Elementy teorii sprężystości

związki fizyczne - założenia, równania Hooke'a (3 postaci), stałe materiałowe, zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości, metody rozwiązań, zasada superpozycji, zasada de Saint-Venanta, pierwsze prawo termodynamiki, energia odkształcenia

Związki fizyczne

Równania fizyczne, zwane też równaniami konstytutywnymi albo równaniami stanu, określają zależności między naprężeniami, odkształceniami, temperaturą, stanem środowiska i współrzędnymi:

$$\sigma_{ij} = F(\varepsilon_{ij}, T, w, \mathbf{X})$$

Założenie V[1]

Związki konstytutywne nie zależą od czasu i warunków zewnętrznych:

$$\sigma_{ij} = F(\varepsilon_{ij}, \mathbf{X})$$

Oznacza to np., że materiał nie starzeje się i jego właściwości nie zmieniają się wskutek zmiany temperatury czy też wilgotności. W ogólności funkcje F mogą zależeć od współrzędnych w przestrzeni.

Założenie VI

Materiał jest *jednorodny* — posiada jednakowe właściwości w każdym punkcie. Funkcje F zawierają stałe, zwane *stałymi materiałowymi*, i nie zależą od współrzędnych w przestrzeni.

$$\varepsilon_{ij} = F(\varepsilon_{ij})$$

Założenie VII

Materiał jest fizykalnie liniowy. Oznacza to założenie liniowej zależności między składowymi naprężenia i odkształcenia (nieliniową rzeczywistość aproksymujemy związkami liniowymi).

Założenie VIII

Materiał jest sprężysty. Oznacza to, że deformacja znika po usunięciu obciążenia (zakładamy nieodkształconą konfigurację nieobciążoną ciała).

Możemy teraz związki fizyczne zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

gdzie E_{ijkl} jest tensorem (4. rzędu) *modułów sprężystości*, zawierającym 81 stałych. Jednak wskutek symetrii tensorów naprężenia i odkształcenia liczba niezależnych stałych materiałowych redukuje się do 36 (a z założenia o istnieniu potencjału do 21).

[1] dla przypomnienia: założenie I dotyczyło objętości reprezentatywnej, założenie II – równowagi statycznej, założenie III – zasady zesztywnienia, założenie IV – zasady superpozycji

Założenie IX

Materiał jest *izotropowy* — jego właściwości mechaniczne są we wszystkich kierunkach jednakowe. Można wykazać, że dla liniowego, sprężystego materiału izotropowego, liczba stałych materiałowych redukuje się do 2.

Równania Hooke'a

Równania fizyczne dla ciała izotropowego, zwane równaniami Hooke’a, można zapisać:

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}.$$

Jest to tzw. pierwsza postać równań Hooke’a. W zapisie inżynierskim dla kierunków głównych:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} \end{cases}$$

gdzie:

G - moduł odkształcenia postaciowego Kirchhoffa, N/m^2, dla stali G = 80 GPa,

λ - stała Lamégo

Z trzech ostatnich równań wynika następujące twierdzenie:

Kierunki główne naprężeń i odkształceń dla ciała izotropowego pokrywają się.

Istnieje wiele możliwości wyboru 2 niezależnych stałych materiałowych. Powszechnie używane to:

ν - liczba Poissona, bezwymiarowa,

E - moduł sprężystości podłużnej Younga, N/m^2, dla stali E = 210 GPa

K - moduł ściśliwości objętościowej, N/m^2

wyrażające się poprzez liczbę Poissona i moduł Younga następująco:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Związek odwrotny do 1. postaci równań Hooke’a, nazwiemy 2. postacią równań Hooke’a:

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]}.$$

W zapisie inżynierskim:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], & \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], & \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xz} = \frac{1}{2G}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] & ,\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz} \end{cases} .$$

Rozkład tensora na część aksjatorową i dewiatorową

Zdefiniujmy *naprężenie średnie* i *odkształcenia średnie* następująco:

$$\sigma_m \equiv \tfrac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \tfrac{1}{3}\sigma_{kk}, \varepsilon_m \equiv \tfrac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \tfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}.$$

oraz *dewiator* i *aksjator* tensorów naprężenia i odkształcenia:

$$T_\sigma \equiv D_\sigma + A_\sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ & \sigma_m & 0 \\ & & \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$T_\varepsilon \equiv D_\varepsilon + A_\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ & \varepsilon_m & 0 \\ & & \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

Związki Hooke'a możemy teraz zapisać w postaci dewiatorowej (jedynie 5 równań niezależnych):

$$\boxed{D_\sigma = 2GD_\varepsilon}$$

oraz aksjatorowej (1 równanie):

$$\boxed{A_\sigma = 3KA_\varepsilon}$$

Obliczmy zmianę objętości sześcianu o krawędziach długości 1 równoległych do kierunków głównych:

$$\Delta V = V - V_0 = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1 = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_m .$$

Dla obciążenia w postaci dewiatora naprężenia objętość nie ulega zmianie:

$$\Delta V = \varepsilon_1 - \varepsilon_m + \varepsilon_2 - \varepsilon_m + \varepsilon_3 - \varepsilon_m = 0,$$

a zmienia się jedynie kształt (postać) ciała, stąd nazwa *prawo zmiany postaci* dla związku między dewiatorem naprężenia i odkształcenia.

