugi – kierunek składowej. Tak więc pierwszy indeks określa płaszczyznę cięcia, której przyporządkowane są 3 składowe wektora naprężenia, a drugi - kierunek działania składowej. Jak widać, jedne składowe są normalne do płaszczyzn cięcia, inne działają stycznie do nich (w płaszczyźnie cięcia). Odpowiednio do tego będziemy mówić o składowych normalnych i stycznych wektora naprężenia i nazywać je krótko *naprężeniami normalnymi* i *stycznymi*. Składowe możemy zapisać w formie macierzy naprężenia, przy czym notacja „naukowa”, wygodniejsza w zapisie wskaźnikowym, różni się nieco od tzw. notacji „inżynierskiej”, która podkreśla odmienny fizycznie charakter składowych:

$$T_{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Znakowanie elementów macierzy naprężenia

Naprężenie uważamy za dodatnie, jeżeli zarówno zwrot normalnej zewnętrznej do płaszczyzny cięcia jak i zwrot samego naprężenia są zgodne albo przeciwne do zwrotów osi współrzędnych. W przeciwnym wypadku, tzn. jeśli jeden ze zwrotów jest zgodny a drugi przeciwny do zwrotów osi współrzędnych, naprężenie jest ujemne.

Tensor naprężenia



Wytnijmy czworościan w otoczeniu punktu materialnego: 3 ściany o normalnych zgodnych z kierunkami osi układu współrzędnych, a czwarta ściana do nich dowolnie nachylona niech ma wektor normalnej zewnętrznej o składowych:

$$\mathbf{n}(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}), \quad a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + a_{n3}^2 = 1.$$

Ponieważ cosinus kąta między dwiema ścianami jest równy cosinusowi kąta między normalnymi do tych ścian,

możemy zapisać:

$$\frac{dF_i}{dF} = a_{ni}.$$

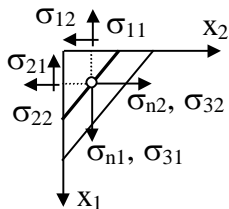
Układ sił działających na czworościan musi być układem zerowym, jeśli ma znajdować się w równowadze. Obliczmy sumę rzutów sił na osie układu współrzędnych:

$$\begin{cases} -\sigma_{11} dF_1 - \sigma_{21} dF_2 - \sigma_{31} dF_3 + \sigma_{n1} dF = 0 \\ -\sigma_{12} dF_1 - \sigma_{22} dF_2 - \sigma_{32} dF_3 + \sigma_{n2} dF = 0, \\ -\sigma_{13} dF_1 - \sigma_{23} dF_2 - \sigma_{33} dF_3 + \sigma_{n3} dF = 0 \end{cases}$$

co w zapisie wskaźnikowym przyjmuje postać:

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji} a_{nj}, \text{ albo dla ustalonego } n: \sigma_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Widzimy z zapisu, że wektor a_{nj} pomnożony przez macierz σ_{ji} daje w wyniku wektor σ_{ni} , a to jest równoznaczne z tym, że macierz naprężenia jest tensorem. Jeśli ścianka n znajduje się na brzegu ciała, to sens fizyczny powyższego wzoru jest całkowicie odmienny. Przedstawia on wówczas tzw. *statyczne warunki brzegowe* a q_i jest tzw. *wektorem obciążenia*.



Obliczmy sumę momentów względem osi równoległej do osi x_3 , przechodzącej przez środek ciężkości ścianki n .

Rzut środka ciężkości przekroju o normalnej \mathbf{n} na płaszczyznę równoległą do osi układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem ciężkości płaszczyzny - rysunek przedstawia rzut na płaszczyznę przechodzącą przez środki ciężkości.

