

Charakterystyki geometryczne przekroju

definicje, twierdzenia Steinera, algorytm obliczeń

Definicje

Analiza zagadnień wytrzymałościowych w zakresie ustrojów prętowych posługuje się pewnymi wielkościami, zwanymi charakterystykami geometrycznymi przekroju. Będziemy posługiwać się pewnym, ściśle określonym układem współrzędnych, takim, w którym wzory wytrzymałościowe przyjmują najprostszą postać.

$$\text{Pole przekroju, } F \equiv \iint_F dF, \text{ [m}^2\text{].}$$

Pole przekroju jest skalarem i nie zależy od przyjętego układu współrzędnych.

$$\text{Moment statyczny względem osi } y \text{ i } z, S_y \equiv \iint_F z dF, \quad S_z \equiv \iint_F y dF, \text{ [m}^3\text{].}$$

Moment statyczny zależy od przyjętego układu współrzędnych, i dla transformacji układu współrzędnych poprzez translację:

$$y_1 = y - y_0, \quad z_1 = z - z_0$$

będzie równy:

$$S_{y_1} = \iint_F (z - z_0) dF = S_y - z_0 F, \quad S_{z_1} = \iint_F (y - y_0) dF = S_z - y_0 F.$$

Powyższe wzory, zwane wzorami Steinera, są wzorami na moment statyczny dla translacji układu współrzędnych. Można zatem zapytać o taki układ współrzędnych, w którym momenty statyczne przekroju zerują się. Obliczmy niezbędne przesunięcia osi układu:

$$S_{y_1} = 0, S_{z_1} = 0 \rightarrow z_0 = \frac{S_y}{F}, \quad y_0 = \frac{S_z}{F}$$

Osie, względem których momenty statyczne są równe zero, nazywamy osiami centralnymi.

Punkt przecięcia tych osi (y_c, z_c) jest bowiem *środkiem ciężkości* przekroju. Osi centralnych jest nieskończenie wiele, ale do wyznaczenia położenia środka ciężkości wystarcza znajomość dwóch osi centralnych.

Momenty bezwładności 2. stopnia względem osi y i z oraz moment dewiacji¹

$$I_y \equiv \iint_F z^2 dF, \quad I_z \equiv \iint_F y^2 dF, \quad I_{yz} \equiv \iint_F yz dF. \text{ [m}^4\text{]}$$

Podobnie definiujemy *biegunowy moment bezwładności, jako:*

$$I_o \equiv \iint_F (y^2 + z^2) dF = \iint_F r^2 dF, \text{ [m}^4\text{]},$$

przy czym dla koła (i tylko dla niego) $I_o = I_y + I_z$.

Momenty bezwładności I_y , I_z oraz I_o są zawsze dodatnie.

Promienie bezwładności względem osi y i z,

¹ zwany także momentem zбочenia, albo – całkiem już politycznie poprawnie – momentem odśrodkowym

$$i_y \equiv \sqrt{I_y/F}, \quad i_z \equiv \sqrt{I_z/F}, \quad [\text{m}].$$

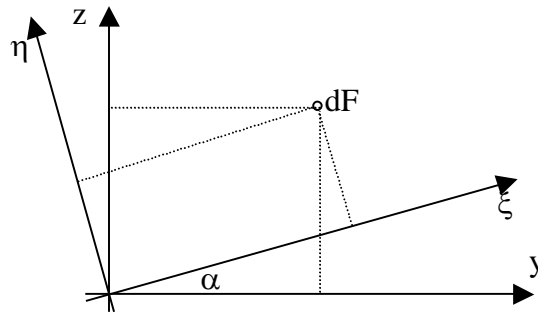
Zbadajmy, jak zmieniają się momenty bezwładności przy transformacji układu współrzędnych poprzez translację.

$$I_{y_1} = \iint_F z_1^2 dF = I_y - 2z_0 S_y + z_0^2 F, \quad I_{z_1} = \iint_F y_1^2 dF = I_z - 2y_0 S_z + y_0^2 F.$$

Jeżeli układ pierwotny był układem osi centralnych, to odpowiednie momenty statyczne w powyższych wzorach znikają i wzory Steinera dla transformacji momentów bezwładności przez translację zapiszą się:

$$I_{y_1} = I_{yc} + z_0^2 F, \quad I_{z_1} = I_{zc} + y_0^2 F.$$

Możemy wreszcie zapytać, jak transformują się momenty bezwładności przy obrocie układu współrzędnych?



