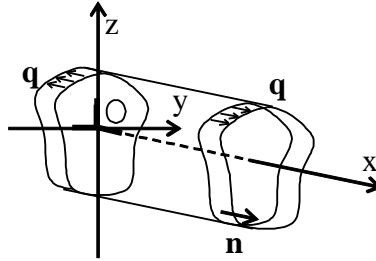


Rozciąganie

definicja, zapis zagadnienia brzegowego, rozwiązanie, proste rozciąganie, statyczna próba rozciągania stali, charakterystyki wytrzymałościowe, schematyzacje wykresu, wytrzymałość obliczeniowa, warunki projektowania, przykłady zadań statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych

Postawienie zagadnienia



Pręt prosty, utwierdzony w punkcie O będącym środkiem ciężkości ścianki poprzecznej, obciążony jest na ściankach poprzecznych (denkach) równomiernie rozłożonym obciążeniem powierzchniowym o zwrocie zgodnym z normalnymi zewnętrznymi do ścianek.

Przyjmujemy początek układu w p. O, przy czym oś x pokrywa się z osią pręta, a osie y i z są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego.

Poszukiwać będziemy stanu naprężenia i odkształcenia oraz pola przemieszczeń, pomijając siły masowe.

Zapis zagadnienia brzegowego

Statyczne warunki brzegowe dla równań Naviera: na pobocznicy $\mathbf{n}(0, n_y, n_z)$ jest $q_{ni} = 0$, oraz na ściankach poprzecznych $\mathbf{n}(\pm 1, 0, 0)$ jest $\mathbf{q}(\pm q, 0, 0)$, skąd:

$$\begin{cases} 0 = \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z, \\ 0 = \sigma_y n_y + \tau_{yz}n_z, \\ 0 = \tau_{yz}n_y + \sigma_z n_z, \end{cases} \quad \begin{cases} \pm q = \pm \sigma_x, \\ 0 = \pm \tau_{xy}, \\ 0 = \pm \tau_{xz}. \end{cases}$$

kinematyczne warunki brzegowe równań Cauchy'ego zapisujemy dla punktu $O(0, 0, 0)$:

$$u_i(0,0,0) = 0, \quad u_{i,j}(0,0,0) = 0$$

Rozwiązanie podejściem statycznym

Na podstawie statycznych warunków brzegowych, przypuszczamy macierz naprężenia spełniającą równania równowagi wewnętrznej Naviera oraz statyczne warunki brzegowe. Z równań Hooke'a obliczamy macierz odkształcenia:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{q}{E} & 0 & 0 \\ -\nu \frac{q}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{q}{E} \end{pmatrix}.$$

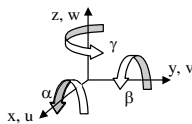
Przed przystąpieniem do całkowania równań geometrycznych Cauchy'ego, sprawdzamy spełnienie równań nierozdzielności. Ponieważ elementy macierzy odkształceń są wielkościami stałymi, a w równaniach nierozdzielności występują wyłącznie drugie pochodne odkształceń, natychmiast wnioskujemy, że równania te są spełnione tożsamościowo.

Równania Cauchy'ego mają postać:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{E}, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{q}{E}, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{q}{E}, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Całka ogólna powyższego układu równań różniczkowych cząstkowych liniowych, pierwszego rzędu, jest sumą całki ogólnej układu jednorodnego i całki szczególnej układu niejednorodnego. Całka jednorodnego układu równań oznacza przemieszczenia bryły o zerowych odkształceniach, a więc sztywnej. Z mechaniki teoretycznej wiadomo, że przy małych przemieszczeniach przemieszczenia bryły sztywnej są złożeniem translacji $\mathbf{u}(a, b, c)$ wzdłuż trzech kierunków osi oraz trzech obrotów $\varpi(\alpha, \beta, \gamma)$ względem tych osi. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} u^0 &= a + \beta z - \gamma y, \\ v^0 &= b - \alpha z + \gamma x, \\ w^0 &= c - \beta x + \alpha y. \end{aligned}$$



Całkę szczególną znajdujemy natychmiast metodą przewidywania, otrzymując:

$$u^s = \frac{q}{E} x, \quad v^s = -\nu \frac{q}{E} y, \quad w^s = -\nu \frac{q}{E} z.$$

Całka ogólna układu niejednorodnego jest sumą obu powyższych całek. Stałe całkowania wyznaczamy z kinematycznych warunków brzegowych. Z trzech pierwszych warunków kinematycznych dostajemy $a = b = c = 0$, a z następnych $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Wobec jednorodnych warunków brzegowych całka ogólna równa jest całce szczególnej.