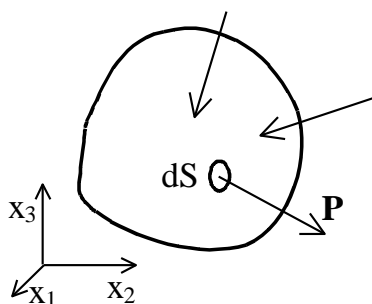
$$\sigma_{12} \frac{1}{2} dx_2 dx_3 \frac{1}{3} dx_1 - \sigma_{21} \frac{1}{2} dx_1 dx_3 \frac{1}{3} dx_2 = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21}.$$

Podobnie dla sum momentów względem pozostałych osi.

Możemy więc zapisać *warunek symetrii* tensora naprężenia:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Równania równowagi wewnętrznej Naviera



Niech bryła, obciążona układem sił zewnętrznych oraz tzw. sił masowych \mathbf{P} , pozostaje w równowadze. Siły masowe są to siły o wymiarze N/m^3 związane z masą ciała, np. siły ciężkości, siły oddziaływania pola magnetycznego itp.

Wytnijmy z bryły element o objętości dV i powierzchni dS . Zgodnie z twierdzeniem o równoważności układów sił zewnętrznych i wewnętrznych układ sił działających na element objętościowy jest układem zerowym. Spełnione więc muszą być równania równowagi statycznej. Z sumy rzutów otrzymujemy:

$$\iint_S q_{ni} dS + \iiint_V P_i dV = 0.$$

Z twierdzenia Gaussa-Greena-Ostrogradskiego:

$$\iint_S A a_{ni} dS = \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV, \text{ wynika, dla } q_{ni} = a_{nj} \sigma_{ij}: \iiint_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i \right] dV = 0,$$

a ponieważ równości muszą zachodzić dla dowolnego elementu objętościowego, dochodzimy do *równań równowagi wewnętrznej Naviera*:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0.}$$

W zapisie inżynierskim mają one postać:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y = 0. \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0 \end{cases}$$

Podsumujmy: macierz naprężenia jest tensorem symetrycznym, którego współrzędne transformują się zgodnie z prawem transformacji tensorowej:

$$\boxed{\sigma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}}$$

a macierz naprężeń, będąca obrazem stanu naprężenia w punkcie materialnym, musi spełniać równania równowagi wewnętrznej Naviera a na brzegu ciała statyczne warunki brzegowe.

Statyczne warunki brzegowe

Jeśli wytniemy czworościan w otoczeniu punktu materialnego na brzegu ciała, to jedną ze ścian czworościanu stanowi brzeg ciała. Otrzymujemy wówczas tzw. statyczne warunki brzegowe, w postaci:

$$q_{ni} = \sigma_{ij} n_j$$

Przykład

Dany jest tensor naprężenia. Określić siły masowe oraz obciążenie brzegu tarczy.

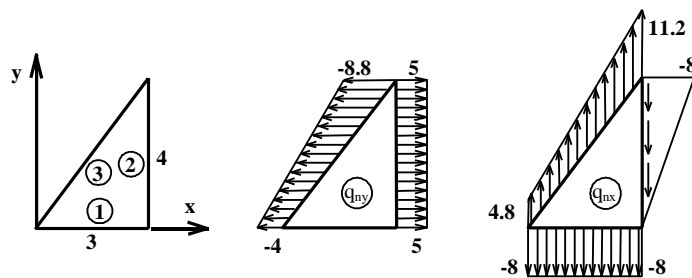
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -2y \\ -2y & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

z równań Naviera: $\mathbf{P}(2, 0)$

$$q_{ni} = \sigma_{ij} a_{nj} \quad \begin{cases} q_{nx} = \sigma_x a_{nx} + \tau_{xy} a_{ny} \\ q_{ny} = \tau_{xy} a_{nx} + \sigma_y a_{ny} \end{cases}$$

1. $a_n(0, -1)$, $q_{nx} = 2y = 0$, $q_{ny} = -8$
2. $a_n(1, 0)$, $q_{nx} = 5$, $q_{ny} = -2y$
3. $a_n(-0.8, 0.6)$, $q_{nx} = -4 - 1.2y$, $q_{ny} = 1.6y + 4.8$