Momenta bezwładności elementarnej powierzchni w układzie wyjściowym (y, z) zapiszemy:

$$I_y = z_A^2 dF, \quad I_z = y_A^2 dF, \quad I_{yz} = y_A z_A dF.$$

Momenta bezwładności tej samej elementarnej powierzchni w nowym układzie (ξ, η) :

$$\xi_A = y_A \cos \alpha + z_A \sin \alpha, \quad \eta_A = -y_A \sin \alpha + z_A \cos \alpha$$

wyrażają się:

$$I_\xi = \eta_A^2 dF = (y_A^2 \sin^2 \alpha - 2y_A z_A \sin \alpha \cos \alpha + z_A^2 \cos^2 \alpha) dF =$$

$$= (I_y \cos^2 \alpha - 2I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha + I_z \sin^2 \alpha) dF$$

$$I_\eta = \xi_A^2 dF = (y_A^2 \cos^2 \alpha + 2y_A z_A \sin \alpha \cos \alpha + z_A^2 \sin^2 \alpha) dF =$$

$$= (I_y \sin^2 \alpha + 2I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha + I_z \cos^2 \alpha) dF$$

$$I_{\xi\eta} = \xi_A \eta_A dF = (-y_A^2 \sin \alpha \cos \alpha + y_A z_A \cos^2 \alpha - y_A z_A \sin^2 \alpha + z_A^2 \sin \alpha \cos \alpha) dF =$$

$$= -(I_y \sin \alpha \cos \alpha + I_{yz} \sin^2 \alpha - I_{yz} \cos^2 \alpha + I_z \sin \alpha \cos \alpha)$$

Gdyby przyjąć, że momenta bezwładności są współrzędnymi tensora, to ze wzorów transformacyjnych dostalibyśmy:

$$I_\xi = I_y \cos^2 \alpha + 2I_{yz} \cos \alpha \sin \alpha + I_z \sin^2 \alpha$$

$$I_\eta = I_y \sin^2 \alpha - 2I_{yz} \cos \alpha \sin \alpha + I_z \cos^2 \alpha$$

$$I_{\xi\eta} = -I_y \sin \alpha \cos \alpha + I_{yz} \cos^2 \alpha - I_{yz} \sin^2 \alpha + I_z \sin \alpha \cos \alpha$$

Z porównania wzorów uzyskanych w obu przypadkach wynika, że macierz momentów bezwładności będzie tensorem, jeśli wstawimy do niej momenty dewiacji z przeciwnym znakiem²:

$$\begin{pmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz zastosować poznane już wzory na wartości i kierunki własne:

$$I_n = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_n = -\frac{I_n - I_y}{I_{yz}},$$

przy czym wzór na kierunki własne dla transformacji przez obrót układu współrzędnych, z uwagi na zmieniony znak momentu dewiacji w macierzy, ma zmodyfikowaną postać (znak minus).

Jak wiadomo z rachunku tensorowego (i jak widać ze wzoru), jest: $I_1 + I_2 = I_y + I_z = \text{const}$ (pierwszy niezmiennik tensora).

Momenty bezwładności względem osi głównych nazywamy *głównymi momentami bezwładności*. Jeżeli ponadto osie główne przechodzą przez środek ciężkości przekroju, to są to *osie główne centralne* przekroju. Analogicznie, mówimy o głównych centralnych promieniach bezwładności przekroju.

Wszystkie później wyprowadzone wzory wytrzymałościowe będą odnosiły się do głównych centralnych osi bezwładności przekroju.

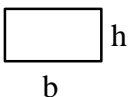
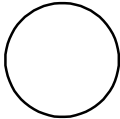
Oś symetrii przekroju jest osią główną centralną. Druga z głównych osi centralnych jest do niej prostopadła i przechodzi przez środek ciężkości.

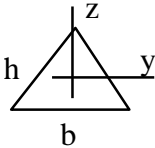
Jeżeli przekrój posiada więcej niż dwie osie symetrii (koło, kwadrat, trójkąt równoboczny), to każda z osi przechodząca przez środek ciężkości jest główną centralną osią bezwładności.

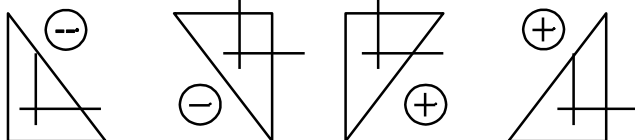
Z uwagi na addytywność całkowania, możemy przekrój podzielić na prostsze elementy i dokonywać sumowania wielkości dla elementów składowych, np. pole przekroju czy moment bezwładności będą równe sumie pól czy momentów bezwładności od poszczególnych części przekroju.

² Analogiczny dowód można znaleźć w *Mechanice Teoretycznej* M. Palucha, gdzie tensorowego charakteru macierzy momentów bezwładności dowodzi się wykazując, że macierz momentów bezwładności pomnożona wewnętrznie przez wektor prędkości kątowej daje w wyniku wektor krętu.

Warto zapamiętać poniższe wzory, które często będziemy wykorzystywać.


 $J_y = \frac{bh^3}{12}$

 $J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$
 $J_0 = \frac{\pi r^4}{2}$


 $J_y = \frac{bh^3}{36}$
 $J_z = \frac{b^3h}{48}$


 $J_{yz} = \pm \frac{b^2h^2}{72}$

Twierdzenie Steinera

Oprócz transformacji przez obrót układu współrzędnych, potrzebna będzie transformacja układu przez przesunięcie. Wzory obliczeniowe, wynikające bezpośrednio z definicji wielkości, noszą nazwę *twierdzeń Steinera*, i mają postać:

$$S_{y_c} = S_y - Fz_c, \quad S_{z_c} = S_z - Fy_c,$$

$$I_{y_c} = I_y - Fz_c^2, \quad I_{z_c} = I_z - Fy_c^2, \quad I_{y_c z_c} = I_{yz} - Fy_c z_c.$$

W każdym z powyższych wzorów, jedna z osi jest osią centralną.