Stwierdzamy, że w ten sposób spełniliśmy komplet równań liniowej teorii sprężystości, a więc zarówno przypuszczona macierz naprężenia jak i wynikające z niej odkształcenia i przemieszczenia są ścisłym rozwiązaniem zagadnienia, które nazywać będziemy *czystym rozciąganiem*.

Stan naprężenia dla czystego rozciągania jest jednorodny i jednoosiowy.

Ponieważ macierz naprężeń ma postać diagonalną, naprężenie normalne jest naprężeniem głównym. Dwie pozostałe wartości własne są sobie równe, co oznacza że istnieje cała płaszczyzna kierunków głównych, dla których naprężenia główne są równe zero. Inaczej mówiąc, zerowanie się obu pozostałych naprężeń głównych oznacza, że przy przecięciu pręta jakakolwiek płaszczyzną równoległą do osi x (płaszczyzną o normalnej równoległej do pozostałych osi układu) otrzymamy zawsze zerowy wektor naprężenia. (Wystarczyło więc jedynie założyć, że osie y, z są centralne a niekoniecznie główne.)

Stan odkształcenia jest jednorodny ale trójosiowy. Macierz odkształceń jest diagonalna.

W kierunku osi pręt o długości l doznaje wydłużenia Δl , co zapiszemy:

$$\Delta l = \frac{q}{E} l = \varepsilon_x l, \quad \text{albo} \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}.$$

Przekrój poprzeczny doznaje skrócenia, równomiernie w kierunkach osi y i z . Stosunek deformacji poprzecznej do podłużnej równy jest liczbie Poissona, ν .

Proste rozciąganie

Dzięki zasadzie de Saint-Venanta oraz temu, że ścianki poprzeczne stanowią niewielką część całego brzegu ciała, otrzymane ściśle rozwiązanie można wykorzystać również dla obciążeń statycznie równoważnych. Takim obciążeniem jest obciążenie siłą skupioną:

$$N = q F.$$

Doświadczenia pokazują, że zaburzenie jednorodnego stanu naprężenia obserwowane jest jedynie w niewielkiej odległości od punktu obciążenia (rzędu połowy średnicy pręta).

Podstawiając w powyżej wyprowadzonych wzorach $q = N/F$, otrzymamy rozwiązanie dla *prostego rozciągania*. Przykładowo naprężenie normalne i wydłużenie pręta będą wynosić:

$$\sigma_x = \frac{N}{F}, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

gdzie iloczyn w mianowniku, EF , nazywany jest *sztwywnością na rozciąganie*.

Statyczna próba rozciągania stali

Jest to bardzo ważna próba wytrzymałościowa umożliwiająca realizację jednoosiowego stanu naprężenia w warunkach doświadczalnych. Z bardzo dobrą dokładnością można wyznaczyć podstawowe stałe materiałowe: moduł Younga i liczbę Poissona.

Statyczna próba rozciągania stali jest skodyfikowana przez polską normę hutniczą PN-80/H-04310, która określa warunki jej przeprowadzenia, sposób analizy danych pomiarowych oraz standardowe rodzaje próbek, na których dokonuje się pomiaru.

Próbę wykonuje się w tzw. zrywarce uniwersalnej. Składa się ona ze sztywnej konstrukcji ramowej, pary szczęk samoczynnie zaciskających się, z których jedna jest nieruchoma a przemieszczenie drugiej jest sterowane, pompy olejowej i serwomechanizmu, będącego układem tłok-cylinder wymuszającym przemieszczenie ruchomej szczęki.

Najczęściej pomiaru dokonuje się na próbkach kołowych, pięciokrotnych i dziesięciokrotnych, w których długość *bazy pomiarowej* jest wielokrotnością średnicy próbki. Prócz tego norma dopuszcza inne rodzaje próbek, jak np. płaskie (wiosełkowe), z drutu itp.

Próbę wykonuje się w sposób statyczny z określoną prędkością przyrostu naprężenia. Przekroczenie dopuszczonej przez normę wartości powoduje sztuczne podwyższenie wytrzymałości materiału wskutek efektów dynamicznych (bezwładnościowych).

Przebieg próby najlepiej obrazuje wykres wydłużenie—obciążenie, który można przeliczyć na odkształcenie — naprężenie pozorne (odniesione do początkowego przekroju poprzecznego).