Dla obciążenia w postaci aksjatora naprężenia jedynie objętość ulega zmianie:

$$\Delta V = 3\varepsilon_m \quad \Rightarrow \quad (1 - 2\nu)\frac{\sigma_m}{E} = \varepsilon_m$$

a nie zmienia się kształt (postać) ciała, skąd nazwa *prawo zmiany objętości* dla związku między aksjatorem naprężenia i odkształcenia.

Z ostatniego równania wynika, że aby $\sigma_m > 0$ powodowało wzrost objętości $\Delta V > 0$, musi być:

$$1 - 2\nu \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \nu \le \tfrac{1}{2},$$

przy czym $\nu = 0$ oznacza maksymalną ściśliwość (np. korek) a $\nu = 0.5$ materiał nieściśliwy (np. guma).

Zestawienie równań liniowej teorii sprężystości

Zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości określają:

3 równania Naviera: $\sigma_{ij,j} + P_i = 0$ i statyczne warunki brzegowe: $q_{ni} = n_j \sigma_{ij}$,

6 równań Cauchy'ego: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ i kinematyczne warunki brzegowe,

6 równań Hooke'a: $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$,

łącznie 15 równań różniczkowych i algebraicznych.

Stan naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia opisany jest 6 składowymi naprężenia, 6 składowymi odkształcenia i 3 składowymi przemieszczenia — łącznie 15 niewiadomych.

Metody rozwiązania zagadnienia brzegowego liniowej TS

Po wyrażeniu w równaniach nierozdzielności odkształceń poprzez naprężenia ze związków Hooke'a oraz wykorzystując równania Naviera otrzymujemy układ 6 równań różniczkowych *Beltramiego-Michella* 2. rzędu na naprężenia.

Wstawiając natomiast przemieszczenia z równań Cauchy'ego do równań Hooke'a i podstawiając do równań Naviera, otrzymujemy układ 3 równań różniczkowych *Lamé*go 2. rzędu na przemieszczenia.

Brak jest ogólnego rozwiązania układu równań naprężeniowych Beltramiego-Michella jak i układu równań Lamé, choć istnieje kilka dowodów poprawności i jednoznaczności rozwiązania. Rozwiązanie udaje się uzyskać jedynie w szczególnych przypadkach, posługując się skomplikowanym aparatem matematycznym. Dlatego najczęściej stosuje się tzw. *metody półodwrotne*. Będziemy wykorzystywać 2 podejścia.

Podejście statyczne

Polega na przypuszczeniu (założeniu) macierzy naprężenia, spełniającej równania Naviera i statyczne warunki brzegowe. Jeżeli wynikające dla niej z równań Hooke'a odkształcenia spełniają równania nierozdzielności, a przemieszczenia obliczone z równań Cauchy'ego spełniają kinematyczne warunki brzegowe, to macierz naprężenia jest trafnie przypuszczona i pola naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia są rozwiązaniem zagadnienia brzegowego TS.

Podejście kinematyczne

Polega na przypuszczeniu przemieszczeń, spełniających kinematyczne warunki brzegowe. Jeśli wynikające dla nich z równań Cauchy'ego odkształcenia, a poprzez nie wynikające z równań Hooke'a naprężenia spełniają równania Naviera i statyczne warunki brzegowe, to wektor przemieszczenia jest trafnie przypuszczony i pola naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia są rozwiązaniem zagadnienia brzegowego TS.

Zasada superpozycji

Ponieważ układ równań TS jest liniowy, stosuje się do niego zasada superpozycji, mówiąca, że rozwiązanie od sumy przyczyn jest równe sumie rozwiązań od każdej z przyczyn z osobna:

$$\sigma_{ij} = \overset{1}{\sigma}_{ij} + \overset{2}{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij} = \overset{1}{\varepsilon}_{ij} + \overset{2}{\varepsilon}_{ij}, u_i = \overset{1}{u}_i + \overset{2}{u}_i \ .$$

Założenie X: **Zasada de Saint-Venanta**

> *Jeżeli do bryły, na małej jej powierzchni w porównaniu z całą powierzchnią, przyłożone jest obciążenie wywołujące w tej bryle pewien stan naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, to stan naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia wywołany obciążeniem statycznie równoważnym na tej małej powierzchni w dostatecznej odległości od obciążonej części brzegu będzie się różnił dowolnie mało od rzeczywistego.*

Brak dowodu prawdziwości tej zasady. Można pokazać przypadki, w których jej przyjęcie prowadzi do błędnych wyników. Teoria sprężystości jej nie akceptuje, natomiast jej praktyczne znaczenie dla wytrzymałości materiałów jest ogromne, gdyż umożliwia uzyskanie analitycznych rozwiązań przy jedynie integralnym spełnieniu statycznych warunków brzegowych.