Przykład: Naprężenia styczne na nieobciążonym brzegu

Z warunków brzegowych wynika:

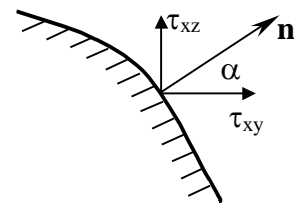
$$\mathbf{n}(0, \cos \alpha, \sin \alpha), \quad q_{nx} = q_{ny} = 0,$$

$$0 \cdot \sigma_x + \tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha = 0.$$

Ponieważ rzut naprężeń stycznych na kierunek normalnej zewnętrznej wyraża się wzorem:

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha,$$

wynika stąd, że na nieobciążonym brzegu kierunek wypadkowych naprężeń stycznych jest styczny do konturu.



Przykład: Przestrzenny stan naprężenia

Dana jest macierz naprężenia oraz wektor normalnej do płaszczyzny. Określić naprężenia i kierunki główne, oraz wektor obciążenia na płaszczyźnie w postaci składowej normalnej i stycznej.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ & 8 & 6 \\ & & -7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}(1, -1, \sqrt{7})$$

$$I_1 = 6, I_2 = -107, I_3 = -656, \quad \sigma_1 = 10.18, \sigma_2 = 6.20, \sigma_3 = -10.39$$

macierz przejścia:	x	y	z
	1	-0.137	0.945
	2	0.951	0.038
	3	0.306	0.277

wektor naprężenia dla wersora (0.333, -0.333, 0.882), $p_{nj} = a_{ni} \sigma_{ij} = n_i \sigma_{ij}$.

$$p_n (5.861, 1.958, -6.840), \quad p = 9.218, \quad \sigma = p \cos(n, p) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_{ni} n_i = -4.731,$$

$$|\tau| = \sqrt{p^2 - \sigma^2} = 7.911$$

Przykład: płaski stan naprężenia

Dla danego tensora naprężenia w p.s.n. określić naprężenia i kierunki główne

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_1 = 44.68, \quad \sigma_2 = -14.68$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \Rightarrow \alpha_1 = 0.285, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \Rightarrow \alpha_2 = -1.286$$

macierz przejścia i tensor naprężenia w układzie własnym:

	x	y	
1	0.9598	0.2808	$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 44.68 & 0 \\ & -14.68 \end{pmatrix}$
2	-0.2808	0.9598	

albo zapis w układzie przestrzennym:

	x	y	z	
1	0.9598	0.2808	0	$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 44.68 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & -14.68 \end{pmatrix}$
2	0	0	1	
3	0.2808	-0.9598	0	

Ekstremalne naprężenia styczne

Poszukujemy takich kierunków, dla których naprężenia styczne przyjmują wartości ekstremalne. Wektor naprężenia przyporządkowany płaszczyźnie o wersorze normalnej zewnętrznej \mathbf{n} , $p_j = n_i \sigma_{ij}$, ma składową normalną: $\sigma = p_j n_j = n_i n_j \sigma_{ij}$. W kierunkach głównych, wobec postaci diagonalnej macierzy naprężenia, wzory powyższe zapiszemy:

$$\mathbf{p}(n_1\sigma_1, n_2\sigma_2, n_3\sigma_3), \sigma = n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3,$$

a składową styczną jako:

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2 + n_3^2\sigma_3^2 - (n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3)^2.$$

Jedną ze składowych wersora \mathbf{n} możemy wyrazić przez pozostałe, np. $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$. Mamy więc:

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_2^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]^2.$$

Poszukujemy ekstremum tej funkcji ze względu na kierunki wersora \mathbf{n} :

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} = 0,$$

i wykluczając przypadek $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ dla którego każdy kierunek jest kierunkiem głównym, oraz przypadki dwóch równych sobie naprężeń głównych dla których każdy z kierunków na płaszczyźnie jest kierunkiem głównym, otrzymujemy układ równań:

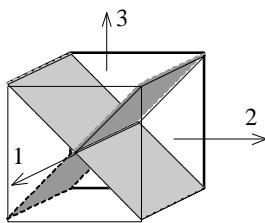
$$\begin{cases} \{(\sigma_1 + \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]\}n_1 = 0 \\ \{(\sigma_2 + \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_2)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]\}n_2 = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że dla $n_1 = n_2 = 0$ jest $n_3 = 1$, otrzymujemy więc płaszczyznę główną, prostopadłą do osi x_3 , w której naprężenia styczne są równe zero (postać diagonalna macierzy naprężenia, minimalne naprężenia styczne).

Jeśli założymy, że zarówno n_1 jak i n_2 są różne od zera, to odejmując stronami równania dochodzimy do równości $\sigma_1 - \sigma_3 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Musi zachodzić więc jedna z 2 możliwości:

1. $n_1 = 0, n_2 \neq 0 \Rightarrow \sigma_2 + \sigma_3 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - 2\sigma_3 = 0 \Rightarrow n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $n_1 \neq 0, n_2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 - 2\sigma_3 = 0 \Rightarrow n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Rugując ze wzoru na τ^2 inną współrzędną, np. n_1 , otrzymamy jeszcze jedno rozwiązanie. Ostatecznie:



$$\begin{cases} \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \tau_{23} = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \\ \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \tau_{13} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| \\ \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow \tau_{12} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \end{cases}$$

Stwierdzamy, że płaszczyzny ekstremalnych naprężeń stycznych przechodzą przez jedną z osi głównych i do pozostałych są nachylone pod kątem 45° . Powyższy rysunek przedstawia płaszczyzny dla których τ_{yz} jest ekstremalne.

(wyprowadzenie dla płaskiego stanu naprężenia)

Naprężenie styczne wyraża się:

$$\tau^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - n_1^2 \sigma_2^2 - (n_1^2 \sigma_1 + \sigma_2 - n_1^2 \sigma_2)^2.$$

Obliczamy ekstremum dla kierunku n_1 :

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = 0 = 2n_1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - 4n_1(\sigma_1 - \sigma_2)(n_1^2 \sigma_1 + \sigma_2 - n_1^2 \sigma_2).$$

Jeśli $n_1 = 0$, to $n_2 = 1$ i oznacza to kierunek główny, dla którego naprężenia styczne są minimalne (i równe zero).

Jeśli $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ to każdy kierunek na płaszczyźnie jest główny i ponownie naprężenia styczne znikają.

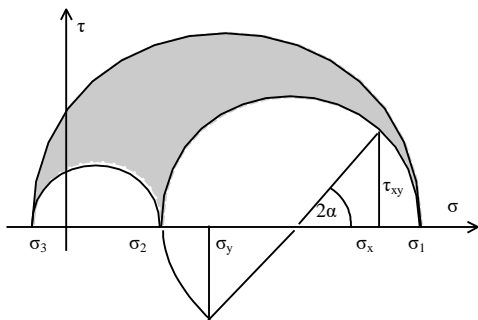
Musi więc zachodzić:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - 2n_1^2) = 0 \Rightarrow n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Koła Mohra

Uporządkujmy algebraicznie naprężenia główne: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Stan naprężenia możemy zilustrować graficznie w postaci kół Mohra, w układzie współrzędnych: naprężenia normalne – moduł naprężeń stycznych. Poszczególne koła odpowiadają możliwym transformacjom po-

przez obrót względem jednej z osi układu współrzędnych. Obszar zakreskowany oznacza możliwe rozwiązania dla złożenia 3 obrotów. Powyższe stwierdzenia łatwo wykazać dla p.s.n. Jak wynika z rysunku, położenie środka koła dane jest wzorem:



$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

a promień koła wyraża się:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

skąd otrzymujemy znane wzory na naprężenia główne w p.s.n.