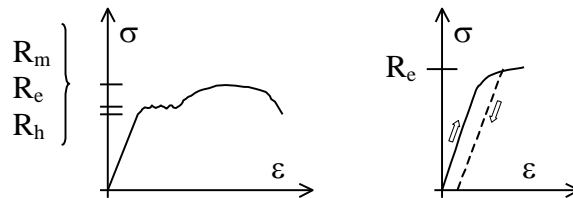
Stal miękka

Na wykresie wyróżniamy etapy:

- zakres proporcjonalności, w którym istnieje liniowa zależność między odkształceniem i naprężeniem aż do osiągnięcia *umownej granicy proporcjonalności*, R_H , do której obowiązują liniowe związki Hooke'a, a tangens nachylenia wykresu jest równy modułowi Younga, E ,
- zakres sprężystości aż do osiągnięcia *umownej granicy sprężystości*, $R_{0.05}$, (0.05 % odkształcenia trwałego) do której odkształcenia są odwracalne, tzn. znikają po zdjęciu obciążenia,
- zakres lokalnej niestateczności materiału w postaci tzw. *plateau płynięcia*, ograniczonego *górną i dolną granicą plastyczności*, R_e , w którym następuje przyrost odkształceń bez wyraźnego wzrostu naprężeń,
- zakres wzmocnienia plastycznego materiału z tworzeniem się widocznej siatki linii poślizgu Lüdersa, ograniczony od góry *wytrzymałością na rozciąganie*, R_m , będącą najwyższym punktem na wykresie naprężeń pozornych,
- zakres intensywnego tworzenia się przewężenia przekroju poprzecznego, tzw. *szyjki* i spadku naprężeń pozornych (a wzrostu naprężeń rzeczywistych), zakończony punktem w którym próbka ulega zerwaniu, a dla którego możemy określić naprężenia rzeczywiste zwane *naprężeniami przy zerwaniu*, R_u , określone poprzez pomiar przekroju po zerwaniu.

W trakcie próby procesy odciążenia i ponownego obciążenia są sprężyste, z niewielką pętlą histerezy.

W przełomie próbki kołowej wyróżniamy 3 koncentryczne strefy, poczynając od środka: włókniasta, promienista i tzw. ścięta krawędź. Odpowiednio do tego mówimy o trzech typach złomów: kruchy (bez odkształceń plastycznych, w płaszczyźnie naprężeń normalnych), rozdzielczy (niewielkie odkształcenia plastyczne, w płaszczyźnie naprężeń normalnych) i poślizgowy (duże odkształcenia plastyczne przez poślizg lub bliźniakowanie, wskutek naprężeń stycznych).



Stal twarda

Wykres rozciągania dla stali twardej nie zawiera zakresu lokalnej niestateczności ani też wyraźnej granicy plastyczności. Dlatego też wprowadza się w takim przypadku tzw. *umowną granicę plastyczności*, $R_{0.2}$, (0.2 % odkształcenia trwałego), określaną graficznie na wykresie dla procesu odciążenia.

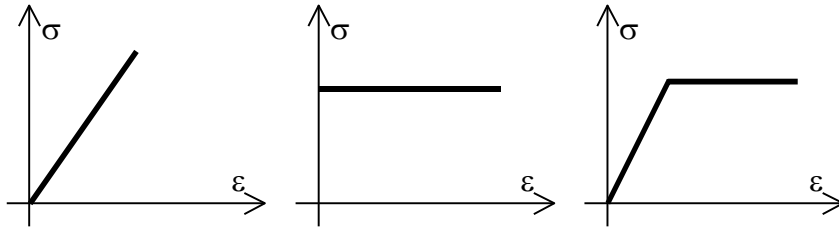
Określenie charakterystyk wytrzymałościowych materiału

Na podstawie statycznej próby rozciągania określamy:

- *moduł Younga*, E , na podstawie nachylenia wykresu dla zakresu sprężystego albo dla procesów odciążania/ponownego obciążania,
- *wydłużenie względne*, $A_p = \Delta L/L_0$ 100%,
- *wydłużenie równomierne*, $A_r = (d_0^2 - d^2)/d^2$ 100%, z wyłączeniem wpływu szyjki (w połowie dłuższej części),
- *przewężenie*, $Z = (F_0 - F)/F_0$ 100%,
- zależnie od potrzeb, granicę sprężystości R_s , plastyczności R_e , albo wytrzymałości R_m .

Schematyzacja wykresu rozciągania

Wykres uzyskany w czasie statycznej próby rozciągania stanowi podstawę do jego schematyzacji, czyli jego aproksymacji funkcjami odcinkowo analitycznymi. Aproksymację taką przeprowadza się zależnie od zastosowań:



model ciała idealnie sprężystego, wg związków Hooke'a, dla procesów w których nie są osiąganymi odkształcenia plastyczne, lub są one na tyle nieznaczne, że mogą być pominięte,

model ciała idealnie plastycznego, Levy'ego, dla problemów technologicznej teorii plastyczności (walcowanie, przeciąganie itp.), czyli dla procesów w których odkształcenia plastyczne są na tyle duże, że można pominąć część sprężystą odkształceń,

model ciała idealnie sprężysto-plastycznego, Prandtl'a, dla procesów o umiarkowanych odkształceniach plastycznych,

bardziej skomplikowane modele, uwzględniające nieliniowe odkształcenia sprężyste czy też wzmocnienie plastyczne materiału.