Błędem jest stosowanie ich dla transformacji osi, z których ani oś pierwotna ani oś wynikowa nie jest osią centralną.

Uwaga 2: Przy transformacji odwrotnej (z osi centralnej do osi równoległej do niej) zmienia się znak we wzorach.

Momenty statyczne i momenty bezwładności względem osi centralnych są najmniejsze co do wartości bezwzględnej.

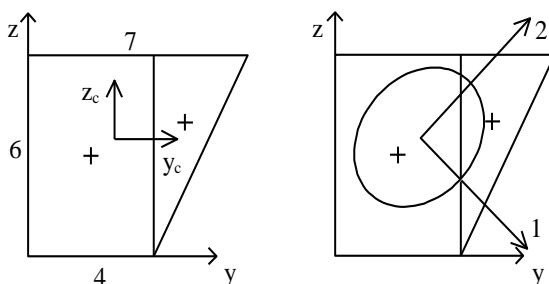
Uwaga ta nie dotyczy momentów dewiacji.

Ponieważ momenty statyczne przekroju względem osi centralnych mają być równe zero, wynikają stąd wzory na położenie środka ciężkości względem przyjętego układu współrzędnych:

$$y_c = S_z / F, \quad z_c = S_y / F.$$

Algorytm obliczeń

Algorytm wyznaczania charakterystyk geometrycznych przekroju prześledzimy na przykładzie.



1. Przyjmujemy wstępnie obliczeniowy układ współrzędnych y i z jak na rysunku.
2. Rozdzielamy przekrój na dwie prostsze części składowe: prostokąt i trójkąt.
3. Obliczamy pole przekroju: $F = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 / 2 = 33 \text{ cm}^2$.
4. Obliczamy położenie środka ciężkości:

$$y_c = (6 \cdot 4 \cdot 2 + 9 \cdot 5) / F = 2.82 \text{ cm}, \quad z_c = (6 \cdot 4 \cdot 3 + 9 \cdot 4) / F = 3.27 \text{ cm}$$
5. Przez środek ciężkości przeprowadzamy osie centralne y_c i z_c , równoległe do osi y i z .
6. Obliczamy centralne momenty bezwładności (względem osi centralnych):

$$I_{y_c} = 4 \cdot 6^3 / 12 + 24 \cdot (3 - 3.27)^2 + 3 \cdot 6^3 / 36 + 9 \cdot (4 - 3.27)^2 = 96.55 \text{ cm}^4,$$

$$I_{z_c} = 6 \cdot 4^3 / 12 + 24 \cdot (2 - 2.82)^2 + 6 \cdot 3^3 / 36 + 9 \cdot (5 - 2.82)^2 = 95.41 \text{ cm}^4,$$

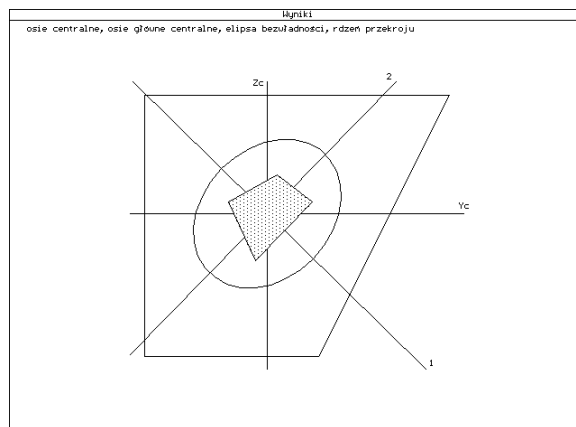
$$I_{y_c z_c} = 0 + 24 \cdot (3 - 3.27) \cdot (2 - 2.82) + 3^2 \cdot 6^2 / 72 + 9 \cdot (4 - 3.27) \cdot (5 - 2.82) = 24.14 \text{ cm}^4.$$
7. Obliczamy główne centralne momenty bezwładności:

$$I_1 = 120.12 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 71.83 \text{ cm}^4, \quad (\text{spr.: } 120.12 + 71.83 = 191.95 \approx 191.96)$$
8. Określamy kierunki główne:

$$\text{tg } \alpha_1 = \dots = -0.977 \text{ rd} = -44.33^\circ.$$
9. Obliczamy główne centralne promienie bezwładności:

$$i_1 = 1.91 \text{ cm}, \quad i_2 = 1.48 \text{ cm}.$$
10. Wykonujemy rysunek elipsy bezwładności³, obrazowo przedstawiającą charakterystyki główne przekroju.

³ użyty został program „przekrój.exe” (link do programu przy odsyłaczach na stronie)



Choć rzadko ma to miejsce, elipsa bezwładności może wychodzić poza obrys zewnętrzny przekroju, jak np. dla przekroju na rysunku poniżej.