Wytrzymałość obliczeniowa

Na podstawie rozkładu statystycznego wartości charakterystycznej granicy, R , określamy wytrzymałość charakterystyczną R_k materiału: $R_k = R_{sr} - ks$, gdzie R_{sr} jest średnią arytmetyczną z pomiarów, k - współczynnikiem zależnym od przyjętego poziomu ufności oraz liczby pomiarów a s - odchyleniem standardowym. W ten sposób wytrzymałość charakterystyczna gwarantuje, z przyjętym a priori prawdopodobieństwem, minimalną wytrzymałość materiału. Jednak z powodu rozbieżności między wielkościami przyjętymi do obliczeń a ich rzeczywistą wartością (niedokładność wykonania, obciążenia, materiału), w praktyce przyjmuje się do obliczeń wytrzymałość obliczeniową, R , uwzględniającą współczynnik materiałowy γ_m : $R = R_k / \gamma_m$. Zależnie od rodzaju konstrukcji, jej przeznaczenia oraz materiału (co ujmują różne normy projektowania jak np. dla konstrukcji stalowych, żelbetowych itp.), współczynnik materiałowy przyjmuje różne wartości, w granicach 1.0-1.5.

Będziemy używać wytrzymałości obliczeniowej R bez wskazywania źródła pochodzenia jej wartości.

Warunki projektowania

Istnieją dwa zasadnicze rodzaje warunków projektowania:

warunek wytrzymałościowy, gwarantujący odpowiednią wytrzymałość konstrukcji dla tzw. *stanu granicznego nośności*,

warunek użytkowania, gwarantujący prawidłową eksploatację konstrukcji (z reguły jej określoną sztywność, odporność na zarysowanie i korozję itp.) dla tzw. *stanu granicznego użytkowania*.

Dla rozciągania warunki te zapisujemy:

$$\frac{N}{F} \leq R, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF} \leq \Delta l_{dop}.$$

Ściskanie prętów krępych

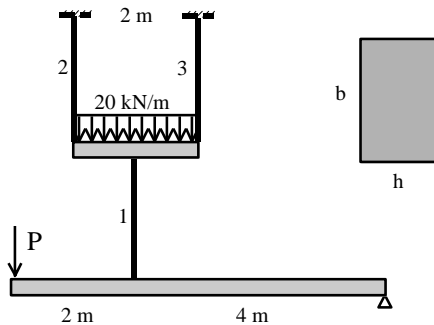
Dla czystego (prostego) ściskania, rozwiązanie uzyskujemy przez zmianę znaku obciążenia. Zakres ważności wzorów jest jednak ograniczony do prętów krępych. Różnica jest jakościowa, gdyż nie dla każdej siły i geometrii pręta będzie spełnione założenie o równowadze statecznej układu, o czym przekonuje nas poniższy przykład obliczenia długości pręta przy której nastąpi jego zerwanie pod ciężarem własnym:

Dane: $R = 300 \text{ MPa}$, $\gamma_{st} = 78 \text{ kN/m}^3$.

Rozwiązanie: $N(x) = \gamma Fx$, $\sigma_x = P/F = \gamma x$, $\gamma x \leq 300 \cdot 10^6$, $x \leq 3846 \text{ m} = 3.8 \text{ km}$.

Jest oczywiste, że dla zadania ściskania maszt kilkukilometrowej wysokości zniszczy się wskutek utraty stateczności. Zjawisku utraty stateczności poświęcimy więcej uwagi w dalszej części wykładu.

Przykład - rozciąganie statycznie wyznaczalne



Zaprojektować przekroje prętów 1, 2, 3. Obliczyć zmianę wymiarów pręta 2.

Dane: $P = 150 \text{ kN}$, $R = 100 \text{ MPa}$, $b/h = 0.5$,

$l_1 = l_2 = l_3 = 2 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.27$.

Z równań statyki znajdujemy:

$P_1 = 225 \text{ kN}$, $P_2 = P_3 = 132.5 \text{ kN}$.

Z warunku projektowania $\sigma_x \leq R$ znajdujemy:

$F_1 \geq 22.5 \text{ cm}^2 \Rightarrow h_1 \geq 6.71 \text{ cm}$,

$F_2 = F_3 \geq 13.25 \text{ cm}^2 \Rightarrow h_2 = h_3 \geq 5.15 \text{ cm}$.

Przyjmujemy: $F_1 = 7.0 \times 3.5 \text{ cm}$, $F_2 = F_3 = 5.2 \times 2.6 \text{ cm}$, naprężenia wynoszą $\sigma_1 = 91.8 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 98.0 \text{ MPa}$.

Zmiana wymiarów pręta 2:

$\varepsilon_x^{(2)} = \sigma_x^{(2)} / E = 4.67 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -1.40 \cdot 10^{-4}$.

$\Delta l_2 = 9.33 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, $\Delta h_2 = -7.28 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$, $\Delta b_2 = -3.64 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$.

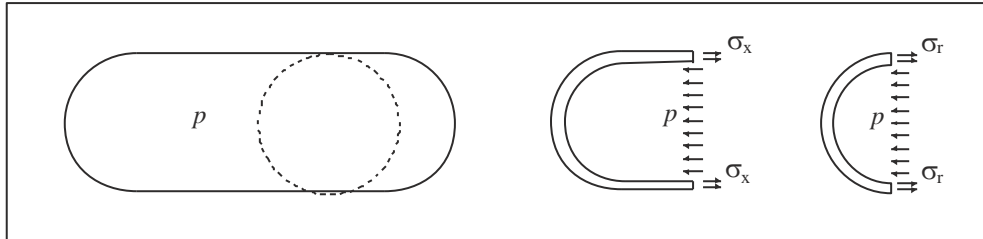
Zmiana objętości: $\Delta V = V - V' = lhb - (\Delta l + l)(\Delta h + h)(\Delta b + b) = lhb[1 - (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)]$ czyli 0.0063 %.

Przykład: rozciąganie statycznie wyznaczalne

Określić naprężenia obwodowe i poosiowe w walczaku pod ciśnieniem (kotle pod ciśnieniem). Grubość ścianek jest stała.

Rozwiązanie:

Dokonyjemy dwóch przekrojów: płaszczyzną prostopadłą do podłużnej osi walczaka i płaszczyzną przechodzącą przez tę oś:



Ponieważ ciśnienie działa we wszystkich kierunkach jednakowo, a nas interesuje jedynie jego składowa pozioma (pozostałe się znoszą z uwagi na symetrię zadania), jako obciążenie przyjąć możemy stałe obciążenie powierzchniowe.

W pierwszym przekroju, dla naprężeń poosiowych, obciążenie ciśnieniem wewnętrznym sprowadza się do działania siły podłużnej:

$$N = p \frac{\pi D^2}{4} :$$

która przenoszona jest przez powierzchnię poprzeczną płaszczka walczaka:

$$A = \pi D \cdot g , \text{ gdzie } g - \text{grubość płaszczka}$$

skąd naprężenia poosiowe wynoszą:

$$\sigma_p = \frac{pD}{4g} .$$

W drugim przekroju, dla naprężeń obwodowych z równowagi na 1m długości, wypadkowa siła ciśnienia wynosi:

$$N = pD \cdot 1$$

i jest przenoszona przez powierzchnię:

$$A = 2g \cdot 1$$

skąd naprężenia obwodowe wynoszą:

$$\sigma_o = \frac{pD}{2g} .$$

Jak widać, naprężenia obwodowe są dwukrotnie większe od poosiowych, co wyjaśnia dlaczego parówki gotowane w wodzie pękają wzdłuż a nie w poprzek.

Zadania statycznie niewyznaczalne

Dla zadań, w których liczba niewiadomych przewyższa liczbę niezależnych równań statyki, oprócz równań statyki musimy dodatkowo zapisać równania geometryczne (związki nieroz-

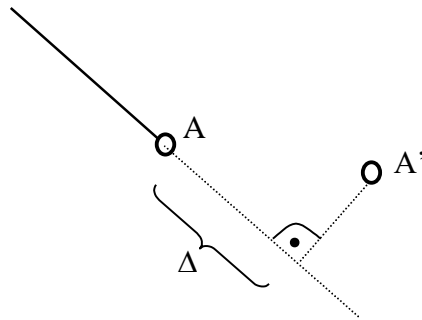
dzielności) w liczbie równej ilości nadliczbowych niewiadomych. Ponieważ równania geometryczne zawierają niewiadome kinematyczne (przemieszczenia), poprzez związki fizyczne wyrażamy je w niewiadomych statycznych. Tak więc komplet równań musi zawierać:

- równania statyki, zawierające niewiadome statyczne,
- równania geometryczne, zawierające zapis zgodności wielkości kinematycznych (jak np. przemieszczenia), w liczbie równej statycznej niewyznaczalności zadania,
- równania fizyczne, umożliwiające wyrażenie wielkości kinematycznych poprzez statyczne.

Rozwiązując zadania dla prętowych układów rozciąganych (ściskanych) będziemy stosować następujące założenia upraszczające (dla układów o tzw. liniowej geometrii):

Zakładamy, że pręty ulegają wydłużeniom (skróceniom), natomiast kąty między nimi nie ulegają zmianie (wpływ ich zmiany jest pomijalnie mały). Jest to równoważne założeniu o małych obrotach

Tak więc zmiana długości pręta będzie to odcinek zawarty pomiędzy 2 punktami: rzutem nowego położenia końca pręta na pierwotny kierunek pręta i końcem tego pręta, rys.



Jeżeli Δ jest „na zewnątrz” pręta to pręt doznaje wydłużenia a jeżeli „do wewnątrz” – skrócenia.

Przypomnienie pojęć:

- przemieszczenie rzeczywiste: wektor łączący dwa rzeczywiste położenia punktu (zależy od więzów i działających sił)
- przemieszczenie możliwe: wektor łączący dwa możliwe położenia punktu (zależy jedynie od więzów)
- przemieszczenie wirtualne (przygotowane, pomyślane): wektor współliniowy z prędkością możliwą punktu (na jaką zezwalają więzy układu).

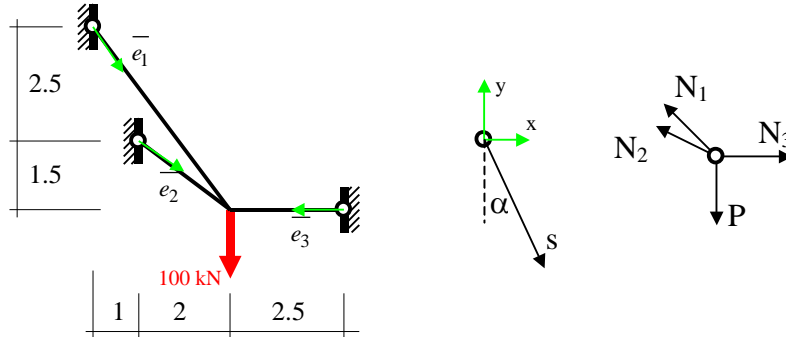
Przemieszczenie wirtualne zależy więc od więzów, poza tym jest najzupełniej dowolne. Ważne jest jednak aby rzeczywiście przyjąć je w dowolnej postaci. Przyjęcie bowiem w postaci przemieszczenia prostopadłego do kierunku pręta oznaczałoby założenie że pręt jest *a priori* zerowy.

Tak postępowania jest następujący:

- wprowadzamy przemieszczenie wirtualne węzła, s
- określamy wersory kierunków prętów odkształcalnych (jeśli zwrot „na zewnątrz” pręta, licząc od węzła, to znak dodatni oznaczać będzie rozciąganie a ujemny – ściskanie; jeśli „do wewnątrz” – będzie odwrotnie)
- obliczamy – posługując się rachunkiem wektorowym – zmiany długości prętów odkształcalnych (wykonując opisane wyżej rzutowanie)
- przeliczamy – z równań fizycznych – wielkości niewiadome kinematyczne na statyczne

- rysujemy plan sił zgodny z przyjętymi kierunkami wektorów kierunków prętów, zapisując odpowiednie równania statyki
- rozwiązujemy powstały układ równań

Przykład 1.



W tym przypadku mamy:

$$\bar{s} = s(\sin \alpha, -\cos \alpha)$$

$$\bar{e}_1 = (0.6, -0.8)$$

$$\bar{e}_2 = (0.8, -0.6)$$

$$\bar{e}_3 = (-1, 0)$$

skąd:

$$\Delta_1 = 0.6s \sin \alpha + 0.8s \cos \alpha$$

$$\Delta_2 = 0.8s \sin \alpha + 0.6s \cos \alpha$$

$$\Delta_3 = -s \sin \alpha$$

Po wyrugowaniu:

$$s \sin \alpha = -\Delta_3, \quad s \cos \alpha = \frac{\Delta_2 + 0.8\Delta_3}{0.6},$$

otrzymujemy równanie:

$$3\Delta_1 - 4\Delta_2 - 1.4\Delta_3 = 0 \quad (1^*)$$

Przyjmując $E F_i = idem$ i podstawiając związki Hooke'a $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$:

$$15N_1 - 10N_2 - 3.5N_3 = 0 \quad (1)$$

otrzymujemy równanie wyrażone poprzez niewiadome statyczne. Z równań statyki mamy kolejne 2 równania:

$$-0.6N_1 - 0.8N_2 + N_3 = 0 \quad (2)$$

$$0.8N_1 + 0.6N_2 - P = 0. \quad (3)$$

Rozwiązując układ równań (1-3), dostajemy:

$$N_1 = 0.712P, \quad N_2 = 0.717P, \quad N_3 = 1.00P.$$

Przyjmując $E = 200 \text{ GPa}$, $F = 4 \text{ cm}^2$, otrzymujemy ostatecznie:

$$\Delta_1 = \frac{71.2 \cdot 10^3 \cdot 5}{210 \cdot 10^9 \cdot 0.0004} = 0.00424 \text{ m} = 4.24 \text{ mm}$$

$$\Delta_2 = \frac{71.7 \cdot 10^3 \cdot 2.5}{210 \cdot 10^9 \cdot 0.0004} = 0.00213 \text{ m} = 2.13 \text{ mm}$$

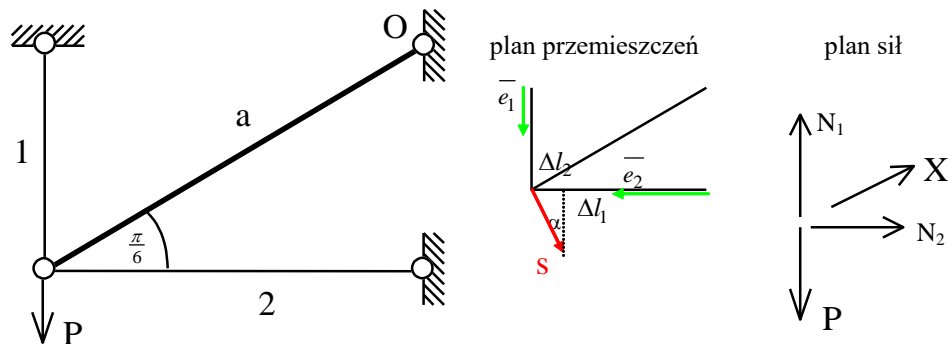
$$\Delta_3 = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2.5}{210 \cdot 10^9 \cdot 0.0004} = 0.00298 \text{ m} = 2.98 \text{ mm}$$

$$\bar{s} = (2.98, -7.52) \text{ mm}$$

Jak widać, przemieszczenie węzła jest rzeczywiście małe.

Przykład 2

W poniższym przykładzie kierunek przemieszczeń wirtualnych jest narzucony (ale nie sam jego zwrot):



Mamy:

$$\bar{s} = s(\sin \alpha, -\cos \alpha), \quad \bar{e}_1 = (0, -1), \quad \bar{e}_2 = (-1, 0)$$

skąd:

$$\Delta_1 = \bar{s} \cdot \bar{e}_1 = s \cos \alpha, \quad \Delta_2 = \bar{s} \cdot \bar{e}_2 = -s \sin \alpha.$$

czyli równanie geometryczne dla sporządzonego planu przemieszczeń ma postać:

$$\Delta_1 = -\sqrt{3}\Delta_2$$

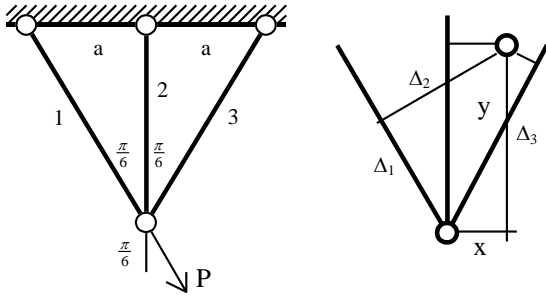
a po podstawieniu związków fizycznych: $\frac{N_1 l_1}{EF} = \sqrt{3} \frac{N_2 l_2}{EF}$ skąd $N_1 = 3N_2$.(1)

Równanie statyki daje: $(P - N_1) a \cos \frac{\pi}{6} + N_2 a \sin \frac{\pi}{6} = 0$.(2)

Rozwiązanie zadania polega więc na rozwiązaniu układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, skąd otrzymujemy ostatecznie:

$$N_1 = \frac{3\sqrt{3}P}{3\sqrt{3} + 1} = 0.8386P, \quad N_2 = -\frac{\sqrt{3}P}{3\sqrt{3} + 1} = -0.2795P \text{ (ściskanie)}.$$

Inne przykłady:



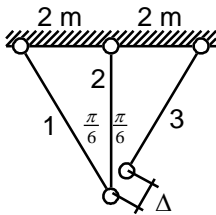
Dla kratownicy jak na rysunku, rysujemy plan przemieszczeń wirtualnych przyjmując dowolne położenie węzła z siłą. W szczególności należy przestrzec przed przyjęciem przemieszczenia w jakimś ściśle określonym kierunku (jeśli nie wynika to z warunków zadania). Wprowadzając dwie pomocnicze zmienne x i y , wyrażamy za ich pomocą wydłużenia (skrócenia) prętów:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \overline{e_1} \cdot \overline{AA_1} = -x \sin \frac{\pi}{6} + y \cos \frac{\pi}{6} \\ \Delta_2 = \overline{e_2} \cdot \overline{AA_1} = y \\ \Delta_3 = \overline{e_3} \cdot \overline{AA_1} = x \sin \frac{\pi}{6} + y \cos \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Po wyrugowaniu pomocniczych zmiennych dostajemy równanie geometryczne w postaci:

$$\Delta_3 + \Delta_1 = \sqrt{3}\Delta_2.$$

Równanie to, po wyrażeniu wydłużeń prętów przez siły w prętach, wraz z równaniami równowagi obciążonego węzła kratownicy, tworzą układ równań określający siły w prętach.

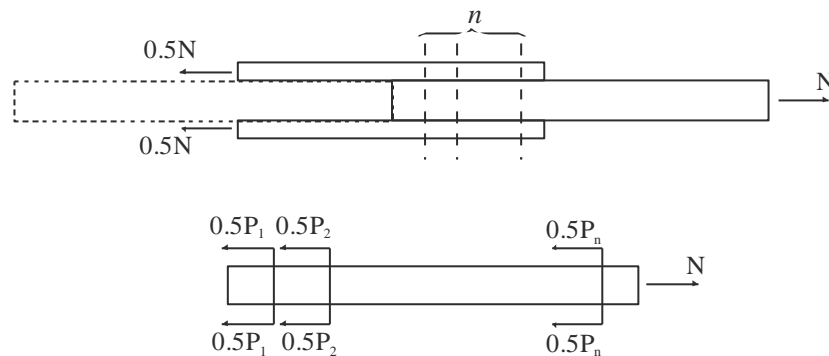


Powstaje pytanie: jaka jest różnica w pracy konstrukcji statycznie niewyznaczalnej? Różnica polega na tym, że siły w prętach zależą nie tylko od przyłożonego obciążenia ale i od sztywności poszczególnych prętów. Ponadto, zmiana wymiarów prętów, np. skutek tzw. luzu montażowego lub zmiany temperatury, powoduje powstanie sił w prętach, co nie ma miejsca w konstrukcjach statycznie wyznaczalnych. Aby obliczyć naprężenia termiczne, powstające wskutek zmiany temperatury układu, stosujemy znane z fizyki równanie konstytutywne: $\Delta l(t) = \alpha l \Delta t$, które w połączeniu ze związkiem Hooke'a określa wydłużenie (skrócenie) pręta:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l \Delta t.$$

Przykład 3

Dwie blachy połączone symetrycznie umieszczonymi nakładkami stalowymi, o tej samej sztywności na rozciąganie co łączące blachy. Określić jakie siły są przenoszone przez łączące śruby w zależności od ilości zastosowanych śrub.



Rozwiązanie.

Taka sama sztywność na rozciąganie nakładek i łączonych blach oznacza, że $EA = \text{idem}$, czyli że – jeśli materiał na nakładki jest taki sam jak łączonych blach – to ich sumaryczny przekrój też powinien być taki jak łączonych blach.

Jest oczywiste, że dla połączenia jedną śrubą siła przenoszona przez śrubę wynosi tyle, co obciążenia całkowite, czyli N . Dla połączenia dwiema śrubami, każda z nich przenosi połowę obciążenia. Powstaje jednak pytanie, jakie siły pojawią się dla większej ilości śrub w złączu.

Dla i -tego odcinka pomiędzy śrubami warunek zgodności wydłużeń nakładek i blachy łączonej ma postać:

$$\Delta l_i^{(b)} = \Delta l_i^{(n)} \rightarrow \frac{N_i^{(b)} l_i}{EA} = \frac{N_i^{(n)} l_i}{EA} \rightarrow N_i^{(b)} = N_i^{(n)}$$

Siłę w łączonej blasze i nakładkach możemy obliczyć sumując siły po jednej stronie przekroju cięcia. Wykonajmy operację idąc z różnych kierunków: od lewej dla blachy i od prawej dla nakładek. Otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n \\ P_1 + P_2 &= P_3 + P_4 + \dots + P_n \\ P_1 + P_2 + P_3 &= P_4 + \dots + P_n \\ &\dots \end{aligned}$$

Odejmując od siebie dwa kolejne równania, otrzymujemy natychmiast:

$$P_2 = P_3 = \dots = P_{n-1} = 0$$

co oznacza, że obciążenie przenoszą jedynie skrajne śruby, podobnie jak było to dla przypadku dwóch śrub. Widać więc, że wprowadzenie dodatkowych łączników nie poprawia wytrzymałości takiego łącza, wręcz przeciwnie.